Σ

«Сущность математики заключается в ее свободе»

Георг Кантор

«Свобода есть познанная необходимость»

Георг Гегель

&

СИСТЕМА INCOL&TAMLA И ФЕНОМЕН ЛОГИЧЕСКОЙ ТРАНСЦЕНДЕНЦИИ В АНАЛИТИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

А.Н. Ахвледиани, Н.В. Ахвледиани

INCOL

2011 - 2012

Благодарности

АВТОР ВЫРАЖАЕТ СЕРДЕЧНУЮ ПРИЗНАТЕЛЬНОСТЬ

ПОПЕЧИТЕЛЬСКОМУ СОВЕТУ

ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКОГО ФОНДА RUSSIKA

КНЯЗЮ НИКИТЕ ДМИТРИЕВИЧУ ЛОБАНОВУ - РОСТОВСКОМУ

БАРОНУ ФОН ФАЛЬЦ – ФЕЙНУ

ЭДУАРДУ АЛЕКСАНДРОВИЧУ

ГЕНЕРАЛ-ПОЛКОВНИКУ МВД РФ

ВЛАДИМИРУ ВИКТОРОВИЧУ ЗУБРИНУ

А ТАКЖЕ ЛИЧНО

ГЕНЕРАЛЬНОМУ ДИРЕКТОРУ ФОНДА - АКАДЕМИКУ ВСЕМИРНОЙ АКАДЕМИИ НАУК, ИСКУССТВ И КУЛЬТУРЫ

ВАЛЕНТИНУ НИКАНДРОВИЧУ МАРУНИНУ

И

РЕДАКЦИОННОМУ СОВЕТУ ФОНДА

ЗА ЛЮБЕЗНО ПРЕДОСТАВЛЕННУЮ ВОЗМОЖНОСТЬ ОПУБЛИКОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ КНИГИ НА САЙТЕ

ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКОГО ФОНДА RUSSIKA

АЛЕКСАНДР НОДАРОВИЧ АХВЛЕДИАНИ

НОДАР ВАЛЕРИАНОВИЧ АХВЛЕДИАНИ

СИСТЕМА INCOL&TAMLA

И ФЕНОМЕН ЛОГИЧЕСКОЙ ТРАНСЦЕНДЕНЦИИ В АНАЛИТИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНОЕ

ОБЩЕСТВО «INCOL»

КАРМИЭЛЬ

2011-2012

АННОТАЦИЯ

НАСТОЯЩАЯ КНИГА ПОСВЯЩЕНА ИССЛЕДОВАНИЮ ФЕНОМЕНА ЛОГИЧЕСКОЙ ТРАНСЦЕНДЕНЦИИ В ОСНОВАНИЯХ КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ, КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОЙ МАТЕМАТИКИ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ПЛАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ. ПОД ЛОГИЧЕСКОЙ ТРАНСЦЕНДЕНЦИЕЙ ПОНИМАЕТСЯ ВЫХОД ЗА ПРЕДЕЛЫ КЛАССИЧЕСКОЙ АРИСТОТЕЛЕВСКОЙ ТРАДИЦИОННОЙ ЛОГИКИ, НАБЛЮДАЕМЫЙ КОНСТРУКТИВНО И ФОРМАЛЬНО ДОКАЗУЕМЫЙ В РАМКАХ СОВРЕМЕННОЙ ГЛОБАЛЬНО НЕПРОТИВОРЕЧИВОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ НУЛЕВОГО И ПЕРВОГО ПОРЯДКОВ.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФЕНОМЕНА ЛОГИЧЕСКОЙ ТРАНСЦЕНДЕНЦИИ ОСУЩЕСТВЛЕНО НА ОСНОВЕ РАЗРАБОТАННОЙ АВТОРАМИ ЛОГИЧЕСКИ ТРАНСЦЕНДЕНТНОЙ ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ И ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ «INCOL&TAMLA». В РЕЗУЛЬТАТЕ ПРИМЕНЕНИЯ УПОМЯНУТОЙ ВЫШЕ СИСТЕМЫ, АВТОРАМИ С УЧЕТОМ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫДАЮЩИХСЯ МАТЕМАТИКОВ – АВСТРИЙСКОГО ЛОГИКА КУРТА ГЕДЕЛЯ, И НЕМЕЦКОГО МАТЕМАТИКА – ГЕРХАРДА ГЕНЦЕНА, ИССЛЕДОВАНЫ ЛОГИЧЕСКИ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ОСОБЕННОСТИ «ВТОРОЙ ПРОБЛЕМЫ ГИЛЬБЕРТА» В ОТНОШЕНИИ АКСИОМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕАНО «PA&MI», А ТАКЖЕ ИССЛЕДОВАНЫ ВОПРОСЫ ЛОГИКО-АНАЛИТИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ КЛАССИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ «ZFC» В РАМКАХ СОВРЕМЕННОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ НУЛЕВОГО И ПЕРВОГО ПОРЯДКОВ.

В НАСТОЯЩЕЙ РАБОТЕ ТАКЖЕ РАССМОТРЕНЫ ВОПРОСЫ ФЕНОМЕНА ЛОГИЧЕСКОЙ ТРАНСЦЕНДЕНЦИИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В РАМКАХ МЕХАНИКО-АНАЛИТИЧЕСКОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ, КОТОРАЯ В ТЕЧЕНИИ ЗНАЧИТЕЛЬНОГО ПЕРИОДА ВРЕМЕНИ ЯВЛЯЛАСЬ ОДНИМ ИЗ ОСНОВНЫХ МЕТОДОВ В ТЕОРИИ РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ УПОМЯНУТЫХ СИСТЕМ.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АЛЕКСАНДР НОДАРОВИЧ АХВЛЕДИАНИ – ГРУЗИНСКИЙ И ИЗРАИЛЬСКИЙ УЧЕНЫЙ, РАБОТАЮЩИЙ В ОБЛАСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛОГИЧЕСКИ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ПРОБЛЕМ В ОСНОВАНИЯХ ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ, КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОЙ МАТЕМАТИКИ, АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ И МЕХАНИКИ ПЛАСТИЧЕСКИХ И ПСЕВДОПЛАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ.

НОДАР ВАЛЕРИАНОВИЧ АХВЛЕДИАНИ (1924-1993) – ИЗВЕСТНЫЙ ГРУЗИНСКИЙ УЧЕНЫЙ. ЯВЛЯЛСЯ ИЗВЕСТНЫМ ЭКСПЕРТОМ В ОБЛАСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ И АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ КЛАССИЧЕСКОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ, СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ, А ТАКЖЕ В ОБЛАСТИ ТЕОРИИ РАСЧЕТА И ЭКСПЕРТИЗЫ СЕЙСМОСТОЙКОСТИ СООРУЖЕНИЙ.

В НАСТОЯЩЕЙ КНИГЕ ОПИСЫВАЕТСЯ РАЗРАБОТАННАЯ АВТОРАМИ СОВРЕМЕННАЯ ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ И ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННАЯ СИСТЕМА «INCOL&TAMLA», ПРЕДНАЗНАЧЕННАЯ ДЛЯ МУЛЬТИДИСЦИПЛИНАРНЫХ И МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫХ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ. СИСТЕМА «INCOL&TAMLA» ОСНОВАНА НА ОБЩЕПРИНЯТЫХ И ШИРОКО РАСПРОСТРАНЕННЫХ ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ НУЛЕВОГО И ПЕРВОГО ПОРЯДКОВ, И ПРОШЛА АПРОБАЦИЮ В РЕАЛЬНЫХ ЭКСПЕРТИЗАХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ И РАСЧЕТНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ОБЛАСТИ АНАЛИЗА ПЛАСТИЧЕСКИХ И ПСЕВДО-ПЛАСТИЧЕСКИХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ.

В НАСТОЯЩЕЙ РАБОТЕ ПОКАЗАНА ЭФФЕКТИВНОСТЬ СИСТЕМЫ «INCOL&TAMLA» ПРИ АНАЛИЗЕ И РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЛОГИЧЕСКИ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ПРОБЛЕМ КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ, ОСНОВАНИЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОЙ МАТЕМАТИКИ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ПЛАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ.

Содержание

К 105-летию со дня рождения выдающегося логика и математика 20-го века – Курта Фридриха Геделя 8

Введение. Об основных законах аристотелевской традиционной логики 11

Глава 1.

Анализ и решения классических парадоксов традиционной логики 18

1.1. Решение парадокса «Тяжба Протагора и Эватла» 18
1.2. Решение «Парадокса крокодила» 21
1.3. Логический анализ «Парадокса лжеца» 28
1.4. Решение«Парадокса брадобрея» 32
1.5.Решение «Парадокса мэра городов» 39

Глава 2.
Анализ феномена логической трансценденции в основаниях классической теории множеств 40

2.1.О формально-логической и теоретико-множественной системе INCOL&TAMLA... 40
2.2 Теорема экзистенциальности универсального класса....................................... 47
2.3.О трансцендентных логических свойствах пустого множества в канторовской теории множеств и основных определениях трансцендентной логики 53
2.4.Парадокс «Аксиомы пустого множества» и «Аксиомы регулярности» в аксиоматических системах ZF и ZFC 56
2.5. Логический анализ «Теоремы Кантора 63
2.6. Логический анализ «Парадокса Кантора».. 74

Глава 3.
Исследование феномена логической трансценденции в основаниях классической формальной логики нулевого порядка и системе ZFC теории множеств........... 76

3.1. Теоремы о логической трансценденции в классической формальной логике нулевого порядка 76
3.2. О логических свойствах «Аксиомы выбора» и генезис множественной логической трансценденции в классической системе теории множеств - ZFC .. 79

Глава 4.
Два принципа логико-математической трансценденции системы INCOL&TAMLA и «Вторая проблема Гильберта» 86

4.1.Первый принцип логико-математической трансценденции системы INCOL&TAMLA ……….. 86
4.2.Второй принцип логико-математической трансценденции системы INCOL&TAMLA ……….. 89
4.3.Приложение теории Курта Геделя о неполноте формальных аксиоматических систем к классической формальной логике 95
4.4.Логический аналог функции Дирихле и генезис логической трансценденции в системе PA&MI при стремлении к актуальной бесконечности 102
4.5. «Парадокс лжеца» и теоремы о логическом коллапсе в аристотелевской традиционной логике 106
4.6. Логически сингулярные аспекты «Второй проблемы Гильберта» и логическая формула «Модифицированного метода логико-математической индукции» в системе INCOL&TAMLA 109
4.7. Феномен логической трансценденции в классической формальной логике первого порядка 116

Глава 5.
Анализ формально-логических условий генезиса логического коллапса и логической неопределенности 121

5.1.Теоремы об условиях логического коллапса в классических формальных и полуформальных теориях на множестве бинарных логических операций ……... 121
5.2. Общий метод анализа возможности логического коллапса на множестве n – арных логических операций 126
5.3. Логико-аналитические теоремы об исключенных и неисключенных логических возможностях 129
5.4. Третий принцип логико-математической трансценденции.......................... 135
5.5. Четвертый принцип логико-математической трансценденции................... 138

Глава 6.
Исследование явления логического коллапса пластических систем в «Классической теории предельного равновесия» 143

6.1. Теоремы о физико-механическом коллапсе жестко-пластических систем в «Теории предельного равновесия»(«LET») 143
6.2 Теоремы о логическом коллапсе жестко-пластических систем в «Классической теории предельного равновесия»(«LET») 147
6.3 Описание некоторых экспериментальных и аналитических данных о явлении логического коллапса железобетонных оболочек 151

6.4. Исследование влияния кинематических факторов на несущую способность железобетонной оболочки в форме эллиптического параболоида **....................... 156**
6.5.Прогнозирование уровня несущей способности железобетонной оболочки в форме эллиптического параболоида в условиях логического коллапса **................ 159**

Заключение. Альтернативный взгляд на логическую природу классической теории множеств и оснований современной классической формальной логики.. 167

О научной деятельности и творческом наследии Нодара Валериановича Ахвледиани 180

Литература 184

К 105-летию со дня рождения выдающегося логика и математика 20-го века – Курта Фридриха Геделя

Курт Гедель (1906 - 1978 гг.) является одним из выдающихся ученых 20-го столетия, внесшим огромный вклад в развитие математической логики и во многих аспектах определившим последующий ход развития развития логики и математики в целом.

Курт Фридрих Гедель родился 28 апреля 1906 года в городе Брюнн (ныне Брно – Чехия). Его отец, Рудольф Гедель, был владельцем крупной текстильной фабрики в Брно. Мать Геделя, Марианна Хандшау, училась во Франции, где получила гуманитарное образование.

Поступив в начале 20-х годов в Венский университет, Курт Гедель сперва учился на физическом факультете, однако затем избрал областью специализации математику. В конце 20-х годов Гедель защитил диссертацию по математической логике, в рамках которой доказал полноту исчисления логики предикатов первого порядка. С начала 30-х годов, вплоть до 1938 года, Гедель преподавал в Венском университете, и являлся одним из ярких представителей школы логического позитивизма.

В 1940 году Курт Гедель эмигрировал в Америку. С 1940 года по 1953 год Гедель проработал в Институте высших исследований, а в 1953 году вошел в преподавательский состав Принстонского университета.

В начале 50-х годов Курт Гедель был удостоен одной из высших научных наград США, - Эйнштейновской премии, а в 1974 году ему была вручена Национальная Медаль Науки. Курт Гедель был членом Национальной Академии Наук США и почетным членом Лондонского Математического Общества.

Наибольшую научную славу и мировую известность Курту Геделю принесли знаменитые «Теоремы Геделя» о неполноте формальных аксиоматических систем, которые выявили значительные логические проблемы в самом аксиоматическом методе построения формальных и полуформальных логических и математических теорий на основе классической формальной логики.

Как известно, основы аксиоматического метода были заложены еще античными греческими математиками. Характерной чертой аксиоматического метода является то обстоятельство, что в той или иной теории, некоторое ограниченное число утверждений принимается в качестве аксиом или постулатов (т.е. утверждений. истинность которых принимается без доказательства), а остальные утверждения теории выводятся из исходных аксиом на основании логических правил вывода, в качестве которых обычно принимались правила, основанные на законах аристотелевской традиционной логики. В процессе развития математики, как науки, для основных ее разделов были разработаны аксиоматические системы, на основе которых стало возможным логически адекватное их описание в рамках аристотелевской традиционной логики. В результате этого процесса, в научных кругах укоренилось прочное убеждение в том, что для любой математической дисциплины можно указать перечень аксиом, достаточный для систематического построения всего множества истинных утверждений данной дисциплины.

«Теоремы Геделя» внесли весьма серьезные коррективы в общепринятые и устоявшиеся взгляды на природу логико-математических построений в рамках аксиоматического метода. Исследования Геделя показали, что возможности аксиоматического метода определенным образом ограничены. Куртом Геделем было доказано, что для весьма широкого класса аксиоматических теорий (включающего в частности аксиоматическую арифметическую теорию Пеано) невозможно доказать их аристотелевскую непротиворечивость, если не воспользоваться в доказательстве столь сильными методами, что их собственная аристотелевская непротиворечивость оказывается подвержена еще большим сомнениям, нежели аристотелевская непротиворечивость самой рассматриваемой теории. Отсюда непосредственно следует вывод о том, что ни о какой окончательной систематизации в рамках аристотелевской традиционной логики многих важнейших разделов математики не может быть и речи, и нельзя дать никаких надежных гарантий того, что многие важные области математики в логическом смысле полностью совместны с аристотелевской традиционной логикой. Ниже приводятся общепринятые формулировки «Теорем Геделя», касающиеся логико-аналитических свойств аксиоматической системы Пеано - **PA**.

<u>Первая теорема Геделя</u>

Существует такое суждение F в аксиоматической системе PA, что ни F, ни ⌐F не могут быть доказаны посредством аксиом из PA, если система PA непротиворечива.

<u>Вторая теорема Геделя</u>

Непротиворечивость аксиоматической системы PA (ConsisPA), не может быть доказана в PA, если PA является непротиворечивой.

Интересно отметить то обстоятельство, что теория Курта Геделя в определенной степени перекликается с проблемой границ применимости закона исключенного третьего аристотелевской традиционной логики. В начале 20-го столетия известный голландский математик Лейтзен Брауэр подверг критике применение закона исключенного третьего в инфинитарной математике. Справедливо отмечая то обстоятельство, что закон исключенного третьего, в основном применим при исследовании конечных процессов, и при обязательном условии наличия критерия истинности, позволяющего верифицировать истинность либо ложность того или иного утверждения, Л.Брауэр на многих конкретных примерах показал, что в случае бесконечных процессов и бесконечных множеств между утверждением и его отрицанием может иметь место еще третья возможность, существование которой на деле невозможно исключить. Критика Брауэром закона об исключенном третьем привела к созданию интуиционистской логики. В последней не принимается закон об исключенном третьем и отбрасываются все те способы рассуждений, которые с ним связаны. Среди них - косвенные методы доказательства, - такие как метод доказательства путем приведения к противоречию, а также метод доказательства, основанный на логическом законе Клавия.

В свете существования логических проблем, открытых Куртом Геделем и Лейтзеном Брауэром, а также некоторыми другими известными логиками и математиками того времени, в числе которых необходимо упомянуть и Бертрана Рассела, возникает закономерный вопрос – должна ли математика, как наука, в обязательном порядке удовлетворять законам аристотелевской традиционной логики? Сам основоположник традиционной формальной логики – Аристотель, - прямо указывал на временные границы применимости второго и третьего законов традиционной логики. Поскольку бесконечные множества и бесконечные процессы так или иначе связаны с бесконечным временем, то это мнение Аристотеля естественным образом распространяется на инфинитарную математику, особенно в тех вопросах, когда исследование бесконечности непосредственно связано со временем. Рассмотрение времени в явном виде может существенным образом отражаться на логических выводах при рассмотрении тех или иных бесконечных аналитических процессов. Можно ожидать, что именно в этих случаях применение теории Курта Геделя будет особенно актуальным.

Введение

Об основных законах аристотелевской традиционной логики

Современная наука прошла долгий путь зарождения, становления и развития различных конкретных областей точных, естественных, гуманитарных, философских и иных наук. Пожалуй не будет преувеличением сказать, что одной из основных составляющих развития науки в целом, а в особенности точных и естественных наук, является наука логики, позволяющая систематизировать опытные и аналитические данные тех или иных конкретных наук, и способствующая дальнейшему развитию тех или иных областей науки, на основе имеющихся базовых эмпирических и аналитических данных.

Учение о Логосе, как об основе развития мира в целом, и в том числе развития жизни на Земле, а также основе развития человеческого общества, восходит к незапамятным временам Древнего Мира. Судя по имеющимся современным данным, исторически, основой развития мировой науки являлись сакральные знания, полученные людьми Древнего Мира от еще более ранних, высокоразвитых цивилизаций. Частью утерянные, а частью бережно охраняемые от посторонних взоров непосвященных, эти сакральные знания воплотились в различные формы человеческого знания, а также нашли свое выражение в различных теологических, философских, эзотерических и мистических учениях Древнего Мира.

В античное время следы древних сакральных знаний, можно обнаружить в различных философских учениях и литературных памятниках античного времени, которые ныне являются достоянием широкой научной общественности.

К числу упоминаемых нами выдающихся философских памятников античного времени, без сомнения можно отнести «Изумрудную скрижаль» Гермеса Трисмегиста – легендарной личности, одно из древнейших упоминаний о котором содержится в трактате Цицерона «О природе Богов».

В «Изумрудной скрижали» легендарный Гермес Трисмегист утверждает об истинности соответствия *«Верхнего»* невидимого нами мира, и частично наблюдаемого нами *«Нижнего»* земного мира. Также истинно утверждается об единой *Сущностной Основе* мироздания, являющейся также и основой развития видимого и невидимого миров, как *единого целого*.

Учение о Логосе, нашло одно из своих выражений в философском учении знаменитого древнегреческого философа Гераклита Эфесского (примерно 544-483гг. до н.э). Согласно учению Гераклита, все произошло из огня и пребывает в состоянии постоянного изменения. Огонь – наиболее динамичная и изменчивая из всех стихий. Согласно представлениям Гераклита огонь сгущается в воздух, воздух превращается в воду, вода – в землю («путь вниз», который затем сменяется «путем наверх»). Сама

Земля по Гераклиту некогда была частью всеобщего раскаленного огня – но затем остыла.

В соответствии с учением Гераклита, *Логос* имеет функцию управления вещами, процессами и космосом. Гераклит считал, что все непрерывно меняется. Положение о всеобщей изменчивости связывалось Гераклитом с идеей внутренней раздвоенности вещей и процессов на противоположные, взаимодействующие друг с другом стороны. По Гераклиту – *Логос* есть единство противоположностей, системообразующая связь. «Из Единого все происходит, и из всего – Единое».

Из истории античной логики известно, что одним из наиболее сильных философских и логических направлений в Древней Греции являлось учение софистов. Софи́сты (от др.-греч. — умелец, изобретатель, мудрец, знаток) — древнегреческие платные преподаватели красноречия, представители одноименного философского направления, распространенного в Греции во 2-ой половине V — 1-й половине IV веков до н. э. В широком смысле термин «софист» означал *искусного или мудрого человека*. К наиболее известным старшим софистам относятся Протагор Абдерский, Горгий из Леонтин, Гиппий из Элиды, Продик Кеосский, Антифонт, Критий Афинский.

Старшие софисты — Протагор, Горгий, Продик и Гиппий — были выдающимися учеными своего времени. До софистов философы в основном занимались исследованием природы, софисты же сделали главным предметом своего философского исследования человека и его деятельность. На первое место выступают вопросы политики, этики, теории государства и права, начинают разрабатываться риторика, филология, грамматика и т. д. Протагор и Продик одними из первых стали заниматься вопросами научного языкознания; Протагор, Горгий и Трасимах одними из первых в Греции стали создавать теорию риторики.

Знаменитое положение софиста Протагора - «человек есть мера всех вещей», - исходило из учения Гераклита о всеобщей текучести и изменчивости всего существующего. Поскольку в каждый момент изменяется, как воспринимающий субъект, так и воспринимаемый им объект, то восприятие субъекта каждым человеком относительно и субъективно. *По мнению софистов, для каждого истинно то, что ему кажется таковым в данное время.*

Учение Протагора *о человеке, как мере всего существующего*, о том, что *у каждого человека в каждый момент особая истина*, что *одной и той же вещи могут быть одновременно приписаны противоположные свойства*, положило начало релятивистской и субъективистской теории познания софистов. Релятивизм софистов получил особенно яркое выражение в анонимном сочинении «Двоякие речи», в котором развивается учение об относительности человеческих понятий о добре и зле, о прекрасном и безобразном, о справедливости и несправедливости, об истине и лжи. Автор говорит, *что и судьи одну и ту же речь могут расценивать и как ложь, и как* *истину*. Одна и та же вещь бывает одновременно и легкой и тяжелой, в зависимости от того, с какой другой вещью она сравнивается.

Разрабатывая теорию красноречия, софисты не могли не затронуть вопросов логики, рассматривая их под углом зрения техники спора. Протагор написал специальное сочинение «Искусство спорить». Исходя из положения, что *о всякой вещи есть два противоположных мнения*, он первый *стал применять диалог, в котором два собеседника в споре защищали два противоположных взгляда*.

Софисты были весьма искусными изобретателями парадоксов. В широком смысле, парадокс – это положение, резко расходящееся с общепринятыми, устоявшимися, ортодоксальными мнениями. Обычно парадокс представляет собой начало такого исследования, некое нарушение конвенции. Парадокс в более узком значении – это два противоположных утверждения, для каждого из которых имеются кажущиеся убедительными аргументы. Наиболее острая форма парадокса – антиномия, рассуждение, доказывающее приемлемость двух утверждений, одно из которых является отрицанием другого.

В последующее время великим древнегреческим мыслителем Аристотелем (примерно 384-322 до н.э.) была разработана совершенно иная логическая система, которая в дальнейшем и явилась базой для развития логики, как науки о формах мышления и способах восприятия окружающей объективной действительности.

Одним из наиболее важных условий возможности адекватного изучения объектов методами *классической аристотелевской традиционной логики – является условие детерминированности и неизменности свойств изучаемых объектов*. Другим важным требованием является то обстоятельство, что *традиционная классическая логика принимает к рассмотрению те и только те высказывания об исследуемых объектах и явлениях*, которые удовлетворяют следующим трем основным законам логики .

А. <u>Закон тождества</u>

Каждое высказывание логически равно самому себе.

$$A = A \qquad \text{(В.1)}$$

Б. <u>Закон непротиворечия</u>

Никакое высказывание логически не равно своему отрицанию

$$A \neq \neg A \qquad \text{(В.2)}$$

В. <u>Закон исключенного третьего</u>

Для любого высказывания – истинно либо само высказывание либо его отрицание, <u>третья возможность исключена</u>.

$$A \oplus \neg A \qquad (B.3)$$

В формулах (В.1)-(В.3) приняты следующие обозначения:

A - некоторое высказывание, $\neg A$ - отрицание высказывания A. $\oplus$ - логическая пропозициональная связка, языковым эквивалентом которой является исключающее «либо», $\neg$ - символ отрицания, языковый эквивалент которого выражается, как «не - A», или выражением «не верно, что A » .

Необходимо отметить, что в аристотелевской традиционной логике допустимо рассматривать те, и только те высказывания, которые удовлетворяют перечисленным выше логическим законам. *Только при соблюдении этого условия*, в отношении таких высказываний будут справедливы все те законы аристотелевской традиционной логики, которые логически совместны с перечисленными выше основными законами.

Понятие «Истины» является одной из фундаментальных религиозных, философских и логических категорий. В различных философских и логических системах оно определяется по разному. Одной из основных традиционной концепций понятия истины *в рамках классической западной философии* является концепция, основные положения которой были сформулированы еще великим древнегреческим мыслителем Аристотелем, и развиты в работах философов последующего времени. Главное из этих положений сводится к утверждению: «*истина есть соответствие вещи и интеллекта*». В *традиционном западном классическом смысле,* истина – это адекватная информация об объекте, получаемая посредством чувственного и интеллектуального изучения, или принятия сообщения об объекте, *и характеризуемая с позиции достоверности*. В аристотелевской традиционной логике, для которой значение истинности высказываний является одним из преимущественных предметов изучения, одним из критериев истинности выступает логическая правильность – относительная полнота формально-аксиоматических систем и отсутствие в них противоречий.

Одним из важных итогов философских исследований выступает различие между абсолютной и относительной истиной. Абсолютная истина – это полное, исчерпывающее знание о мире или о некоторой совокупности его объектов (в частности *одного объекта*), как о сложно организованных системах. Относительная истина – это неполное, *но в некоторых отношениях верное знание* в отношении тех же систем. Относительная истина – философское понятие, отражающее утверждение, что абсолютная истина (или истина в «последней инстанции») трудно достижима.

Одним из основных понятий классической логики высказываний является понятие противоречия. В аристотелевской традиционной логике оно имеет несколько интерпретаций.

• Противоречие – положение, при котором одно высказывание исключает другое высказывание, логически несовместное с ним.

• Противоречие – утверждение о тождественном равенстве двух или более заведомо различных объектов.

• Антиномия – в классической традиционной логике – противоречие между двумя высказываниями одинаково логически доказуемыми.

Отметим, что антиномия является особым видом противоречия, постольку поскольку *возможна такая логическая ситуация*, при которой *логически выводимыми* являются, как доказательство самого утверждения, так и его опровержения.

К числу *неформальных* аксиом традиционной классической логики относится сформулированный в завершенном виде выдающимся математиком, философом и логиком Г.В. Лейбницем «**Принцип достаточного основания»** - принцип, требующий, чтобы в случае каждого утверждения указывались убедительные основания, в силу которых оно принимается и считается истинным. Обоснование теоретического утверждения, как правило, слагается *из целой серии процедур*, касающихся не только самого утверждения, но и той теории, составным элементом которой оно является.

В своих трудах Аристотель очерчивает рамки применимости закона о непротиворечии и закона об исключенном третьем. В его сочинениях отмечается, «*что законы непротиворечия и исключенного третьего не имеют силы в суждениях о будущем: если кто-нибудь утверждает, что что-либо случится в будущем, а другой отрицает это, то здесь нет логического противоречия, потому что, пока факт не совершился, возможно как то, так и другое, поскольку будущее не является необходимо детерминированным, оно зависит от случайностей, зависит и от воли людей, и от их поведения*».

Упомянутое выше мнение самого основоположника классической традиционной формальной логики о границах применимости закона о непротиворечии и закона об исключенном третьем *заслуживает самого серьезного внимания*. По существу дела аристотелевская классическая традиционная логика применима только при исследовании вопросов, происходящих в настоящем, или исследовании вопросов и явлений, имевших место в прошлом, к тому же при том обязательном условии, что имеется достоверная информация о соответствующих явлениях и событиях. Также предполагается, что существуют объективные критерии истинности, в соответствии с которыми можно достоверно оценивать истинность, либо ложность утверждений, связанных с исследуемыми явлениями и процессами.

Как известно, классическая математика занимается преимущественно изучением явлений и процессов, связанных с бесконечностью. Однако, по вполне понятным причинам, связанным с границами применимости классической аристотелевской традиционной логики, в классической математике при изучении свойств бесконечных величин и множеств, как правило избегали рассмотрения в явном виде зависимости изучаемых бесконечных величин от времени. Это можно объяснить тем, *что учет времени в явном виде, сразу же ставит под сомнение законность применения некоторых классических методов косвенного доказательства*, таких например, как метод доказательства от противного, который самым непосредственным образом связан со вторым и третьим основными законами классической аристотелевской традиционной логики, и часто применяется в тех случаях, когда на основании прямых методов доказательства не представляется возможным найти решение той или иной сложной проблемы.

Однако, в современной теоретико-множественной математике функция времени является совершенно законным и стандартным инструментом изучения явлений и процессов, связанных с бесконечностью. В основе понятия функции времени лежит множество $T \subseteq R$ с элементами t, называемое множеством моментов времени. Время обладает той характерной особенностью, что может быть упорядочено. Это означает, что если $t_1, t_2 \in T$ и $t_1 < t_2$, то момент времени t_1 предшествует моменту времени t_2. Иными словами, T является упорядоченным множеством.

Функция времени определяет отображение f множества моментов времени T на множество вещественных чисел R:

$$f : T \rightarrow R \tag{B.4}$$

Элементами f будут пары (t, x), обозначаемые также через $x(t)$, где $t \in T, x \in R$. Каждая такая пара определяет значение функции времени в момент t. Полная совокупность пар (t, x), т.е. значений $x(t)$ для всех $t \in T$, и представляет собой функцию времени.

Введение функции времени сразу же ставит вопрос о необходимости учета так называемых **A** и **B** логик времени, одна из которых ориентирована на временной ряд «прошлое-настоящее-будущее», а другая на временной ряд «раньше-одновременно-позже». Это обстоятельство, в свою очередь, означает выход за пределы классической аристотелевской традиционной логики.

В настоящей книге исследуются вопросы соотношения классической аристотелевской традиционной логики и современной классической формальной логики нулевого и первого порядков. Также, в рамках «Второй проблемы Гильберта», исследуется вопрос логических оснований классической теоретико-множественной математики и аксиоматической системы **PA&MI** выдающегося итальянского математика Джузеппе Пеано. В настоящей работе показано, что несмотря на то, что все формализуемые логические формулы классической аристотелевской традиционной логики являются истинными логическими формулами классической формальной логики нулевого порядка, тем не менее классическая формальная логика нулевого порядка в сильной степени отличается от классической аристотелевской логики в смысле однозначной выполнимости второго и третьего основных законов классической аристотелевской логики.

Проведенное в рамках настоящей работы исследование показывает, что современная классическая формальная логика нулевого порядка обладает гораздо более сильными доказательными возможностями по сравнению с аристотелевской традиционной логикой. В частности на основании методов классической формальной логики нулевого порядка удалось найти решения для некоторых классических логических парадоксов, логически адекватное решение которых представляется практически невозможным в рамках аристотелевской традиционной логики.

С другой стороны, детальный анализ известных теорем выдающегося австрийского логика Курта Геделя о неполноте формальных и полуформальных математических теорий, содержащих систему **PA&MI («Аксиоматическая система Пеано» с «Методом математической индукции»)** , показал, что сочетание аристотелевской традиционной логики с современной классической формальной логикой нулевого порядка, в ряде случаев, приводит к образованию логически трансцендентной формальной системы, где под логической трансценденцией понимается выход за пределы аристотелевской традиционной логики в смысле выполнимости второго и третьего основных законов аристотелевской логики.

Аналогичное положение имеет место и в основаниях теоретико-множественной математики, а именно, - сочетание «Аксиомы пустого множества», «Аксиомы регулярности» и «Аксиомы выбора», в сочетании с «Методом математической индукции», - является достаточным условием для образования логически трансцендентной по отношению к аристотелевской традиционной логике формальной логико-математической системы.

Приведенные в настоящей работе данные являются неопровержимым свидетельством о конструктивной осуществимости логического коллапса (тотального ослабления формальной истинности) и генезиса логической трансценденции на множестве унарных и бинарных логических операций в каждой логико-математической формальной или полуформальной теории, содержащей аристотелевскую традиционную логику, классическую формальную логику нулевого порядка, «Метод математической индукции» и «Аксиому выбора». Установлено, что в основаниях классической формальной логики нулевого порядка и классической теоретико-множественной математики, конструктивно существует трансцендентная логика, являющаяся логически инверсной по отношению к классической аристотелевской традиционной логике.

Совокупность аристотелевской и трансцендентных логик образует сингулярную формальную логику в основаниях классической теоретико-множественной математики, содержащей классическую формальную логику нулевого порядка, формальную логику первого порядка, «Метод математической индукции» и «Аксиому выбора», что по существу дела свидетельствует о логической трансцендентности оснований классической теоретико-множественной математики, содержащих «Аксиоматическую систему Пеано», «Метод математической индукции» и «Аксиому выбора».

Глава 1

Анализ и решения классических парадоксов традиционной логики

1.1 Решение парадокса «Тяжба Протагора и Эватла»

Разделяя мнение Аристотеля в отношении классической традиционной логики, согласно которому, при рассмотрении вопросов связанных с будущим, выполнимость второго и третьего основных законов классической традиционной логики не может быть гарантирована автоматически во всех рассматриваемых случаях, приведем в качестве примера логический анализ и решение известного древнегреческого софистического парадокса «Тяжба Протагора и Эватла», изобретенного в древнегреческой школе софистов, который как будет показано далее, основывается именно на том обстоятельстве, что включает в себя *договор Протагора с Эватлом, в котором описываются условия договора, которые должны быть выполнены в будущем.*

<u>Парадокс «Тяжба Протагора и Эватла»</u>

У древнегреческого софиста Протагора учился софистике, и в том числе судебному красноречию, некий Эватл. По заключенному между ними договору, Эватл должен был заплатить за обучение 10 тыс. драхм Протагору только в том случае, если выиграет свой первый судебный процесс. В случае проигрыша первого судебного дела, в соответствии с заключенным договором он вообще не обязан был платить.

Однако закончив обучение, Эватл не стал учавствовать в судебных тяжбах. Как следствие этого обстоятельства, он считал себя свободным от платы за учебу. Это длилось довольно долго, терпение Протагора иссякло, и он сам подал на своего ученика в суд. Таким образом должен был состояться первый судебный процесс Эватла.

Протагор привел следующую аргументацию: «Каким бы ни было решение суда, Эватл должен будет заплатить. Он либо выиграет свой судебный процесс, либо проиграет. Если выиграет, то заплатит по договору, если проиграет, то заплатит по решению суда.

Эватл возражал: «Ни в том, ни в другом случае я не должен платить. Если я выиграю, то я не должен платить по решению суда, если проиграю, то не заплачу по договору.

Для разрешения рассматриваемого парадокса постараемся логически четко сформулировать условия задачи, согласно которым:

1. Протагором подан иск против Эватла на указанную в договоре сумму в 10 тыс.драхм.

2. В случае выигрыша процесса Протагором, он получает указанную в договоре и иске сумму от Эватла.

3. В случае выигрыша дела Эватлом, он получает в качестве компенсации за моральный ущерб, указанную в иске сумму – 10 тыс. драхм от Протагора.

4. Судья не имеет права отклонить иск Протагора.

5.Судья обязан вынести решение, обеспечивающее непротиворечивость по отношению к условиям договора Протагора с Эватлом, в рамках одного судебного процесса.

6.Существует правовой механизм, обеспечивающий неукоснительное исполнение решения суда в соответствии с договором между Протагором и Эватлом.

Заметим, что хотя аргументация Эватла с точки зрения классической традиционной формальной логики, на первый взгляд, контрадикторно противоположна аргументации Протагора, однако обе аргументации касаются будущего, которое еще не наступило, поэтому в данном случае, в отношении аргументаций Протагора и Эватла, согласно подходу Аристотеля, закон о непротиворечии и закон исключенного третьего не имеют силы.

Указанное обстоятельство означает, что решение данного парадокса не связано с обязательным выполнением второго и третьего основного законов логики. В решении поставленной задачи мы обязаны лишь обеспечить непротиворечивость по отношению к договору Протагора с Эватлом с учетом условий (1) – (6), что как будет показано далее, является возможным, при условии применения *метода непротиворечивого урегулирования конфликтных ситуаций, который представляет собой способ разрешения конфликтной ситуации, путем удовлетворения условиям начального договора между конфликтующими сторонами (в случае принципиального наличия такой возможности)*.

Итак, рассмотрим вопрос, каково должно быть решение судьи, чтобы оно удовлетворяло бы условиям договора между Протагором и Эватлом. Судья должен вынести решение в пользу либо Протагора, либо Эватла. Что бы вынести решение в пользу Протагора надо иметь достаточные основания, а их нет, поскольку *первый процесс еще не завершен*. Если же тем не менее вынести решение в пользу Протагора, то сразу же после суда окажется, что решение суда противоречит условиям договора, поскольку Эватл свой первый процесс проиграл. Поэтому решение в пользу Протагора окажется необоснованным. Кроме этого, если вынести решение в пользу Протагора, то в этом случае Эватл не должен платить в силу договора, поскольку он проиграет свой первый процесс. Это означает, что Протагор не получит суммы в 10 тыс. драхм, поскольку Эватл не заплатит ему эту сумму в силу договора. Поэтому в этом случае возникает противоречие с условиями договора – Протагор, выиграв процесс, должен получить 10 тыс.драхм от Эватла, а Эватл не должен платить эти же самые деньги по договору. Ввиду невозможности исполнения решения суда это дело может быть вынесено на повторный судебный процесс, что нарушит условие 5.

Рассмотрим теперь второй из возможных вариантов – судья вынесет решение в пользу Эватла. В этом случае Протагор заплатит 10 тыс. драхм Эватлу по решению суда, а Эватл выплатит Протагору эти же 10 тыс. драхм по договору. Таким образом условия договора, а также условия (1) – (6) и возможность исполнения решения суда будут обеспечены. С учетом рассмотренных выше обстоятельств у судьи есть все основания вынести приговор в пользу Эватла.

Таким образом, в результате решения суда, Протагор *формально получит плату* от Эватла своими же собственными деньгами, *а реальных заработанных* на обучении Эватла денег *он не получит*. Эватл *формально уплатит* Протагору его же собственные деньги, а *реальных своих денег* за обучение *не заплатит*. Итак с формальной и реальной точки зрения *суд выиграет Эватл*, *Протагор дело в суде проиграет*, но по договору *формально получит свои собственные деньги* от Эватла, а на деле – *на обучении Эватла не заработает ничего*.

Теперь вернемся назад к аргументации Протагора и Эватла. С точки зрения судопроизводства, - аргументация Протагора *формально выполнена, а реально нет*. Аргументация Эватла *выполнена реально, а формально нет*. Это означает, что в отношении каждого из суждений Протагора и Эватла, с точки зрения классической традиционной формальной логики невыполнимы законы непротиворечия и исключенного третьего, поскольку с деловой и судебной точки зрения *реальная истина* противоположна *формальной истине*, т.е *реальная истина* на стороне аргументации Эватла, а *формальная истина* – на стороне аргументации Протагора, и несмотря на это, обе *«противоположные друг другу истины»* имеют место в действительности, причем на заключительном этапе судебного процесса с помощью применения *метода непротиворечивого урегулирования конфликтных ситуаций удается непротиворечиво выполнить* все условия договора между Протагором и Эватлом, а также условия (1) – (6).

Необходимо отметить, что исходя из условий договора, у Эватла имеется дополнительная возможность освободиться от обязанности оплатить свое обучение. Для этого ему достаточно, не дожидаясь начала судебного разбирательства, взяться за другой, какой либо заведомо проигрышный для него процесс, или же организовать фиктивное дело и фиктивный процесс с заранее предрешенным проигрышным результатом. В этом случае, он по окончании такого фиктивного и проигрышного судебного процесса, в соответствии с договором, фактически сразу же будет освобожден от уплаты денег Протагору. Таким образом, мы можем заключить, что договор между Протагором и Эватлом был составлен в ущерб интересам Протагора, и кроме этого, фактически позволяет Эватлу реализовать свое преимущество, невзирая на нарушение им моральных и этических норм в отношении своего учителя.

Из рассуждения, приведенного выше, следует, что решение данного парадокса выходит за рамки аристотелевской традиционной логики, вследствие наличия логико-временных элементов, не позволяющих в полной мере применить второй и третий законы аристотелевской традиционной логики. Необходимо отметить, что в приведенном нами логическом анализе и решении парадокса «Тяжба Протагора и Эватла», мы в неявной форме учитывали логико-временные аспекты рассматриваемой задачи. В частности, в неявной форме учитывался временной ряд «прошлое-настоящее-будущее», характерный для **А**-логики времени.

Из приведенного выше анализа парадокса «Тяжбы Протагора и Эватла» следует, что выполнение второго и третьего основных законов классической формальной логики *не является чем то самим собой разумеющимся*. Наоборот, исходя из «**Принципа достаточного основания»** следует, что в классических полуформальных математических теориях *необходимо иметь достаточно убедительные основания* для того, чтобы считать те или иные утверждения этой теории высказываниями, удовлетворяющими основным законам аристотелевской традиционной логики. Очевидно, что указанное обстоятельство предполагает предъявление более строгих требований к логической строгости классических математических доказательств, основанных на аристотелевской традиционной логике, которые заключаются в необходимости анализа логической структуры доказываемых логических утверждений и формул, и верификации их на соответствие основным законам аристотелевской логики. При систематическом игнорировании упомянутых требований, по мере развития той или иной конкретной классической математической полуформальной теории, с большой степенью вероятности следует ожидать появления в этой теории антиномий и недостоверных выводов, которые в свою очередь могут распространиться и на те области знания, в которых будут использоваться, полученные в упомянутой математической теории результаты.

1.2 Решение «Парадокса крокодила»

Традиция изобретать и выявлять парадоксы возникла и сохранилась в историческом развитии логики, как науки, вплоть до нового времени. Обычно парадоксы строятся на том, что логика входящих в них утверждений, отличается по своим логическим выразительным свойствам от логики обычных высказываний аристотелевской классической традиционной логики.

В настоящем параграфе мы предлагаем к рассмотрению вариант решения одного из известных парадоксов – «Парадокса крокодила», автором которого традиционно считается античный сицилийский софист Коракс. Вначале изложим суть парадокса.

Парадокс крокодила

«Крокодил выхватил у египтянки, стоявшей на берегу реки, ее ребенка. На ее мольбу вернуть ребенка, крокодил, пролив, как всегда, крокодилову слезу, ответил:

— Твое несчастье растрогало меня, и я дам тебе шанс получить назад ребенка. Угадай, отдам я его тебе или нет. Если ответишь правильно, я верну ребенка. Если не угадаешь, я его не отдам.

Подумав, мать ответила:

— Ты не отдашь мне ребенка.

— Ты его не получишь, — заключил крокодил. — Ты сказала либо правду, либо неправду. Если то, что я не отдам ребенка, — правда, я не отдам его, так как иначе сказанное не будет правдой. Если сказанное — неправда, значит, ты не угадала, и я не отдам ребенка по уговору.

Однако матери это рассуждение не показалось убедительным:

— Но ведь если я сказала правду, то ты отдашь мне ребенка, как мы и договорились. Если же я не угадала, что ты не отдашь ребенка, то ты должен мне его отдать, иначе сказанное мною не будет неправдой.

Кто прав: мать или крокодил? К чему обязывает крокодила данное им обещание? К тому, чтобы отдать ребенка или, напротив, чтобы не отдать его?»

Исследование «Парадокса крокодила» будем вести на основе современной классической формальной логики нулевого порядка. Далее приводятся необходимые базовые определения и правила упомянутой логической системы.

Базовыми понятиями логики высказываний нулевого порядка являются:

- Пропозициональная переменная – переменная, значением которой может быть логическое высказывание.

- Пропозициональная формула – определяется индуктивно следующим образом:

а) Если P – пропозициональная переменная, то P – формула;

б) Если A – формула, то ¬A – формула;

в) Если A и B формулы, то

$$(A \vee B) \qquad (A \wedge B) \tag{1.2.1}$$

$$\Rightarrow(A, B) \tag{1.2.2}$$

также формулы.

В формулах (1.2.1) на первом месте стоит дизъюнкция формул A и B, соответствующая логической связке «A или B». На втором месте стоит конъюнкция, соответствующая логической связке «A и B».

- В соответствии с правилами классической формальной логики нулевого порядка каждая формула может быть получена за конечное число шагов при помощи логических связок и базовых логических переменных.

- Знаки

$$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \tag{1.2.3}$$

обозначают отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию (логическое следование). Например ¬A означает отрицание высказывания A. Выражение (1.2.2) означает, что из высказывания A следует высказывание B. Импликация обозначается также A→B (A имплицирует B). Приведенные в выражении (1.2.3) знаки называются пропозициональными логическими связками.

- Подформулой называется часть формулы, сама являющаяся формулой. Собственной подформулой называется подформула, не совпадающая со всей формулой.

- Оценкой пропозициональных переменных называется логическая функция из множества всех пропозициональных переменных в множество истинностных значений {0,1}. *Основной задачей логики нулевого порядка является установление истинностного значения формулы, если определены истинностные значения входящих в нее переменных.* Истинностное значение формулы в таком случае определяется индуктивно, с шагами, которые использовались при построении формулы с использованием таблиц истинности связок.

Критерий доказуемости и недоказуемости формул классического формального исчисления высказываний

Пусть A – некоторая формула классического исчисления высказываний, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – перечень входящих в нее переменных. Вычислим $R_{a1,a2,..,an}(A)$ на множестве всех наборов значений a_1, $a_2, \ldots, a_n$ входящих в нее переменных. Если при этом $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$, на всех наборах a_1, $a_2, \ldots, a_n$, то формула A – тождественно истинная, *такая формула признается доказуемой*.

Если же существует набор значений переменных такой, что условие $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$ не выполняется , то формула A – не тождественно истинная, *такая формула признается недоказуемой.*

Критерий противоречивости и непротиворечивости формул классического исчисления высказываний

Пусть A – некоторая формула классического исчисления высказываний, а $x_1,x_2,\dots,x_n$ – перечень входящих в нее переменных. Вычислим $R_{a1,a2,..,an}(A)$ на множестве всех наборов значений $a_1, a_2,\dots,a_n$ входящих в нее переменных. Если при этом $R_{a1,a2,..,an}(A)=0$, на всех наборах $a_1, a_2,\dots,a_n$, то формула A – *признается формально тождественно противоречивой*.

Если же существует набор значений переменных такой, что условие $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$ выполняется хотя бы в одном случае из рассматриваемых, то формула A – *признается выполнимой и непротиворечивой.*

Определение глобальной формальной непротиворечивости логического исчисления высказываний

Логическое исчисление называется глобально формально непротиворечивым, если в нем не доказуемы никакие две внешние формулы, из которых одна является отрицанием другой. Иначе говоря, логическое исчисление называется глобально формально непротиворечивым, если в нем не существует такая внешняя формула A, что доказуема как формула A, так и формула $\neg A$. В противном случае логическое исчисление является глобально формально противоречивым.

Проблема глобальной формальной непротиворечивости заключается в выяснении вопроса: является данное исчисление непротиворечивым или нет? Если в исчислении обнаруживаются внешние доказуемые формулы вида A и $\neg A$, то такое исчисление является формально противоречивым.

Известна следующая, *логически неопровержимо* доказанная теорема.

Теорема о глобальной формальной непротиворечивости классического формального исчисления высказываний

Классическое формальное исчисление высказываний обладает свойством глобальной формальной непротиворечивости.

Сказанное выше означает, что моделирование тех или иных логических формул в рамках классической формальной логики нулевого порядка, в соответствии с правилами упомянутой теории, будет являться объективным и будет адекватно отражать логическую природу исследуемых с ее помощью логических формул.

Теперь приступим к логическому моделированию «Парадокса крокодила» в рамках классической формальной логики нулевого порядка.

Введем следующие обозначения. Пусть A – логическая формула:

$$A = \text{«крокодил вернет ребенка матери»} \tag{1.2.4}$$

Тогда:

$$\neg A = \text{«неверно, что крокодил вернет ребенка матери»} \tag{1.2.5}$$

Обозначим через В – формулу матери, содержащую утверждение о том, отпустит ли крокодил ее ребенка или нет. Тогда ⌐В – отрицание этой формулы.

Исходя из принятых выше обозначений и текста парадокса, условия крокодила моделируются следующими двумя формулами:

$$\Rightarrow(B = 1, A) \tag{1.2.6}$$

$$\Rightarrow(B \neq 1, \neg A) \tag{1.2.7}$$

Словесная интерпретация формулы (1.2.6) выглядит следующим образом: «если формула матери истинна, то крокодил вернет ребенка матери». Словесная интерпретация формулы (1.2.7) выглядит следующим образом: «если формула матери не является истинной, то неверно, что крокодил вернет ребенка матери». Таким образом из приведенных выше утверждений следует, что матерью ребенка должна быть сформулирована такая истинная, или хотя бы доказуемая логическая формула, которая вынуждает крокодила отдать ей ребенка в соответствии с его собственными условиями.

Определим логические кортежи значений истинности формул условий крокодила на множестве бинарных логических операций, определенных современной классической формальной логикой нулевого порядка, поскольку рассматриваемые формулы являются бинарными логическими формулами. В соответствии с принятыми в классической формальной логике правилами положим:

$$B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.2.8}$$

Формулы (1.2.8) обеспечивают рассмотрение конечного множества всех возможных конкретных комбинаций значений переменных В и А. Используя для вычисления логических кортежей значений истинности условий крокодила оператор логической векторизации, получим:

$$\overrightarrow{\Rightarrow(B = 1, A)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1.2.9)$$

$$\overrightarrow{\Rightarrow(B \neq 1, \neg A)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1.2.10)$$

Таким образом из формул (1.2.9) и (1.2.10) мы видим, что в соответствии с базовыми определениями классической логики нулевого порядка, крокодилом были выдвинуты выполнимые и непротиворечивые логические формулы, которые с другой стороны одновременно являются и недоказуемыми.

Необходимо отметить, что в соответствии с условиями парадокса у крокодила имеются значительные логические преимущества перед матерью ребенка. Это выражается в том, что у крокодила имеется возможность вариации логических связок, т.е. возможность свободного выбора в дизъюнкции и конъюнкции между формулами его условий, а также возможность неприменения логических связок между ними, поскольку в его собственных условиях это прямо не оговорено.

Исследуем теперь формулу матери, приведенную в тексте парадокса. По своей логической структуре она совпадает с формулой (1.2.5), т.е. мать ребенка выдвигает логическую формулу:

$$B = \neg A \qquad (1.2.11)$$

В этом случае у крокодила появляется возможность объявить, что формулы его условий подразумевают их конъюнкцию. Тогда на множестве бинарных логических операций получаем следующие формулы:

$$\overrightarrow{(\Rightarrow(B = 1, A) \wedge \Rightarrow(B \neq 1, \neg A))} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1.2.12)$$

$$\overrightarrow{(B = \neg A)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1.2.13)$$

Формула (1.2.12) представляет собой конъюнкцию логических формул условий крокодила. Формула (1.2.13) представляет собой логическую формулу матери ребенка.

В рассматриваемом случае аргументация крокодила имеет следующий вид.

Выдвинутая матерью логическая формула логически несовместна с условиями крокодила:

$$\overrightarrow{\left[\left(\left(\Rightarrow(B = 1, A) \wedge \Rightarrow(B \neq 1, \neg A)\right)\right) \wedge (B = \neg A)\right]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.2.14}$$

Поэтому в рассматриваемом случае у крокодила в соответствии с его собственными условиями появляются все основания не отдать ребенка матери. Таким образом *предлагаемое нами решение рассматриваемого парадокса заключается в том, что приведенная в нем логическая формула ответа матери в контексте конъюнкции формул условий крокодила оказывается формально-логически противоречивой, что в условиях отсутствия критерия материальной истинности является достаточным условием для отказа крокодила вернуть ребенка матери.*

Необходимо отметить, что некоторые приведенные выше логические формулы имеют существенные отличия от логических формул аристотелевской логики. В соответствии с основными законами аристотелевской логики, высказывание должно быть либо истинным, либо ложным, *третья возможность исключена*. Этого мы никак не можем утверждать в отношении логической формулы крокодила и логической формулы матери, поскольку утверждения об их истинности или ложности оказываются недоказуемыми:

$$\overrightarrow{\left(\Rightarrow(B = 1, A) = 1\right)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\left(\Rightarrow(B = 1, A) = 0\right)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.2.15}$$

$$\overrightarrow{\left(\Rightarrow(B \neq 1, \neg A) = 1\right)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\left(\Rightarrow(B \neq 1, \neg A) = 0\right)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.2.16}$$

По нашему мнению, приведенное выше исследование логической структуры «Парадокса крокодила» свидетельствует о возможности реконструкции и моделирования софистической логической техники в рамках классической формальной логики нулевого порядка, что может представлять определенный интерес с точки зрения вопросов исследования античных софистических философских и логических традиций, а также их философских и логических архетипов в некоторых классических формальных и полуформальных логических и математических теориях нового времени.

1.3 Логический анализ «Парадокса лжеца»

«Парадокс лжеца» является одним из наиболее известных древнегреческих античных софистических парадоксов. Согласно историческим сведениям, его автором является представитель античной мегарской философской школы Евбулид. Наиболее сильная форма «Парадокса лжеца» выражается следующей фразой – «То, что я утверждаю сейчас, ложно».

Стандартное интуитивное рассуждение о «Парадоксе лжеца» утверждает, что если содержащееся в «Парадоксе лжеца» суждение истинно, то оно ложно, а если оно ложно, то оно является истинным, следовательно оно противоречит закону исключенного третьего. Считается, что предложение такого рода принципиально не может быть ни доказано, ни опровергнуто в пределах того языка на котором оно изложено.

В настоящей работе на основе современной классической формальной логики нулевого порядка предлагаются варианты формализации «Парадокса лжеца», а также некоторых его разновидностей. Необходимо отметить, что современная классическая формальная логика нулевого порядка обладает тем достоинством, что ее глобальная непротиворечивость доказана (доказательство принадлежит выдающемуся австрийскому логику Курту Геделю). Это означает, что в рамках упомянутой системы не могут быть выведены две внешние одновременно тождественно доказуемые и взаимно контрадикторные логические формулы F и $\neg F$. Кроме этого в рамках современной классической логики нулевого порядка могут быть также формализованы утверждения, которые по своим логическим свойствам отличаются от высказываний классической формальной аристотелевской логики в смысле однозначной выполнимости закона исключенного третьего.

В классической формальной логике нулевого порядка логическая структура формул на множестве унарных логических операций имеет следующий вид:

Таблица 1. Таблица унарных логических операций

Унарные логические операции				
x	**g1(x)Ξ(¬)**	**g2x Ξ(=)**	**g3(1) Ξ (1)**	**g4(0)Ξ (0)**
0	**1**	**0**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**1**	**0**

В **Таблице 1** унарных операций приняты следующие обозначения: **x** – логическая переменная, **g1(x)** – функция отрицания (негации), **g2(x)** – функция тождества, **g3(1)** – тождественная функция логической единицы, **g4(0)** – тождественная функция логического нуля. **0** и **1** — логические, тождественные нуль и единица соответственно.

Прежде чем перейти к формализации утверждения, содержащегося в «Парадоксе лжеца», необходимо уточнить, что в данном случае следует принять за критерий истинности. Из самого текста «Парадокса лжеца» следует, что упомянутое утверждение не содержит информации о внешних явлениях или событиях. Поэтому *«материальный критерий истинности»* по Аристотелю в данном случае отсутствует, поскольку отсутствует возможность сравнения высказываемого утверждения с объективной реальностью. Таким образом остается лишь «формальный критерий истинности». В соответствии с формальным критерием истинности классической формальной логики нулевого порядка, формально тождественно ложной считается тождественно противоречивая формула. В иных случаях логическая формула считается непротиворечивой.

Задача исследования логической структуры «Парадокса лжеца» заключается в установлении логического кортежа истинности, содержащегося в нем утверждения, на множестве унарных логических операций. Формула утверждения, содержащегося в «Парадоксе лжеца», имеет следующий вид:

$$L=0 \tag{1.3.1}$$

где **0** – логический символ тождественного противоречия.

Применяя правила **Таблицы 1** для рассматриваемого случая, а также оператор логической векторизации вычислительной логической программы математического вычислительного пакета **MATCAD** , для случая, когда логическая переменная L может принимать любые допустимые значения (**0** или **1**) из области своего определения, получим:

$$\overrightarrow{(L = 0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.3.2}$$

Из формулы (1.3.2) следует, что в рассматриваемом случае, логическая формула утверждения, содержащегося в «Парадоксе лжеца» является непротиворечивой, и вместе с этим недоказуемой.

Из приведенного выше анализа рассматриваемой формы «Парадоксе лжеца» следует, что действительно, существуют такие логические утверждения и формулы, которые не являются аристотелевскими высказываниями. Поэтому соответствие той или иной логической формулы законам аристотелевской традиционной логики должно быть должным образом обосновано.

Разновидностью «Парадокса лжеца» считается также «Парадокс Платона и Сократа», заключающийся в следующем. Платон: «Следующее высказывание Сократа будет ложным». Сократ: «То, что сказал Платон, истинно».

Ниже мы увидим, что по своей логической структуре «Парадокс Платона и Сократа» отличается от основной версии «Парадокса лжеца» тем, что содержит в себе две логические переменные. Поэтому его моделирование должно осуществляться на множестве бинарных логических операций. Введем следующие обозначения:

$$P := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad S := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.3.3}$$

В формулах (1.3.3), P – логический кортеж области определения истинностных значений для утверждения Платона. S – логический кортеж области определения возможных истинностных значений для утверждения Сократа. Формулы (1.3.3) отражают всевозможные комбинации сочетаний формальной истинности на множестве бинарных логических операций для потенциальных утверждений Платона и Сократа в условиях отсутствия материального критерия истинности.

Формализуем утверждение Платона о ложности утверждения Сократа и найдем для него логический кортеж истинностных значений:

$$\overrightarrow{[P = (S = 0)]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.3.4}$$

Формализуем утверждениye Сократа об истинности утверждения Платона и найдем для него логический кортеж истинностных значений:

$$\overrightarrow{[[P = (S = 0)] = 1]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.3.5}$$

Как следует из формул (1.3.4) и (1.3.5) утверждения Платона и Сократа с точки зрения современной классической формальной логики нулевого порядка являются непротиворечивыми, хотя и недоказуемыми, и согласно (1.3.6) *формально логически тождественны друг другу*:

$$\overrightarrow{[[P = (S = 0)] = [[P = (S = 0)] = 1]]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.3.6}$$

Еще одной формой «Парадокса лжеца» является «Парадокс Эпименида» который заключается в следующем. Эпименид, будучи критянином, сказал: «Все критяне лжецы». Требуется определить высказал ли он правду, или солгал?

Необходимо отметить, что в отношении всех других критян, кроме него самого, это утверждение Эпименида *является недоказуемым*, поскольку не приведено ни одного их высказывания, следовательно *не имеется и достаточных оснований для определенного утверждения* об их истинности или ложности. Однако остается утверждение Эпименида о самом себе в третьем лице, как о критянине, являющемся лжецом. В современной формальной классической логике нулевого порядка утверждение Эпименида о собственной ложности моделируется следующей логической формулой:

$$E=(E=0) \tag{1.3.7}$$

Анализ формулы (1.3.7) на множестве унарных логических операций показывает,что формула (1.3.7) является тождественно противоречивой:

$$\overrightarrow{[E = (E = 0)]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.3.8)$$

Таким образом формула (1.3.8) позволяет нам утверждать, что утверждение Эпименида *содержит тождественно противоречивую логическую формулу* по отношению к нему самому. В отношении же его утверждения по отношению к другим критянам можно сделать вывод, что высказанная им логическая формула является недоказуемой *по причине отсутствия достаточных оснований*.

Из приведенного выше анализа различных форм «Парадокса лжеца» следует, что рассмотренные формы имеют отличающуюся друг от друга структуру, при этом только в «Парадоксе Эпименида» содержится тождественно противоречивая формула утверждения Эпименида о собственной ложности. Логические формулы первых двух рассмотренных вариантов «Парадокса лжеца» являются недоказуемыми и вместе с тем непротиворечивыми. Именно этим логические формулы, содержащиеся в первых двух формах «Парадокса лжеца» отличаются от высказываний аристотелевской традиционной логики, для которых выполнение закона исключенного третьего является обязательным. Таким образом, мы видим, что софистическая техника логических построений может быть формализована в рамках современной формальной логики нулевого порядка, что в определенной степени может служить обоснованием логико-философской концепции софистов в условиях паранепротиворечивых логических рассуждений.

1.4 Решение «Парадокса брадобрея»

Одним из центральных положений классической традиционной аристотелевской логики является аристотелевское понимание закона о непротиворечии, который регулирует логические отношения между контрадикторными высказываниями. Отметим, что логика Аристотеля принимает два критерия истины: материальный (согласие мыслей с вещами) и формальный (согласие мыслей между собой), причем господствующим (доминирующим) критерием в ней является материальный.

Рассмотрим учение Аристотеля об истине и законах мышления. Аристотель принимает истину в широком и в узком смысле. Истина в узком значении есть истина суждения. По Аристотелю, истина и ложь, строго говоря, относятся только к соединению и разъединению представлений и понятий. Наши суждения материально истинны или ложны в зависимости от того, соответствует ли совершаемое в них соединение или разъединение представлений и понятий самой действительности. Что же касается отдельных изолированных предметов мысли, то сами по себе они еще не истинны и не ложны.

Такое понятие истины основывается на предположении, что предмет мысли (представление или понятие) сравнивается с реальным объектом, отображением которого он является, и в качестве истинного признается то представление или понятие, которое адекватно отражает то, что существует в действительности. Мыслимое является материально ложным в том случае, если ему или вообще не соответствует ничего в действительности, или если соответствующий реальный предмет в нем отображен неверно. Это — материальная ложность, и она заключается в несоответствии мыслимого реальным объектам. Другой вид ложности — ложность суждения. По Аристотелю, одна из форм ложных суждений заключается в том, что несуществующее высказывается, как существующее, или наоборот – существующее высказывается, как несуществующее.

Основным законом мышления у Аристотеля является закон непротиворечия. Аристотель называет этот закон самым неоспоримым принципом. Аристотель дает несколько формулировок этого закона. Одна из формулировок гласит: «Невозможно, чтобы одно и то же, в одно и то же время, и в одном и том же отношении, и было и не было присуще одному и тому же». Наряду с этой развернутой формулировкой дается краткая онтологическая формула: «Невозможно, чтобы одно и то же, в одно и то же время, было и не было».

В качестве достовернейших положений у Аристотеля приводятся также следующие формулировки закона о непротиворечии: «Невозможно, чтобы одновременно были истинными противоположные суждения», или: «Невозможно, чтобы противоречащие утверждения были истинными по отношению к одному и тому же» . Аристотелем даются и сокращенные логические формулы: «Невозможно вместе истинно и утверждать и отрицать» или: «Невозможно вместе утверждать и отрицать».

По Аристотелю высказывание (а) определяет одно понятие (а) и, следовательно, одновременно с ним возникает двойственное ему понятие – (не-а). Основная формула закона непротиворечия такова: «а не есть не-а». Смысл законов непротиворечия и тождества в этом аспекте таков: «а не может иметь тот же самый смысл, какой имеет то, что по своей сущности не есть а», следовательно, «а есть а и поэтому не- а есть не-а».

Перейдем к учению Аристотеля о законе исключенного третьего. Основная формулировка его у Аристотеля такова: «Равным образом не может быть ничего посередине между двумя противоречащими друг другу суждениями, но об одном одно необходимо либо утверждать, либо отрицать».

Отношение между двумя законами — законом непротиворечия и законом исключенного третьего, — по Аристотелю, таково: отрицание закона непротиворечия имеет своим необходимым следствием отрицание закона исключенного третьего. Закон непротиворечия есть необходимая предпосылка закона исключенного третьего.

В соответствии с основными законами логики у Аристотеля дается учение об истине. По Аристотелю истина и ложь находятся в контрадикторной противоположности. По самому определению этих понятий ложность есть отрицание истины, а истинность — отрицание ложности. Положение о контрадикторной противоположности истины и лжи служит у Аристотеля предпосылкой доказательства закона исключенного третьего.

С основными законами логики у Аристотеля неразрывно связано его учение о суждении. Согласно Аристотелю, суждение есть синтез представлений. Этот синтез есть субъективная деятельность мышления, которая на основе предшествующего анализа ставит разъединенные элементы суждения в те или иные логические отношения, соответственно их природе и отображаемой действительности. Такой же субъективной деятельностью мышления является и диайрезис, т. е. умственный анализ. И в утвердительном суждении единая мысль разлагается на свои элементы. В отношении понятий разложение совершается посредством деления. Диайрезис и синтез суть два момента, которые постоянно должны взаимодействовать, и их взаимодействие делает возможным тот психический процесс, заключительным результатом которого является логическое утверждение или отрицание.

Теперь рассмотрим онтологическое содержание суждения. По Аристотелю субъективное мышление (психологическая сторона суждения) есть единственный возможный источник заблуждений и ложности суждений. Реальной же основой истинности является прежде всего само объективное бытие и лишь во вторую очередь субъективное мышление. Формальные противоречия могут возникать на стадии аналитико-синтетической деятельности, которая перерабатывает мыслительный материал в суждение.

Согласно Аристотелю, формальные истина и ложь субъективны уже постольку, поскольку они суть свойства психических процессов. Но, с другой стороны, понятие материальной истины у Аристотеля объективно и реалистично. Суждение, по учению Аристотеля, истинно лишь тогда, когда отношения совместного или раздельного бытия двух содержаний мысли, установленные в субъективном движении мышления, суть адекватные отображения реальных отношений.

Истинно то утвердительное суждение, которое соответствует реальному совмещению, и истинно то отрицательное суждение, которое соответствует реальной раздельности. И если отрицательное суждение иногда трактуется, как отрицание ложного утвердительного, то и это отрицание должно покоиться на реальном базисе, на действительной раздельности в самом реальном бытии.

Суждение Аристотель обозначает термином «апофансис», что значит «обнаруживаю», «открываю», «выражаю». По определению, - суждение есть высказывание о присущности или неприсущности чего-либо чему-либо, и является особым видом речи, а именно такой речью, в которой находит свое выражение истина либо ложь.

Согласно аристотелевской логике, принимаемые ей суждения, о которых можно однозначно утверждать, что они либо истинны, либо ложны, можно выделить в отдельную категорию и называть их высказываниями. Таким образом высказывания – это такие суждения, которые удовлетворяют первым трем основным законам логики – закону тождества, закону о непротиворечии и закону об исключенном третьем. Четвертым основным законом классической традиционной аристотелевской логики является **«Принцип достаточного основания»**, окончательно сформулированный Г.В.Лейбницем в 17 веке.

Необходимо отметить, что конструктивно существуют утверждения и логические формулы, не являющиеся аристотелевскими высказываниями, т.е. существуют утверждения и логические формулы в отношении которых не выполняются законы о непротиворечии и исключенного третьего.

На основании основных законов аристотелевской традиционной логики во многих случаях можно установить являются те или иные утверждения высказываниями или нет. Необходимым и достаточным условием того, что рассматриваемое утверждение является высказыванием, является полное соответствие его первым трем основным законам логики. В этом, и только в этом случае, на основании **«Принципа достаточного основания»**, такое утверждение можно считать высказыванием. Для этого необходимо и достаточно показать, что рассматриваемое утверждение логически равно самому себе, что оно логически не равно своему отрицанию и в отношении него можно однозначно утверждать, что оно либо истинно, либо ложно, а *третья возможность исключена*.

Необходимо отметить, что в том случае, если не представляется возможным достоверно и однозначно установить, что рассматриваемое утверждение удовлетворяет первым трем основным законам логики, то в силу **«Принципа достаточного основания»** следует сделать заключение, что не имеется достаточных оснований причислить данное утверждение к классу аристотелевских высказываний. В этом случае рассматриваемое утверждение *не подлежит дальнейшему рассмотрению в рамках традиционной аристотелевской классической логики*.

Перейдем теперь к анализу эффективности законов аристотелевской классической традиционной логики и аристотелевских критериев материальной и формальной истины на примере моделирования «Парадокса Рассела» в одной его популярной форме. Необходимо отметить, что в свое время, теоретико—множественная форма упомянутого парадокса, автором которого является выдающийся математик, логик и философ конца 19-го и первой половины 20 века – Бертран Рассел, произвел весьма сильное впечатление на математическую общественность того времени, и даже, по сути дела, явилась косвенной причиной раскола некоторых математических школ на различные логико-математические направления.

<u>«Парадокс брадобрея»</u>

Одной из версий парадокса Рассела является парадокс деревенского брадобрея, согласно которому одному деревенскому брадобрею приказали «брить каждого жителя деревни, кто сам не бреется, и не брить того жителя деревни, кто сам бреется». Как он должен поступить с собой?

Стандартное интуитивное рассуждение об изложенном выше «Парадоксе брадобрея» (предложенное самим Бертраном Расселом) имеет следующий вид: «если деревенский брадобрей не бреется, то он должен брить себя , и, если он бреется , то он не должен брить себя». Нетрудно заметить, что в результате этого рассуждения мы приходим к противоречию. В приведенном выше рассуждении *по умолчанию предполагается*, что деревенский брадобрей является жителем той деревни в которой он работает, несмотря на то, что информация об этом непосредственно *не содержится в тексте парадокса*. Представляет интерес то обстоятельство, что как будет показано далее, именно это рассуждение Рассела, традиционно считающееся составной частью данного парадокса, *и «делает его парадоксальным»*.

Постараемся формализовать условия «Парадокса брадобрея» на множестве бинарных логических операций, методами современной классической формальной логики нулевого порядка, с целью установить, по каким причинам и на каком этапе формулирования условий рассматриваемого парадокса возникает «логически парадоксальная ситуация».

Пусть А есть утверждение: «Житель деревни бреется сам». Тогда отрицание этого утверждения ⌐A имеет следующий вид: «Неверно, что житель деревни бреется сам». Обозначим через В утверждение: «Брадобрей бреет жителя деревни». Тогда отрицание этого утверждения ⌐B имеет следующий вид: «Неверно, что брадобрей бреет жителя деревни». *Заметим, что в начальных условиях парадокса не содержится никакой информации о том, является ли брадобрей жителем деревни или нет. Поэтому в целях адекватного логического моделирования рассматриваемого парадокса необходимо рассмотреть обе эти возможности.* Обозначим через С утверждение: «Брадобрей является жителем деревни в которой он работает». Тогда отрицание этого утверждения ⌐C имеет следующий вид:«Неверно, что брадобрей является жителем деревни в которой он работает».

Необходимо отметить, что в соответствии с традиционной классической логикой Аристотеля, в целях адекватного рассмотрения данной логической задачи, следует определить материальный и формальный критерии истинности. В соответствии с начальными условиями парадокса, под материальным и формальным критерием истинности в данном случае мы будем понимать непротиворечивое выполнение «приказа» деревенскому брадобрею. Это означает, что мы постараемся построить такую логически и физически выполнимую модель решения парадокса, которая с одной стороны не будет противоречить начальным условиям парадокса, а с другой стороны будет соответствовать законам классической традиционной аристотелевской логики. По нашему мнению, именно такая стратегия нахождения логического решения соответствует аристотелевскому пониманию закона о непротиворечии, поскольку закон о непротиворечии, как раз и выражает стремление избежать противоречия в рассуждениях, связанных с восприятием объективной реальности.

Согласно принятым выше обозначениям, языковая интерпретация формальной модели условий парадокса имеет следующий вид:

«Если житель деревни бреется сам, то неверно, что брадобрей бреет жителя деревни, и, если неверно, что житель деревни бреется сам, то брадобрей бреет жителя деревни».

В принятых символических обозначениях рассмотренная языковая интерпретация имеет следующий вид:

«Если А,то ⌐B,и, если ⌐A, то В» **(**1.4.1**)**

Вычислим логические кортежи значений истинности формулы условия «Парадокса брадобрея» на множестве бинарных логических операций, определенных современной классической формальной логикой нулевого порядка. В соответствии с принятыми на множестве бинарных логических операций правилами положим:

$$A := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1.4.2)$$

$$B := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1.4.3)$$

Тогда вектор истинностных значений логической формулы (1.4.1) примет следующий вид:

$$\overrightarrow{\left[\left(\Rightarrow(A, \neg B)\right) \wedge \left(\Rightarrow(\neg A, B)\right)\right]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1.4.4)$$

Из (1.4.4) в соответствии с правилами классической формальной логики нулевого порядка следует, что основное условие «Парадокса брадобрея» выражается непротиворечивой логической формулой.

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о том, может ли являться по условиям задачи деревенский брадобрей жителем той деревни в которой он работает. Вначале рассмотрим первую из двух возможностей, определяемую логическим утверждением С, а именно: «Брадобрей является жителем деревни в которой он работает». В этом случае утверждение А приобретает следующий вид: «Брадобрей бреется сам». Утверждение В при этом принимает следующий вид: «Брадобрей бреет брадобрея». Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае одного брадобрея утверждения А и В оказываются логически эквивалентными друг другу:

$$\Leftrightarrow(\mathrm{A},\mathrm{B}) \qquad (1.4.5)$$

Условие (1.4.5) является дополнительным к формуле условия рассматриваемого парадокса, поэтому оно должно рассматриваться совместно с формулой (1.4.4) на условиях их конъюнкции:

$$\overrightarrow{[[(\Rightarrow(\mathrm{A},\neg\mathrm{B})) \wedge (\Rightarrow(\neg\mathrm{A},\mathrm{B}))]] \wedge (\Leftrightarrow(\mathrm{A},\mathrm{B}))]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1.4.6)$$

Из формулы (1.4.6) следует,что дополнительное условие (1.4.5) приводит к тождественному противоречию. *Это означает, что именно допущение о том, что деревенский брадобрей является жителем той деревни, в которой он работает, приводит к противоречию.*

Рассмотрим теперь вторую возможность, выражаемую логическим утверждением $\neg$C а именно: «Неверно, что брадобрей является жителем деревни в которой он работает». Необходимо отметить, что эта возможность является осуществимой – брадобрей, работающий в данной деревне, может быть жителем другой близлежайшей деревни или города, что не противоречит условиям «Парадокса брадобрея». Кроме этого в рассматриваемом случае противоречия не возникает, поскольку брадобрей может непротиворечиво выполнять приказ в отношении жителей деревни. Что же касается его самого, то он в отношении себя имеет свободу выбора, поскольку упомянутый приказ вовсе не относится к нему, так как он не является жителем той деревни в которой работает. *Поэтому брадобрей может брить себя, не вступая в противоречие с условиями приказа.* Это и является предлагаемым решением рассматриваемой популярной версии «Парадокса брадобрея».

Приведем сравнительный анализ логических особенностей рассмотренной популярной версии «Парадокса Рассела» с классической традиционной аристотелевской логикой. Во-первых, следует отметить, что основное логическое условие рассмотренной версии «Парадокса брадобрея, выражается формулой (1.4.4), логическая структура которой отличается от логической структуры высказываний аристотелевской логики в смысле выполнимости закона исключенного третьего. Конъюнкция дополнительного условия (1.4.5) с условием (1.4.4), приводит к тождественному противоречию (1.4.6), как с точки зрения современной классической формальной логики нулевого порядка, так и классической традиционной аристотелевской логики. Поэтому в качестве решения рассматриваемого парадокса нами выбрано такое логически осуществимое решение, которое не противоречит основному условию рассматриваемой версии «Парадокса брадобрея», заключающееся в том, что *деревенский брадобрей не является жителем той деревни в которой* *работает*. Таким образом, в рассматриваемом случае, именно аристотелевское понимание логического закона о непротиворечии, основывающееся на стремлении избежать противоречия в рассуждениях, путем сравнения тех или иных суждений с объективной реальностью, позволило нам найти непротиворечивое решение рассмотренного парадокса.

1.5 Решение «Парадокса мэра городов»

Понятие пустого множества является одним из основных понятий теории классов и множеств. Пустым множеством называется такой класс, который не содержит ни одного элемента. Пустое множество обозначается символом Ø. В теории классов пустое множество является аналогом арифметического 0 множества действительных чисел. По определению существует только одно пустое множество. Формула A= Ø означает, что множество A не имеет ни одного элемента, что оно пусто, что оно «исчезает». Если не вводить понятия пустого множества, то при определении того или иного конкретного класса C пришлось бы часто делать оговорку: если он существует. Это происходит из-за того, что часто элементы класса определены так, что заранее бывает неизвестно, существуют они или нет.

Понятие пустого множества является эффективным средством решения некоторых классических парадоксов теории множеств. В качестве одного из таких парадоксов, ниже будет рассмотрена одна из популярных версий «Парадокса Рассела» в форме «Парадокса мэра городов». Ниже приведена формулировка «Парадокса мэра городов».

«Парадокс мэра городов»

В одной стране был издан указ: «Мэры городов должны жить не в том городе, где они являются мэрами, а в специальном городе мэров». Вопрос заключается в следующем – где должен жить мэр города мэров?

Решение данного парадокса сводится к рассмотрению вопроса о существовании мэра города мэров. Вначале рассмотрим одну из двух возможностей: мэр города мэров был избран. В этом случае возникает противоречие – мэр города мэров должен жить в городе мэров, мэром которого он является, что по условию задачи логически невозможно.

Вторая возможность основана на аристотелевском понимании закона о непротиворечии, которое заключается в стремлении избежать противоречий в рассуждениях, а также понятии пустого множества: *мэр города мэров не может быть избран,* - *«кресло мэра городов – пусто». В этом случае городом управляет совет мэров городов. Отметим, что это решение является осуществимым и не противоречит условиям парадокса.*

Глава 2

Анализ феномена логической трансценденции

в основаниях классической теории множеств

2.1 О формально-логической и теоретико-множественной системе INCOL&TAMLA

В настоящем параграфе представлено общее описание трансцендентной формально-логической и теоретико-множественной системы **INCOL&TAMLA** и некоторых, полученных на ее основе результатах. При этом под формально-логической трансценденцией (от лат. transcendentis – перешагивающий, выходящий за пределы) понимается выход за пределы классической аристотелевской традиционной логики, наблюдаемый конструктивно и доказуемый логически в рамках современной глобально непротиворечивой классической формальной логики нулевого и первого порядка. Как известно, в современной классической формальной логике нулевого порядка основные логические законы, получаемые в пределах классической аристотелевской традиционной логики, являются тождественно-истинными логическими формулами. Известно также, что глобальная формально-логическая непротиворечивость классической формальной логики нулевого порядка неопровержимо доказана выдающимся австрийским логиком и математиком Куртом Геделем и не подлежит сомнению. Однако, с другой стороны, исследование логических свойств классической формальной логики нулевого порядка показало, что несмотря на это обстоятельство, в ней существуют и такие логические утверждения и логические формулы, которые хотя и не отрицают прямо закон о непротиворечии и закон исключенного третьего, однако в сильной степени отличаются от классических аристотелевских высказываний в смысле однозначного соответствия их законам о непротиворечии и исключенного третьего. Упомянутые логические утверждения и логические формулы классической формальной логики нулевого порядка были названы логически трансцендентными. Система **INCOL&TAMLA** разработана для эффективного исследования именно трансцендентных формально-логических и логико-аналитических формул в различных формальных и полуформальных математических теориях.

В рамках международного научно-технического общества **«INCOL»**, группа специалистов под руководством израильского ученого, работающего в области формальной логики, теории множеств, прикладной математики и механики - Александра Ахвледиани, - успешно завершила многолетнюю работу по созданию и применению трансцендентной многоуровневой формально-логической и теоретико-множественной математической системы **INCOL&TAMLA («Incolumitas & Transcendent Multilevel Logical Analysis»)**. Слово incolumitas на латыни обозначает безопасность. Тем самым, в названии упомянутой логико-математической и теоретико-множественной системы **INCOL&TAMLA** подчеркивается, что знание трансцендентных логических свойств формальной классической логики нулевого порядка, позволяет содействовать логически безопасному ее применению в той или иной формальной или полуформальной математической теории, что не может быть гарантировано при стандартном ее использовании.

Логическим ядром упомянутой логико-математической технологии является «ноу-хау», сформулированное и обоснованное в 1990 году совместно Александром и Нодаром Ахвледиани в виде «Принципов логико-математической трансценденции». В течении последующих 20 лет, Александром Ахвледиани на основе упомянутых принципов, были осуществлены многочисленные логико-математические, научно-технические, мультидисциплинарные и логико-философские исследования, которые привели к разработке логически трансцендентной теоретико-множественной логико-математической системы **INCOL&TAMLA**.

Одним из первых, кто логически и математически строго показал существование слабо трансцендентных логических формул в достаточно богатых формальных и полуформальных математических теориях, содержащих аксиоматику Пеано, был выдающийся австрийский логик Курт Гедель. Для упомянутых выше теорий было показано существование в них таких логических формул F и ⌐F, что не представляется возможным доказать или опровергнуть ни одну из формул F или ⌐F, при условии, что упомянутые выше теории логически непротиворечивы. Этим самым Куртом Геделем было показано существование в этих теориях таких трансцендентных логических формул F и ⌐F, которые с одной стороны хотя и не отрицают закона об исключенном третьем, но с другой стороны и не удовлетворяют ему. При этом «Первая теорема Геделя» в интерпретации системы **INCOL&TAMLA** означает, что если достаточно богатая формальная или полуформальная математическая теория, содержащая аксиоматику Пеано, является непротиворечивой, то в ней согласно теории Курта Геделя существуют трансцендентные логические формулы F и ⌐F.

Известно, что глобальная формально-логическая непротиворечивость классической формальной логики нулевого порядка установлена Куртом Геделем. Глобальная формально-логическая непротиворечивость классической формальной логики нулевого порядка означает, что в ней невыводимы две такие тождественно доказуемые логические формулы, которые вместе с тем отрицали бы друг друга. Однако, тем не менее, в рамках формально-логической и теоретико-множественной системы **INCOL&TAMLA** удалось существенно развить теорию Курта Геделя, в том смысле, что было доказано существование в самой формально-логически непротиворечивой классической формальной логике нулевого порядка существование таких логически сильно трансцендентных утверждений и формул этой теории A и ⌐A, что по отдельности логически непротиворечиво выводимо, как A так и ⌐A. Необходимо отметить,что при доказательстве существования сильно трансцендентных утверждений A и ⌐A не был использован логический закон Дунса Скота, согласно которому из тождественно противоречивой формулы выводима любая формула, в том числе и противоречие вида A&¬A. Наоборот, представленное в рамках **INCOL&TAMLA** формально-логическое доказательство сильной трансцендентности утверждений A и ¬A, подразумевает именно непротиворечивый формальный логический вывод, не содержащий в себе тождественно противоречивых формул.

В основе приведенных выше результатов лежат «**Принципы логико-математической трансценденции**», первый из которых был сформулирован и доказан совместно Александром и Нодаром Ахвледиани в 1990 году. «**Принципы логико-математической трансценденции**» включают в себя следующие четыре утверждения, которые были формально логически строго доказаны в рамках классической формальной логики нулевого порядка, как теоремы, причем без применения косвенных методов доказательства и логического закона Дунса Скота.

Первый принцип логико-математической трансценденции

В классической формальной логике нулевого порядка существуют такие логически сильно трансцендентные утверждения и формулы A и ¬A, что по отдельности логически непротиворечиво выводимо, как A так и ¬A.

Второй принцип логико-математической трансценденции

В классической формальной логике нулевого порядка конструктивно существует логически инверсное хаусдорфово общее топологическое логическое пространство, в котором множество логических законов классической аристотелевской логики высказываний является лишь его собственным подклассом, а кроме него в упомянутом общем топологическом логическом пространстве, в качестве собственного подкласса содержится также и класс слабо и сильно трансцендентных логических утверждений и формул.

Третий принцип логико-математической трансценденции

В классической формальной логике нулевого порядка конструктивно существует логически инверсное хаусдорфово общее топологическое логическое пространство, содержащее локальные, внешне формально непротиворечивые логические подпространства формального классического исчисления Гильберта, внутри которых выводимы предельно трансцендентные логические формулы, эквивалентные отрицанию закона о непротиворечии и закона об исключенном третьем.

Четвертый принцип логико-математической трансценденции

Каждая, достаточно богатая формальная или полуформальная математическая теория, содержащая классическую формальную логику нулевого порядка, теорию рациональных чисел, определение бесконечно большой величины и определение взаимно однозначного соответствия классов или множеств (в том числе и бесконечных), содержит такие логически сильно трансцендентные

логико-математические утверждения А и ⌐А, что по отдельности, формально логически и аналитически выводимо, как утверждение А, так и утверждение ⌐А.

В настоящее время система **«INCOL&TAMLA»** позволяет эффективно осуществлять многоуровневые мультидисциплинарные и междисциплинарные исследования в различных областях науки и техники с учетом особенностей классической аристотелевской силлогистики, аристотелевской классической формальной логики, современной классической логики нулевого порядка, современной классической логики первого порядка, а также булевой алгебры.

На основе логико-математической системы **«INCOL&TAMLA»** были успешно разрешены некоторые классические трудноразрешимые задачи теории множеств, математического анализа, классической геометрии и аналитической механики, в том числе:

1. Исследована логическая структура «Континуум – гипотезы» Георга Кантора, доказаны ее логически трансцендентные свойства, которые заключаются в отличии ее от основных законов классической традиционной аристотелевской логики, и в рамках классической формальной логики нулевого и первого порядка, получены новые решения «Континуум-проблемы» Кантора вне аксиоматических систем **ZF** и **ZFC**.

2. Выполнен формально-логический анализ и даны решения некоторых классических парадоксов в основаниях логики. Показано, что некоторые парадоксы, такие как например «Парадокс лжеца» и «Парадокс Платона и Сократа», содержат логически слабо трансцендентные утверждения, которые с одной стороны, хотя и не отрицают аристотелевские законы о непротиворечии и исключенном третьем, но с другой стороны и не соответствуют аристотелевскому закону об исключенном третьем. Такие логические формулы в классической формальной логике нулевого порядка квалифицируются, как непротиворечивые и одновременно с этим, как недоказуемые. Только в одной версии «Парадокса лжеца», а именно в «Парадоксе Эпименида» содержится тождественно противоречивая логическая формула, равносильная утверждению о собственной ложности. На основании классической формальной логики нулевого порядка дано также решение «Парадокса крокодила», и на его примере проанализирован процесс появления формально-логического тождественного противоречия в процессе формально-логических рассуждений. На основе системы **INCOL&TAMLA** удалось также найти по крайней мере два решения для известного софистического парадокса «Тяжба Протагора и Эватла», которые однако выходят за пределы классической традиционной аристотелевской логики. Предлагаемые решения, как раз иллюстрируют тот случай, когда на первый взгляд контрадикторно противоположные друг другу логические формулы оказываются на деле непротиворечиво разрешимыми.

3. На основе логико-математической системы **INCOL&TAMLA** была разработана теория трансцендентных классов **TCT (Transcendent Classes Theory)**, целью которой является изучение теоретико-множественных объектов, множеств и классов, из существования которых следуют логически слабо трансцендентные, сильно трансцендентные или же предельно трансцендентные утверждения. Показано существование таких объектов и классов в канторовской теории множеств, а также в аксиоматических теориях множеств **ZF** и **ZFC**. Исследованы логические свойства «Метода математической индукции» и на конкретных примерах показаны его логически трансцендентные свойства при стремлении натурального аргумента к актуальной бесконечности. Кроме этого показано, что в аксиоматических системе **ZFC**, постулирующей существование пустого множества, и основанной на классической формальной логике нулевого и первого порядка, пустое множество и «Аксиома выбора» обладают такими логически трансцендентными свойствами, что доказательство аристотелевской непротиворечивости системы **ZFC** становится невозможным.

4. Исследованы логико-аналитические особенности пятого постулата Евклида и связанных с ним различных аксиом о параллельных прямых. Доказано существование рациональной аналитической, абсолютной, неевклидовой плоскости, в которой «Постулат Прокла» о параллельных прямых доказывается как теорема. Одновременно с этим показано, что пятый постулат Евклида в его оригинальной версии не может быть ни доказан, ни опровергнут в рассматриваемой абсолютной рациональной аналитической плоскости. Этим самым доказывается существование абсолютной аналитической плоскости, в которой «Постулат Прокла» является логически независимым от пятого постулата Евклида. Кроме этого на основе модели Клейна, и собственно евклидовского определения параллельных прямых, показано существование такой топологической по Хаусдорфу, модели абсолютной плоскости с бесконечно расширяющейся во времени границей, в которой постулат о параллельных прямых Лобачевского выполняется как теорема. Показано, что в абсолютной рациональной аналитической плоскости, выполнение или отрицание «Постулата Прокла», существенным образом зависит от аналитических и топологических свойств плоскости и определения параллельности прямых.

5. Исследованы трансцендентные логические свойства второй проблемы Гильберта. Показано, что для каждой, достаточно богатой формальной или полуформальной математической теории, включающей в себя теорию целых неотрицательных чисел, «Аксиому пустого множества», «Аксиому экстенсиональности множеств», метод доказательства по трансфинитной индукции, понятие и определение бесконечных множеств, определение бесконечно большой величины, определение взаимнооднозначного соответствия множеств (в том числе и для бесконечных множеств), - существуют такие логически сильно трансцендентные утверждения A и $\neg$A, что по отдельности, логически непротиворечиво выводимо, как A так и $\neg$A. Полученный результат означает невозможность доказательства классической аристотелевской непротиворечивости для каждой упомянутой достаточно богатой

формальной и полуформальной теории рассматриваемого класса. Это же в свою очередь означает, что на основе каждой такой теории невозможно доказать классическую аристотелевскую непротиворечивость аксиоматической системы Пеано, поскольку каждая такая теория сама не отвечает классическому аристотелевскому понятию о непротиворечивости.

Исследованы логически трансцендентные свойства методов математической и трансфинитной индукции, приводящие в некоторых случаях к непротиворечивой выводимости некоторых утверждений вида A и ¬A по отдельности в процессе стремления аргументов логических индуктивных формул к бесконечности. Показано, что существуют случаи, когда при стремлении к бесконечности, методы математической и трансфинитной индукции не согласуются с законами о непротиворечии и об исключенном третьем аристотелевской логики высказываний. Полученные результаты свидетельствуют о существовании значительных логико-аналитических проблем с точки зрения аристотелевской традиционной логики в области классической теоретико-множественной математики, а также в теориях **ZF** и **ZFC**, и хорошо согласуются с первой и второй теоремами Курта Геделя о неполноте формальных и полуформальных математических теорий. Необходимо отметить, что приведенные выше результаты никак не затрагивают известные результаты выдающегося немецкого математика Герхарда Генцена о логической совместности аксиом и арифметики Пеано, полученные им в 1936 году, на основе добавления к логике первого порядка аксиомы о бескванторной индукции.

6. Исследованы трансцендентные логические свойства шестой проблемы Гильберта о полной и логически строгой (в аристотелевском понимании) аксиоматизации различных областей физики. Показано, что в общем случае эта задача является формально логически неразрешимой с точки зрения основных законов классической аристотелевской логики. В частности показано, что на основании основных законов аристотелевской логики не может быть аксиоматизирована например такая область физики, как аналитическая статика. Показано существование в аналитической статике таких логически сильно трансцендентных утверждений, которые могут быть как доказаны так и опровергнуты. Показано, что именно таким логически сильно трансцендентным свойством обладает современная интерпретация «Принципа возможных перемещений» Лагранжа в отношении идеальных механических систем. Показано, что какова бы ни была аксиоматическая система в области аналитической статики, то основанная на ней теория или не будет содержать утверждений, содержащихся в «Принципе возможных перемещений», и тогда она будет содержательно неполной, или же она будет содержать «Принцип возможных перемещений», а значит тем самым будет содержать утверждения с логически предельно трансцендентными свойствами, и в этом случае она не будет логически согласовываться с аристотелевской традиционной логикой.

Аналогичное положение складывается и в области аналитической динамики. Были исследованы логически сильно трансцендентные свойства вариационного «Принципа Д’Аламбера-Лагранжа» в аналитической динамике. Показаны логически сильно трансцендентные свойства этого принципа в области аналитической динамики пластических систем. Выявлен широкий класс пластических систем, для которых условие выполнимости вариационного «Принципа Д'Аламбера-Лагранжа» является достаточным, как для соблюдения условий равновесия, так и для полного разрушения одной и той же системы при одних и тех же аналитических условиях для внешней нагрузки. Этим самым доказывается формально логически предельно-трансцендентная природа «Принципа Д'Аламбера-Лагранжа», формально логически эквивалентная отрицанию закона о непротиворечии и отрицанию закона об исключенном третьем.

Таким образом, проведенные исследования показали, что явление логико-математической трансценденции является не случайным, а вполне закономерным явлением, наблюдаемым даже в глобально формально непротиворечивой классической формальной логике нулевого порядка, в канторовской и аксиматических теориях множеств **ZF** и **ZFC**, во многих прикладных областях геометрии и механики, таких как например классическая планиметрия, аналитическая статика и динамика. Такое положение дел не должно казаться удивительным, поскольку уже Аристотелю были известны логико временные ограничения, накладываемые на применение закона о непротиворечии и закона об исключенном третьем. Известно сохраненное в истории логики мнение Аристотеля о том, что законы о непротиворечии и об исключенном третьем не имеют силы в суждениях относительно будущих событий и явлений, поскольку будущие события не являются определенно детерминированными. Это мнение Аристотеля непосредственно касается тех формальных и полуформальных математических теорий, которые так или иначе занимаются вопросами изучения бесконечности, зачастую тем самым в неявном виде включающие в себя и бесконечное время.

Как известно, современная теория классов и множеств допускает учет времени в явном виде. Это означает, что при учете времени в явном виде, т.е. при параметризации тех или иных бесконечных процессов с помощью введения независимого параметра времени, проблема противоречивости или непротиворечивости принципиально снимается, поскольку соблюдение в этих условиях закона о непротиворечии и исключенном третьем не представлялось возможным даже создателю основных законов классической традиционной логики – Аристотелю. Однако явление логико-математической трансценденции, со своей стороны, вносит существенные коррективы в доказательную базу той или иной формальной или полуформальной математической теории. В частности, в вопросах, связанных с изучением бесконечности и бесконечных процессов, с целью адекватного описания упомянутых процессов, становится необходимым учет **A** и **B** логик времени. Кроме этого, при выходе за пределы применимости закона о непротиворечии и закона об исключенном третьем, фактически становятся нелигитимным применение таких косвенных методов доказательств, как метод доказательства от противного, закон Клавия, закон снятия двойного отрицания, а также некоторых других логических законов, связанных с законом о непротиворечии и законом об исключенном третьем. Если же, как это происходит во многих случаях в действительности, упомянутые методы все же применяются систематически, как это имеет место в канторовской теории множеств и в теориях **ZF** и **ZFC**, то представляется возможным введение «Принципа доминирования» (принципа предпочтения), согласно которому на множестве формально логических доказательств в рамках классической формальной логики нулевого порядка, - прямые методы доказательства доминируют косвенные (прямые методы доказательства имеют предпочтение перед косвенными).

В логико-философском смысле, идея разработки системы **INCOL&TAMLA** и основанной на ней теории **TCT**, восходит к логико философскому учению **«Трансцендентальной логики»** выдающего немецкого мыслителя Иммануила Канта, рассмотревшего в своей знаменитой работе, вопросы соотношения, существоваших на тот период времени, различных направлений логики. В контексте исторического развития логики и математики как наук, система **INCOL&TAMLA** и теория **TCT** позволяют формально-логически (в рамках классической формальной логики нулевого и первого порядка) и аналитически строго обосновать основные положения доаристотелевской логической школы софистов, субъективно-логическая и логико-релятивистская концепции которых, как это показали проведенные современные исследования, имеют вполне равные права на существование с аристотелевской классической традиционной логикой в рамках современной глобально формально непротиворечивой классической формальной логики нулевого порядка, а также в вопросах, связанных с существенной логической неопределенностью и изучением логико-аналитических свойств бесконечных классов и множеств, на основе теории множеств и классов и классической формальной логики нулевого и первого порядка.

2.2 Теорема экзистенциальности универсального класса

В настоящем параграфе исследуется вопрос логической выводимости экзистенциальности (существования) универсального класса U в той или иной аксиоматической теории классов или множеств. Показано, что в каждой системе теории множеств или классов, в которой принята «Аксиома пустого множества», - утверждение экзистенциальности универсального класса U является логически выводимым. Кроме этого показано, что универсальный класс U одновременно является множеством. При условии принятия аксиомы о существовании пустого множества, доказана теорема конструктивной экзистенциальности любого класса с наперед заданным характеристическим свойством.

В теории множеств основополагающее значение имеет отношение принадлежности объекта объекту. Для его обозначения в теории множеств выбран символ $\in$. С использованием символов для обозначения объектов, факт принадлежности объекта X объекту Y выражается следующей формулой:

$$X \in Y \tag{2.2.1}$$

Наоборот, факт непринадлежности объекта X объекту Y выражается следующей формулой:

$$X \notin Y \tag{2.2.2}$$

Формула (2.2.1) читается следующим образом: объект X принадлежит объекту Y. Формула (2.2.2) читается следующим образом: объект X не принадлежит объекту Y.

В теории множеств для сокращенного символического обозначения языковых логических конструкций применяются так называемые кванторы. Например $\exists$ - является квантором существования и применяется для обозначения существования тех или иных объектов.

Факт существования объекта X выражается следующим образом:

$$\exists X \tag{2.2.3}$$

Факт не существования объекта X выражается следующим образом:

$$\neg(\exists X) \tag{2.2.4}$$

Формула (2.2.3) читается следующим образом: существует объект X. Формула (2.2.4) читается следующим образом: не верно, что существует объект X, или, что то же самое – объекта X не существует.

Другим основным квантором теории множеств является квантор всеобщности, который обозначается $\forall$. Формула:

$$\forall X \tag{2.2.5}$$

означает – для всех объектов X.

Формула:

$$\neg(\forall X) \tag{2.2.6}$$

означает – не верно, что для всех объектов X.

В современных исследованиях по теории множеств имеется достаточно подробно разработанная классификация тех или иных объектов и классов. Приведем некоторые основные моменты упомянутой классификации по книге /1/ известного чешского специалиста по теории множеств – доктора П.Вопенки.

Пусть даны какие-либо уже созданные объекты и указан некоторый способ, с помощью которого можно выделить эти объекты среди остальных объектов. Упомянутый способ выделения объединяет эти объекты. Если на выделенные таким образом объекты можно смотреть, как на вполне равноправные, то говорят, что выделена *совокупность объектов*. Если же по условиям рассматриваемого вопроса необходимо признать за выделенными объектами различные позиции и не представляется возможным игнорировать то обстоятельство, что они имеют различные свойства, или вступают в различные отношения, то говорят, что *выделено сообщество объектов*.

Выделение группы объектов из совокупности других объектов происходит на основе задания так называемого характеристического свойства, которое представляет собой признак, по которому та или иная группа объектов выделяется из совокупности других объектов.

<u>Определение класса</u>

При определении некоторого класса на основе характеристического свойства $C(x)$ (характеристическое свойство может представлять собой также совокупность свойств, которым должны удовлетворять элементы определяемого класса) символьная запись определяемого класса имеет следующий вид:

$$Cls(Cx) = \{x : (\forall x)(C(x))\} \tag{2.2.7}$$

Множество определяется, как логически четко выделенный класс, на основе логического закона об исключенном третьем.

<u>Определение множества</u>

Множеством называется класс, удовлетворяющий следующему условию:

$$Set(Cx) = \{x : (\forall x)(C(x)) \wedge \forall y(C(y) \oplus \neg C(y))\} \tag{2.2.8}$$

Формула (2.2.8) означает, что множеством является такой класс, элементы которого удовлетворяют характеристическому свойству $C(x)$, и, кроме этого, для каждого объекта y на основании закона об исключенном третьем можно решить, удовлетворяет ли он характеристическому свойству $C(x)$, либо нет.

Таким образом мы видим, что понятие множества не принадлежит к числу самоочевидных понятий. Выдающийся чешский математик Бернард Больцано, который первым ввел понятие множества, в свое время должен был приложить немало усилий, чтобы объяснить читателю, что совокупность каких либо объектов, а тем более *сообщество объектов зачастую разнородных*, можно представить себе, как самостоятельную сущность. Формула (2.2.8) позволяет рассматривать множества, как вполне определенные, логически четко выделенные классы.

Одним из основных понятий теории классов является понятие пустого множества. Пустым множеством называется такой класс, который не содержит ни одного элемента. Пустое множество обозначается символом $\varnothing$. В теории классов пустое множество является аналогом арифметического 0 множества действительных чисел. По определению существует только одно пустое множество. Формула $A = \varnothing$ означает, что множество A не имеет ни одного элемента, что оно пусто, что оно «исчезает». Если не вводить понятия пустого множества, то при определении того или иного конкретного класса С пришлось бы часто делать оговорку: если он существует. Это происходит из-за того, что часто элементы класса определены так, что заранее бывает неизвестно, существуют они или нет.

В аксиоматических теориях множеств, существование самого пустого множества утверждается специальной «Аксиомой пустого множества», которая формулируется следующим образом.

«Аксиома пустого множества»

Существует множество, не содержащее ни одного элемента:

$$(\exists x)(\forall y)(y \notin x) \tag{2.2.9}$$

Как правило, множество оказывается пустым, в том случае, когда характеристическое свойство множества - $C(x)$, определяющее совокупность элементов множества, является логически, математически или физически неосуществимым.

Необходимо отметить, что введение понятия пустого множества, и в особенности, связанной с ним «Аксиомы пустого множества», оказывает значительное воздействие на саму логическую структуру теории классов и множеств.

До создания теории множеств, в классическом математическом анализе, проблема существования или не существования тех или иных логических или математических объектов была тесно связана с непротиворечивостью или противоречивостью определяемых объектов. Исходя из основных законов аристотелевской логики, при построении той или иной математической теории, в нее включались и в ней признавались существующими только те объекты, непротиворечивость которых была установлена с достоверностью. Те же объекты, которые по своей логической или математической природе являлись противоречивыми, - исключались из дальнейшего рассмотрения в этой теории, т.е. признавались не существующими в этой теории.

С созданием теории множеств, и введения в нее понятия пустого множества совместно с «Аксиомой пустого множества», прежняя концепция существования или не существования тех или иных объектов в рамках той или иной математической теории кардинально изменилась. Ниже, для каждой аксиоматической теории множеств, содержащей аксиому существования пустого множества, сформулирована и доказана теорема о конструктивном существовании любого класса с наперед заданным характеристическим свойством.

Теорема конструктивной экзистенциальности классов (Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей «Аксиому пустого множества», существование пустого множества является достаточным условием для доказательства конструктивного существования каждого класса, определяемого наперед заданным характеристическим свойством (или совокупностью свойств) $C(x)$.

Доказательство

Рассмотрим следующие случаи. Первый случай: характеристическое свойство $C(x)$ является логически, математически или физически неосуществимым. Тогда не существует ни одного элемента x , удовлетворяющего этому свойству. В этом случае класс со свойством $C(x)$ является пустым. Однако в силу «Аксиомы пустого множества» – пустое множество существует. Это означает, что в рассматриваемом случае класс со свойством $C(x)$ хотя и является пустым , но тем не менее существует, как пустое множество.

Второй случай: характеристическое свойство $C(x)$ является осуществимым, т.е. существуют элементы x, удовлетворяющие характеристическому свойству $C(x)$. В этом случае, согласно (2.2.7), класс $Cls(Cx)$ является непустым, а следовательно – тем более конструктивно существующим.

Из приведенного выше рассуждения следует, что в любом случае, невзирая на осуществимость или неосуществимость характеристического свойства $C(x)$, класс $Cls(Cx)$ существует или в виде непустого класса, или же в виде пустого множества. Это означает, что если с существованием класса $Cls(Cx)$ возникают противоречивые суждения, *то мы вынуждены признать также и факт их существования*. Это обстоятельство является неотъемлимым свойством каждой теории классов или теории множеств, содержащей «Аксиому пустого множества», и является прямым следствием принятия этой аксиомы.

Перейдем теперь к определению универсального класса.

Определение универсального класса

Класс U называется универсальным, если любой непустой или пустой объект является его элементом.

Формальное определение универсального класса

$$U = Cls(u) = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\} \tag{2.2.10}$$

Формула (2.2.10) означает, что элементами универсального класса U являются, как пустое множество, так и любой непустой класс.

Первая теорема экзистенциальности универсального класса

(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей аксиому пустого множества, существование пустого множества является достаточным условием для доказательства существования универсального класса U .

$$\exists\varnothing \Rightarrow \exists U((U = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\})) \tag{2.2.11}$$

Доказательство

В соответствии с самим определением (2.2.10) универсального класса, он содержит пустое множество в качестве элемента. Следовательно универсальный класс является непустым. В силу теоремы экзистенциальности классов, это обстоятельство означает конструктивное существование универсального класса U . Теорема доказана.

<u>Вторая теорема экзистенциальности универсального класса</u>

<u>(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)</u>

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей аксиому пустого множества, отрицание существования универсального класса U , влечет за собой отрицание существования пустого множества $\varnothing$. Следовательно универсальный класс U существует.

Доказательство

Доказательство приведенной выше теоремы опирается на логический закон контрапозиции. На основании справедливости формулы (2.2.11) и логического закона контрапозиции можно заключить:

$$\begin{aligned}&(\exists\varnothing \Rightarrow \exists U((U = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\})) \Leftrightarrow \\ &(\neg\exists U((U = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\})) \Rightarrow \neg\exists\varnothing)\end{aligned} \qquad (2.2.12)$$

Из соотношения (2.2.12) непосредственно видно, что отрицание существования универсального класса, приводит к отрицанию пустого множества, а это противоречит «Аксиоме пустого множества». Следовательно универсальный класс U существует. Теорема доказана.

<u>Теорема экзистенциальности универсального множества</u>

<u>(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)</u>

Существует универсальное множество. Универсальный класс U является множеством.

Доказательство

Из теоремы экзистенциональности классов и формального определения (2.2.10) универсального класса U следует, что любой класс, определяемый некоторым характеристическим свойством $C(x)$, является элементом универсального класса U . Поэтому для универсального класса U выполняется формальное определение множества (2.2.8). Следовательно универсальный класс U является множеством.

Таким образом, вопреки широко распространенному мнению о не существовании универсального класса, - в настоящей работе показано,что наоборот, - универсальный класс U существует и является множеством.

2.3 О трансцендентных логических свойствах пустого множества в канторовской теории множеств и основных определениях трансцендентной логики

Одним из основополагающих отношений между множествами и классами, является отношение принадлежности элементов одного множества или класса, другому множеству или классу. Рассмотрим соответствующие определения по монографии /2/ выдающегося немецкого математика Феликса Хаусдорфа, в рамках теории множеств Георга Кантора.

Если даны два непустых множества X и Y, то возникает вопрос о том, не принадлежат ли элементы одного из них также и другому. Пусть x и y являются элементами множеств X и Y соответственно. Сперва рассмотрим следующие возможные альтернативы:

1. Каждое $x \in Y$, не каждое $x \in Y$.
2. Каждое $y \in X$, не каждое $y \in X$.

Комбинируя сочетания приведенных выше возможных альтернатив, приходим к следующим четырем возможным случаям:

1. Каждое $x \in Y$, каждое $y \in X$: $X = Y$.
2. Каждое $x \in Y$, не каждое $y \in X$: $X \subseteq Y$.
3. Не каждое $x \in Y$, каждое $y \in X$: $Y \subseteq X$.
4. Не каждое $x \in Y$, не каждое $y \in X$.

В случае (1) говорят, что множества X и Y равны друг другу. В случае (2) говорят, что множество X является подмножеством множества Y. В случае (3) говорят, что множество Y является подмножеством множества X. Для случая (4) в монографии Ф.Хаусдорфа /2/ не зарезервировано никаких обозначений.

В канторовской теории множеств говорится о необходимости признания существования пустого множества, обозначаемого как $\varnothing$, причем постулируется единственность пустого множества. Фактически, пустое множество $\varnothing$ в теории множеств является аналогом арифметического ноля теории действительных чисел.

Если множества X и Y пусты, то имеет место соотношение:

$$X = Y = \varnothing \qquad (2.3.1)$$

Определенные логические проблемы возникают в том случае, когда одно множество пусто, а другое нет. Положим для определенности, что множество X пусто, а множество Y не является пустым. В этом случае, в монографии /2/ (стр.11), Ф.Хаусдорфом приведено следующее рассуждение, суть которого изложена ниже.

Пусть $X = \varnothing$, тогда утверждение «если $x \in \varnothing$, то $x \in Y$» справедливо потому, что $X = \varnothing$, не содержит ни одного элемента x, и $x \in \varnothing$ является ложным суждением. Если даны два суждения A и B, то утверждение «если A верно, то B также верно», верно всякий раз, когда A неверно. Из неверного суждения A следует любое суждение.

Таким образом, из приведенного выше отрывка из /2/ следует, что в данном случае в рассуждении Хаусдорфа, в качестве формального вывода, применяется логический закон Дунса Скота, согласно которому из противоречия, или ложного суждения следует любое суждение. Хаусдорф тем самым признает, что суждение A, определяемое формулой:

$$A \equiv (x \in \varnothing) \equiv 0 \qquad (2.3.2)$$

является ложным, где под 0 в данном случае понимается формально-логический ноль.

Необходимо отметить, что в классической аристотелевской традиционной логике закон Дунса Скота является предупредительным законом. Он предупреждает о том, что из ложного, или же противоречивого суждения может следовать любое суждение, в том числе и отрицание закона о непротиворечии, а именно:

$$0 \Rightarrow (B = \neg B) \qquad (2.3.3)$$

Именно этот предупредительный закон и нарушен в канторовской теории множеств. Таким образом канторовская теория множеств в версии Ф.Хаусдорфа содержит логически ложную формулу (2.3.2) , на основании которой выводимо аристотелевское противоречие, содержащееся в качестве подформулы в (2.3.3). В классической аристотелевской традиционной логике это означает, что канторовская теория множеств содержит ложное основное положение в виде (2.3.2) из которого выводимо противоречие, содержащееся в (2.3.3). Ложное основное положение в классической традиционной логике называется – error fundamentalis (лат.).

Рассмотрим следующие определения.

<u>Определение логически сильно трансцендентных логических формул</u>

Логические формулы F и ⌐F называются логически сильно трансцендентными, если по отдельности является логически выводимым, как F, так и ⌐F.

Определение логически сильно трансцендентной теории

Формальная или полуформальная, логическая или математическая теория T называется логически сильно трансцендентной, если на множестве ее суждений TS по отдельности выводимы сильно трансцендентные логические формулы F и ⌐F. Логически сильно трансцендентная теория обозначается как HT.

Определение логически предельно трансцендентных логической формул

Логические формулы F и ⌐F называются логически предельно трансцендентными в некоторой формальной или полуформальной логической или математической теории T, если для них в этой теории выполняется хотя бы одно из перечисленных ниже логических соотношений:

$$\begin{gathered} F \wedge \neg F \\ F = \neg F \\ \neg F \wedge \neg\neg F \\ F \Leftrightarrow \neg F \\ \neg(F \vee \neg F) \\ (F \Rightarrow 0) \wedge (\neg F \Rightarrow 0) \\ \neg(F \oplus \neg F) \end{gathered} \tag{2.3.4}$$

Определение логически предельно трансцендентной теории

Формальная или полуформальная, логическая или математическая теория T называется логически предельно трансцендентной, если на множестве ее суждений TS выводима хотя бы одна пара предельно трансцендентных логических формул F и ⌐F. Предельно трансцендентную теорию обозначим – LT.

Определение логически предельно трансцендентного объекта

Каждый объект, класс или множество, конструктивно существующие в теории T, называются логически предельно трансцендентными в этой теории, если на множестве TS суждений этой теории, в отношении упомянутых объекта, класса или множества, логически или аналитически выводимы предельно трансцендентные логические формулы F и ⌐F. Логически предельно трансцендентный объект, класс или множество обозначим – LTC.

<u>Определение логически сильно трансцендентного объекта</u>

Каждый объект, класс или множество, конструктивно существующие в теории T, называются сильно трансцендентными в этой теории, если на множестве TS суждений этой теории, по отдельности выводимы сильно трансцендентные логические формулы F и ⌐F. Логически сильно трансцендентный объект, класс или множество обозначается как HTC.

Обозначим канторовскую теорию множеств через **CST (Cantorian Set Theory)**.

Из соотношения (2.3.2) мы видим, что к сожалению, в канторовской теории множеств, в версии Ф.Хаусдорфа /2/, содержится error fundamentalis, в результате чего в (2.3.3) становится выводимой логически предельно трансцендентная формула. Это означает, что теория **CST**, является логически предельно трансцендентной теорией. Указанное обстоятельство может самым серьезным образом влиять на дальнейшие выводы, получаемые в рамках **CST**.

2.4 Парадокс «Аксиомы пустого множества» и «Аксиомы регулярности» в аксиоматических системах ZF и ZFC

В настоящем параграфе представлен анализ открытого автором в основаниях классической аксиоматической теории множеств «Парадокса «Аксиомы пустого множества» и «Аксиомы регулярности» в аксиоматических системах **ZF** и **ZFC**», который заключается в том, что в результате стремления избежать возникновения «Парадокса Рассела» в основаниях теории множеств и введения с этой целью «Аксиомы регулярности», возникает целый класс множеств типа ƀ, каждое из которых является элементом логически трансцендентного R-класса Рассела.

«Аксиома регулярности» занимает по своей значимости одно из центральных мест в аксиоматических теориях множеств **ZF** и **ZFC** (система аксиом Цермело-Френкеля, и та же система, дополненная «Аксиомой выбора»). Ее основное назначение заключалось в устранении так называемого «Парадокса Рассела» в основаниях теории множеств. Для того, чтобы перейти к логически адекватному рассмотрению «Аксиомы регулярности» и ее логических особенностей, рассмотрим сперва формулировку и содержание «Парадокса Рассела», а также вытекающие из него следствия.

<u>Парадокс Рассела</u>

Класс Z назовем регулярным, если для него выполняется соотношение:

$$Z \notin Z \tag{2.4.1}$$

Класс Y назовем нерегулярным, если для него выполняется соотношение:

$$Y \in Y \tag{2.4.2}$$

Сформируем класс R следующим образом:

$$R = Cls(Z) = \{Z : Z \notin Z\} \tag{2.4.3}$$

Зададимся вопросом, является ли класс R регулярным либо нет?

Если класс R является регулярным, то выполняется условие:

$$R \notin R \tag{2.4.4}$$

Тогда класс R удовлетворяет определению (2.4.3), и в силу самого определения (2.4.4) класса R следует:

$$R \in R \tag{2.4.5}$$

Таким образом:

$$(R \notin R) \Rightarrow (R \in R) \tag{2.4.6}$$

Рассмотрим теперь вторую возможность, а именно:

$$R \in R \tag{2.4.7}$$

Тогда в силу определения принадлежности объекта классу, класс R является элементом самого себя, и в силу определения (2.4.3) для него выполняется характеристическое свойство, согласно которому:

$$R \notin R \tag{2.4.8}$$

Таким образом:

$$(R \in R) \Rightarrow (R \notin R) \tag{2.4.9}$$

Из сопоставления (2.4.6) и (2.4.9) следует:

$$(R \notin R) \Leftrightarrow (R \in R) \tag{2.4.10}$$

Мы видим, что соотношение (2.4.10) является логически контрадикторным к закону о непротиворечии классической аристотелевской традиционной логики. Назовем класс R - классом Рассела. Из соотношения (2.4.10) и определения логически трансцендентных классов, следует, что R - класс Рассела является логически предельно трансцендентным.

Возникает естественный вопрос: является ли класс Рассела непустым? Для того, чтобы показать, что класс Рассела конструктивно является непустым, достаточно показать, что он содержит хотя бы один элемент. Для этого рассмотрим пустое множество $\varnothing$. В силу «Аксиомы пустого множества» имеем:

$$\{x:(\forall y)(y \notin x)\} = \varnothing \qquad (2.4.11)$$

В силу формулы (2.4.11) имеем:

$$\varnothing \notin \varnothing \qquad (2.4.12)$$

Из сопоставления (2.4.12) и (2.4.3) следует:

$$\varnothing \in R \qquad (2.4.13)$$

Из (2.4.13) следует, что класс Рассела является непустым. Поэтому в силу «Теоремы экзистенциальности классов», - класс Рассела существует конструктивно. Доказанное утверждение можно сформулировать в виде следующей теоремы.

<u>Первая теорема экзистенциальности класса Рассела</u>

<u>(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)</u>

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей «Аксиому пустого множества», существование пустого множества является достаточным условием для доказательства конструктивного существования класса Рассела - R.

$$\exists\varnothing \Rightarrow \exists R((R = \{Z : Z \notin Z\}) \wedge (\varnothing \in R)) \qquad (2.4.14)$$

На основании логического закона контрапозиции, приведенную выше теорему можно сформулировать иным образом.

<u>Вторая теорема экзистенциальности класса Рассела</u>

<u>(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)</u>

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей аксиому существования пустого множества, отрицание существования класса Рассела - R, влечет за собой отрицание существования пустого множества $\varnothing$:

$$\neg\exists R((R = \{Z : Z \notin Z\}) \wedge (\varnothing \in R)) \Rightarrow \neg\exists\varnothing \qquad (2.4.15)$$

Доказательство

В силу соотношения (2.4.14) и логического закона контрапозиции имеем:

$$\begin{aligned}&(\exists\varnothing \Rightarrow \exists R((R = \{Z : Z \notin Z\}) \wedge (\varnothing \in R))) \Leftrightarrow \\ &(\neg\exists R((R = \{Z : Z \notin Z\}) \wedge (\varnothing \in R)) \Rightarrow \neg\exists\varnothing)\end{aligned} \qquad (2.4.16)$$

Соотношение (2.4.16) доказывает сформулированную теорему.

Рассмотрим следующее определение.

<u>Определение логически предельно трансцендентных объектов, классов и множеств</u>

Каждый объект, класс или множество, конструктивно существующие в теории T, называются логически предельно трансцендентными в этой теории, если на множестве TS суждений этой теории, в отношении упомянутых объекта, класса или множества конструктивно существуют логически предельно трансцендентные логические формулы F и ⌐F. Предельно трансцендентный объект, класс или множество обозначим – LTC.

Приведенное выше определение совместно с теоремами экзистенциальности класса Рассела позволяют выразить полученные в приведенных выше рассуждениях результаты в виде теоремы.

<u>Теорема экзистенциальности логически предельно трансцендентных объектов и классов (Ахвледиани А.Н. – 2011)</u>

Существует по крайней мере один логически предельно трансцендентный объект и класс. R ***-класс Рассела является логически предельно трансцендентным объектом и классом.***

Рассмотрим следующее определение.

<u>Определение генезиса объекта, класса или множества</u>

Генезисом логического математического или теоретико-множественного объекта, класса или множества называется конструктивное аналитическое или численное возникновение упомянутого объекта, класса или множества, основанием которого является математический вывод или логическое доказательство его конструктивного существования, строго формализуемые в рамках современной глобально непротиворечивых классических формальных логик нулевого и первого порядков.

<u>Определение генезиса логически трансцендентного объекта, класса или множества</u>

Генезисом логически трансцендентного математического или теоретико-множественного объекта, класса или множества называется конструктивное аналитическое или численное возникновение упомянутого объекта, класса или множества, основанием которого является математический вывод или логическое доказательство его конструктивного существования, строго формализуемые в рамках современной глобально непротиворечивых классических формальных логик нулевого и первого порядков.

<u>Определение генезиса логико-математической трансценденции</u>

Генезисом логико-математической трансценденции в некоторой теории T называется процесс возникновения логически трансцендентных математических или теоретико-множественных объектов классов или множеств в этой теории.

Необходимо отметить, что экзистенциальность логически трансцендентного R-класса Рассела является прямым следствием «Аксиомы пустого множества», что с учетом приведенных выше определений можно выразить также в виде следующей теоремы.

<u>Теорема о достаточном условии генезиса логически предельно трансцендентных объектов (Ахвледиани А.Н. – 2011)</u>

Принятие «Аксиомы пустого множества» является достаточным условием для генезиса логически предельно трансцендентных объектов и классов в классической теории множеств.

Приведенные выше теоремы означают, что существование трансцендентных объектов и классов, в частности логически трансцендентного R-класса Рассела предопределяется «Аксиомой пустого множества».

Приведем формулировку «Аксиомы регулярности», основной целью которого было преодоление «Парадокса Рассела».

<u>Аксиома регулярности</u>

В любом непустом семействе множеств - a, есть по меньшей мере одно множество b, каждый элемент c которого не принадлежит данному семейству a, или формально:

$$RA \equiv \forall a(a \neq \varnothing \Rightarrow \exists b(b \in a \wedge \forall c(c \in b \Rightarrow c \notin a))) \qquad (2.4.17)$$

Для дальнейшего изложения нам необходимо доказать следующую теорему в рамках классической формальной логики нулевого порядка.

<u>Признак формальной доказуемости логического утверждения</u>

Если некоторое утверждение B следует из другого, отличного от него утверждения A, а также и из его отрицания $\neg A$, то утверждение B является формально доказуемым.

Доказательство

Доказательство сформулированной выше теоремы осуществлено на основании логической программы вычислительного математического пакета **MATCAD**. В соответствии с правилами классической формальной логики нулевого порядка имеют место следующие соотношения:

$$A := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2.4.18)$$

$$B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2.4.19)$$

$$\overrightarrow{\Rightarrow [[(\Rightarrow (A, B)) \wedge (\Rightarrow (\neg A, B))], B = 1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2.4.20)$$

Формула (2.4.20) свидетельствует о том, что сформулированная нами теорема является верной.

Рассмотрим теперь «Парадокс «Аксиомы пустого множества» и «Аксиомы регулярности» в системах **ZF** и **ZFC**».

<u>Парадокс «Аксиомы пустого множества» и «Аксиомы регулярности» в системах ZF и ZFC (Ахвледиани А.Н. -2011)</u>

Пустое множество $\varnothing$ и каждое конструктивно существующее множество типа b, формализуемое в системах ZF и ZFC на основе логической коньюнкции «Аксиомы пустого множества» и «Аксиомы регулярности», принадлежат логически трансцендентному R-классу Рассела.

Описание парадокса

Возможны следующие случаи.

1. В теории ZF не имеется ни одного непустого класса, удовлетворяющего всем аксиомам теории ZF. В этом случае семейство классов CZF, определяемых теорией ZF является пустым множеством $\varnothing$ и вследствие этого обстоятельства, а также вследствие определения логически трансцендентного R-класса Рассела - CZF является элементом R. В этом случае условие, сформулированное в

«Парадоксе «Аксиомы пустого множества» и «Аксиомы ругулярности» выполняется, поскольку класс CZF принадлежит логически трансцендентному R-классу Рассела, как пустое множество.

2. Существует хотя бы один непустой класс a, удовлетворяющий всем аксиомам теории ZF. Тогда в соответствии с «Аксиомой регулярности» существуют множества типа b, для каждого из которых сперва рассмотрим первый подслучай, а именно:

$$(b \in b) \equiv 1 \qquad (2.4.21)$$

В рассматриваемом случае «Аксиома регулярности» RA будет содержать логическую подформулу:

$$\exists b(b \in a \wedge (b \in b \Rightarrow b \notin a)) \qquad (2.4.22)$$

Вследствие (2.4.21) логическая формула (2.4.22) приводит к аристотелевскому противоречию. Это означает, что у нас остается только подслучай, альтернативный к (2.4.21):

$$(b \notin b) \equiv 1 \qquad (2.4.23)$$

В этом случае по определению логически трансцендентного R-класса Рассела – каждое множество типа b принадлежит R-классу. Этому же классу принадлежит и пустое множество $\varnothing$. Таким образом и в этом рассматриваемом случае выполняются условия сформулированного нами парадокса. Применяя «Признак формальной доказуемости утверждения» мы можем заключить, что действительно в каждом из двух рассматриваемых случаев рассматриваемых, выявленный нами парадокс имеет место. Таким образом применение «Аксиомы регулярности» при формировании тех или иных классов или множеств в рамках аксиоматических теорий ZF и ZFC порождает множества типа b, которые *наполняют логически трансцендентный* R-класс Рассела. Это означает, что на основании «Аксиомы регулярности» по сути дела не удается преодолеть «Парадокс Рассела», причиной генезиса которого на самом деле является «Аксиома пустого множества», и более того – применение «Аксиомы регулярности» наоборот, - *способствует наполнению логически трансцендентного* R-класса Рассела.

2.5 Логический анализ «Теоремы Кантора»

Рассмотрение логических свойств «Теоремы Кантора» о мощности всех подмножеств данного множества предварим некоторыми основными положениями теории множеств. Одной из первых основных аксиом теории множеств является «Аксиома экстенсиональности», содержание которой приведено ниже в соответствии с /1/.

Аксиома экстенсиональности

Любое множество однозначно определяется своими элементами. Для равенства двух непустых множеств необходимо и достаточно, чтобы элементы каждого из них, были элементами и другого. Пустое множество равно самому себе.

$$\forall X, Y(\forall z(z \in X \Leftrightarrow z \in Y) \Leftrightarrow X = Y) \qquad (2.5.1)$$

В теории множеств рассматривают, как конечные, так и бесконечные множества. Преимущественное внимание уделяется рассмотрению бесконечных множеств. Среди конечных множеств выделяют также такие множества, которые содержат единственный элемент $\{a\}$. В частности, если объект a является пустым множеством, то рассматривают также множество $\{\varnothing\}$, единственным элементом которого является пустое множество $\varnothing$.

Одной из наиболее важных акиом теории множеств является «Аксиома степени». Приведем ее формулировку в соответствии с /1/.

Аксиома степени

Для каждого множества X существует множество Y, являющееся множеством всех подмножеств множества X :

$$\forall X \exists Y \forall z(z \in Y \Leftrightarrow z \subseteq X) \qquad (2.5.2)$$

Приведем некоторые базовые положения теории множеств, связанные с различием конечных и бесконечных множеств, а также с понятиями соответствия и эквивалентности множеств.

Рассмотрим сперва множество всех целых положительных чисел в десятичной системе счисления с присоединенным к нему особым числом, называемым нулем 0.

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.5.3)$$

Из множества (2.5.3) можно выделить множество натуральных чисел или натуральный ряд, который имеет следующий вид:

$$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.5.4)$$

Необходимо отметить, что вопрос принадлежности 0 множеству натуральных чисел является неоднозначным, весьма нетривиальным и спорным. Поскольку 0 обладает особыми логико-аналитическими свойствами в теории действительных и комплексных чисел, мы в дальнейшем не будем причислять 0 к множеству натуральных чисел. С другой стороны без 0 невозможна запись натуральных чисел в десятичной системе счисления. Исходя из вышесказанного, мы будем рассматривать множество (2.5.3) целых положительных чисел с присоединенным к нему 0, как базовое, и выделим из него множество натуральных чисел (2.5.4).

Понятие соответствия относится к основным понятиям теории множеств. Говорят, что между двумя множествами установлено соответствие, если определено правило, по которому для каждого элемента одного множества выбирается определенный элемент другого множества. На основе понятия соответствия между множествами, вводится также понятие отображения множеств. При этом различают понятия отображения «множества в множество», и отображения «множества на множество».

Определение понятия отображения множества в множество

Соответствие, при котором каждому элементу непустого множества X отвечает единственный элемент непустого множества Y, называется отображением множества X в множество Y.

Определение понятия отображения множества на множество

Соответствие, при котором каждому элементу непустого множества X отвечает единственный элемент непустого множества Y, и кроме того, каждому элементу множества Y отвечает хотя бы один элемент множества X называется отображением множества X на множество Y.

Отображения множеств обычно обозначают буквами f, g, h...... Если при отображении f элементу $x \in X$, соответствует элемент $y \in Y$, то элемент y называют образом элемента x, а элемент x называют прообразом элемента y и пишут:

$$y = f(x) \qquad (2.5.5)$$

Множество всех прообразов элемента y называют его полным прообразом. В случае отображения множества X на множество Y пишут также:

$$Y = f(X) \qquad (2.5.6)$$

Отображение $f : X \to Y$ называется инъективным, если разные элементы множества X имеют различные образы.

Следующее определение принято в сответствии с современным подходом к вопросу описания множественной эквивалентности классов и множеств, принятой в работе /1/ известным специалистом по теории множеств, доктором П.Вопенкой.

Определение множественной эквивалентности множеств

Отображение множества X на множество Y называется взаимно однозначным, если разным элементам множества X, соответствуют разные элементы множества Y. Если множество X взаимно однозначно отображается на множество Y, то множества X и Y называются множественно эквивалентными, что выражается следующим образом :

$$X \cong Y \tag{2.5.7}$$

Определение отрезка натурального ряда

Множество всех натуральных чисел, меньших или равных некоторому натуральному числу n, называется отрезком натурального ряда. Отрезок натурального ряда обозначается как $|1, n|$. В частном случае имеем $|1,1|$.

Определение конечного множества и класса

Множество или класс называется конечным множеством в том и только в том случае, если оно эквивалентно отрезку натурального ряда.

Определение бесконечного множества и класса

Множество или класс, не являющиеся эквивалентными никакому отрезку натурального ряда, называются бесконечными.

Определение мощности конечного множества и класса

Мощностью конечного множества или класса называется натуральное количество его элементов n.

Определение равномощности конечных множеств и классов

Два конечных множества или класса являются равномощными тогда и только тогда, когда количество их элементов выражается одним и тем же натуральным числом n.

Определение множественной равномощности бесконечных множеств и классов

Два множественно эквивалентные друг другу бесконечные множества (или классы) называются множественно равномощными.

<u>Определение общего множественного кардинального числа для бесконечных множеств и классов</u>

Если два бесконечных множества или класса множественно эквивалентны, то говорят, что они имеют бесконечное общее множественное кардинальное число.

Последнее определение нуждается в пояснении. Необходимо отметить, что имеются существенные логические различия в логической природе мощностей конечных и бесконечных множеств и классов. Мощность заданного конечного множества является постоянным конечным натуральным числом, в то время как бесконечное общее множественное кардинальное число, определяется в результате установления порядка взаимно однозначного соответствия между двумя бесконечными множествами и классами. Вследствие этого обстоятельства, аналитическое выражение бесконечного общего множественного кардинального числа может существенно зависеть от характера и свойств рассматриваемого соответствия.

В теории множеств и классическом математическом анализе исследование бесконечности осуществляется с помощью бесконечных величин, которые являются носителями свойств, как актуальной, так и потенциальной бесконечности. Бесконечные общие множественные кардинальные числа выражают актуально-бесконечный характер бесконечного множества. Но одновременно с этим в классическом математическом анализе существует понятие бесконечно большой величины (которая выражает свойство бесконечного количества), логико-аналитический характер которой раскрывает приводимое ниже определение.

<u>Определение бесконечно большой величины</u>

Переменная $s(n)$ называется бесконечно большой, если она для достаточно больших натуральных значений n становится, и остается по абсолютной величине большей сколь угодно большого наперед заданного числа $E>0$:

$$|s(n)| > E, (n > N_0) \tag{2.5.8}$$

Необходимо подчеркнуть, что в приведенном выше определении, мы имеем дело с переменной величиной, которая лишь в процессе своего изменения может сделаться большей сколь угодно большого произвольно взятого числа $E>0$.

Бесконечно большая величина характеризуется стремлением к бесконечности:

$$|s(n)| \to \infty \tag{2.5.9}$$

С целью логического распространения количественного характера мощности конечных множеств на бесконечные множества примем следующее определение.

<u>Определение количественного кардинального числа для бесконечных множеств и классов</u>

Количественным кардинальным числом бесконечного множества или класса, количество элементов которого выражается натуральной функцией $|c(n)|$ ***натурального аргумента*** n ***, стремящаяся к бесконечности при стремлении*** $n \to \infty$ ***, называется бесконечно большая величина***

$$C_n = |c(n)|(n \to \infty)$$

В классическом математическом анализе бесконечные количественные кардинальные числа называют также «несобственными числами».

Первой, из так называемых элементарных бесконечных мощностей, в классической теории множеств рассматривается мощность всех натуральных чисел. Кардинальное число множества всех натуральных чисел обозначается как $\aleph_0$ (алеф-нуль, алеф – первая буква ивритского алфавита). Согласно /2/ - $\aleph_0$ выражается следующим соотношением:

$$\aleph_0 = 1+1+1+1+......... \qquad (2.5.10)$$

Таким образом, в соответствии с (2.5.10), - $\aleph_0$ обладает свойствами количественного кардинального числа. В соответствии с классическим математическим анализом, соотношение (2.5.10) означает, что $\aleph_0$ является суммой бесконечного ряда единиц, а по терминологии канторовской теории множеств $\aleph_0$ - является начальным кардинальным числом.

С другой стороны, в соответствии с классической канторовской теорией множеств, $\aleph_0$ является множественным кардинальным числом. Если некоторое бесконечное множество взаимнооднозначно отображается на множество натуральных чисел, то говорят, что это множество счетно, множественно эквивалентно множеству натуральных чисел и имеет множественное кардинальное число $\aleph_0$, или что то же самое – мощность $\aleph_0$.

Если X множество, то множество, являющееся множеством его подмножеств обозначается как $P(X)$. Мощность множества X обозначается $|X|$, мощность множества $P(X)$ обозначается через $|P(X)|$.

Перейдем к рассмотрению «Теоремы Кантора». Красным цветом выделены фрагменты доказательства, на которые следует обратить самое пристальное внимание при анализе логических свойств доказательства «Теоремы Кантора».

Теорема Кантора

Любое множество менее мощно, чем множество всех его подмножеств.

Доказательство

Допустим, что существует множество A, равномощное множеству всех его подмножеств $P(A)$. **Тогда существует взаимно однозначное соответствие (биекция)** f, **ставящая в соответствие каждому элементу** множества A, некоторое его подмножество Y, что может быть выражено в следующем виде:

$$\exists A \exists C \exists f \exists Y \forall C (C \in A) \exists Y : (Y = f(C)) \wedge (Y \subseteq A) \qquad (2.5.11)$$

(Обратим внимание на существенную деталь. Прежде чем перейти к дальнейшему доказательству, необходимо удостоверится в конструктивном существовании биекции f и объектов, перечисленных в соотношении (2.5.11). Однако в стандартных версиях доказательства «Теоремы Кантора» это соотношение, как правило, отсутствует вовсе).

Рассмотрим множество B, удовлетворяющее соотношению :

$$B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin f(x))\} \qquad (2.5.12)$$

(В формуле (2.5.12) не доказано существование объектов x, удовлетворяющих сформулированному характеристическому свойству, поскольку не приведена реальная структура взаимно однозначного соответствия между множествами A и $P(A)$. В классической аристотелевской традиционной логике это характеризуется как логическая ошибка «petitio principii» - «предвосхищение основания»)

f биективно, а для B выполняется соотношение:

$$B \subseteq A \qquad (2.5.13)$$

Поэтому существует такой объект y, **для которого**:

$$(y \in A) \wedge (f(y) = B) \qquad (2.5.14)$$

Теперь посмотрим, может ли y принадлежать B.

Если $y \in B$, то в соответствии с (2.5.12) - $y \in A$, поэтому в соответствии с (2.5.12) :

$$y \notin f(y) \qquad (2.5.15)$$

С другой стороны в соответствии с (2.5.11), поскольку $y \in A$, то существует Y для которого

$$Y = f(y) \qquad (2.5.16)$$

Из сопоставления (2.5.15) и (2.5.16) следует:

$$y \notin Y \qquad (2.5.17)$$

Из сопоставления (2.5.11) и (2.5.17) следует:

$$y \notin f(C) \qquad (2.5.18)$$

Таким образом из сопоставления сотношений (2.5.11), (2.5.12), (2.5.14), (2.5.17), (2.5.18) следует, что объект $y \in A$, определяемый соотношением (2.5.14), не принадлежит взаимно однозначному соответствию, определяемому соотношением (2.5.11). Это означает, что из сделанного допущения $y \in B$, в рассматриваемом случае мы пришли к противоречию с исходным предположением о существовании взаимно однозначного соответствия между множеством A и множеством всех его подмножеств $P(A)$.

Рассмотрим теперь вторую возможность, а именно:

$$y \notin B \qquad (2.5.19)$$

Тогда из сопоставления (2.5.12) и (2.5.19) следует:

$$y \notin f(y) \qquad (2.5.20)$$

Из сопоставления соотношений (2.5.14), (2.5.19) и (2.5.20) следует:

$$(y \in A) \wedge (y \notin f(y)) \wedge (f(y) = B) \wedge \left(y \notin B\right) \qquad (2.5.21)$$

Из сопоставления сотношений (2.5.12) и (2.5.21) следует:

$$(y \in B) \wedge (f(y) = B) \wedge \left(y \notin B\right) \equiv 0 \qquad (2.5.22)$$

Согласно полученному соотношению (2.5.22) можно заключить, что и в этом рассматриваемом случае мы пришли к противоречию. Именно к такому двойному противоречию и приходят при стандартном доказательстве «Теоремы Кантора».

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса, - является ли «Теорема Кантора» верной во всех случаях. Критерием истинности в этом вопросе, с точки зрения классической аристотелевской традиционной логики, в данном случае служит следующее правило опровержения, формулировка которого приведена ниже.

Правило опровержения

Если истинность некоторого суждения утверждается для всех возможных случаев из числа рассматриваемых, и тем самым содержит логический квантор всеобщности по отношению ко всем случаям из числа рассматриваемых, то для его опровержения достаточно найти хотя бы один случай из числа рассматриваемых, для которого упомянутое суждение является ложным.

Для адекватного решения вопроса об истинности «Теоремы Кантора» для всех случаев, в первую очередь необходимо еще раз рассмотреть определение понятия множества.

Определение множества

Множеством называется класс, удовлетворяющий следующему условию:

$$Set(Cx) = \{x : (\forall x)(C(x)) \wedge (\forall y(C(y) \oplus \neg C(y)\} \tag{2.5.23}$$

Формула (2.5.23) означает, что множеством является такой класс, элементы которого удовлетворяют характеристическому свойству $C(x)$, и, кроме этого для каждого объекта y на основании закона об исключенном третьем можно решить, удовлетворяет ли он характеристическому свойству $C(x)$, либо нет. *Этим самым осуществляется требование одного из основных законов классической традиционной аристотелевской логики – закона об исключенном третьем.*

В отношении универсального класса-множества U нами была доказана «Теорема экзистенциальности универсального множества», согласно которой конструктивно существующий универсальный класс U является одновременно и универсальным множеством.

Для мощности (кардинального числа) класса или множества Y используется также следующее обозначение:

$$CardY = |Y| \tag{2.5.24}$$

Множество или класс Y, являющееся множеством (классом) всех подмножеств (подклассов) множества или класса X, обозначается следующим образом:

$$Y = P(X) \tag{2.5.25}$$

Кардинальное число пустого множества $\varnothing$ считается равным 0. Кардинальное число непустого бесконечного класса или множества является бесконечно большой величиной.

Одним из ключевых моментов в логическом развитии основ теории классов и множеств представляет собой логически корректное решение вопроса – является ли пустое множество $\varnothing$ подмножеством непустого класса Z. Поскольку этот вопрос по своему существу является весьма спорным и неоднозначным, то для его решения мы привлечем логически корректное формальное определение понятия подмножества, данного в работе /3/, позволяющее считать, что $\varnothing$ - является подмножеством каждого непустого или пустого класса Z.

<u>Определение понятия подмножества и подкласса</u>

Класс или множество X называется подклассом или подмножеством класса или множества Z тогда и только тогда, когда не существует ни одного такого элемента X, который не являлся бы элементом Z, или формально:

$$(X \subseteq Z) \Leftrightarrow \neg(\exists x : (x \in X \wedge x \notin Z)) \qquad (2.5.26)$$

Пустое множество $\varnothing$ равно самому себе и является своим собственным подмножеством. Рассмотрим теперь тот случай, когда имеется пустое множество и непустой класс или множество Z. Подставим приведенные выше символы в соотношение (2.5.26) и произведем истинностную оценку полученной формулы:

$$[(\varnothing \subseteq Z) \Leftrightarrow \neg(\exists x : (x \in \varnothing \wedge x \notin Z))] \equiv 1 \qquad (2.5.27)$$

Из соотношения (2.5.27) следует, что для классов или множеств $\varnothing$ и Z - соотношение (2.5.27) выполняется. Следовательно имеет место соотношение:

$$\varnothing \subseteq Z \qquad (2.5.28)$$

Таким образом мы видим, что существует такое формально-логически корректное определение подмножества, которое позволяет в рамках системы ZF считать пустое множество $\varnothing$, - подмножеством каждого пустого или непустого класса или множества Z.

Рассмотрим теперь характер отношения эквивалентности или неэквивалентности между универсальным классом-множеством U и множеством всех его подмножеств $P(U)$. Рассмотрим следующее определение.

<u>Определение сингулярного кардинального числа и сингулярного класса</u>

Кардинальное число $SCardX$ класса или множества X, называется сингулярным в том, и только в том случае, если выполняется соотношение:

$$SCardX = CardX = CardP(X) = |X| = |P(X)| \qquad (2.5.29)$$

где $P(X)$ - множество всех подмножеств класса или множества. Класс или множество, имеющее сингулярное кардинальное число,- называется сингулярным

Докажем следующее утверждение.

Теорема о сингулярном множестве и сингулярном кардинальном числе

(Ахвледиани А.Н. – 2011)

Существует бесконечное непустое сингулярное множество, имеющее сингулярное кардинальное число. Универсальный класс-множество U является сингулярным.

Доказательство

Рассмотрим универсальный класс-множество U и множество его подмножеств $P(U)$. В соответствии с определением U, каждый элемент класса $P(U)$ одновременно принадлежит и U. Поэтому имеет место соотношение:

$$(\forall x : x \in P(U) \Rightarrow x \in U) \Rightarrow (P(U) \subseteq U) \qquad (2.5.30)$$

В соответствии с определением U универсальный класс содержит в качестве элементов все классы, как пустой класс, так и каждый непустой, конечный или бесконечный. Поэтому каждый класс X, принадлежащий классу U, является его подмножеством и вследствие этого одновременно является элементом класса $P(U)$ т.е. имеет место соотношение:

$$(\forall X : (X \in U \Rightarrow X \subseteq U) \Rightarrow (X \in P(U)) \Rightarrow (U \subseteq P(U)) \qquad (2.5.31)$$

Из сопоставления соотношений (2.5.30) и (2.5.31) и «Аксиомы экстенсиональности» следует:

$$U = P(U) \qquad (2.5.32)$$

Из соотношения (2.5.32) следует:

$$CardU = CardP(U) = SCardU = SCardP(U) = |U| = |P(U)| \qquad (2.5.33)$$

Соотношение (2.5.33) доказывает выдвинутую гипотезу о существовании бесконечного сингулярного множества и сингулярного кардинального числа. Теорема доказана.

Таким образом мы видим, что U - является сингулярным классом-множеством, равным и равномощным множеству всех своих подмножеств $P(U)$. Кроме этого, для утверждения об эквивалентности сингулярных множеств U и $P(U)$ нам *не понадобилось строить множественную эквиваленцию между ними*, поскольку вопрос об их эквивалентности разрешился непосредственно, путем установления равенства между ними. Равенство и равномощность множеств U и $P(U)$ согласно «Правилу опровержения» и является контр-примером, опровергающим общность «Теоремы Кантора». Таким образом, в общем случае – «Теорема Кантора» не является верной.

Тем не менее, представляет интерес рассмотрение логических особенностей доказательства «Теоремы Кантора» с учетом полученных нами результатов о сингулярности универсального класса-множества U. Возвращаясь к рассмотренному нами доказательству «Теоремы Кантора» мы видим, что с учетом полученных нами результатов, формула (2.5.12) в случае сингулярного универсального класса-множества U, содержит «petitio principii», которое перерастает в «error fundamentalis» (ложное основное положение в доказательстве). Это происходит по той причине, что в случае универсального класса U, в качестве биекции f рассматривается отображение U на самого себя (или что то же самое на $P(U)=U$), а *множество* B *оказывается в этом случае пустым*, поскольку для универсального класса U, при отображении на себя, каждый его элемент принадлежит и $P(U)=U$. В рассматриваемом случае имеем:

$$B=\varnothing \qquad (2.5.34)$$

Что же касается формулы (2.5.14), то в случае универсального класса $U=P(U)$, мы имеем отображение класса $U=P(U)$ - на себя самого, причем это отображение является одновременно эквиваленцией. Поэтому соотношение (2.5.14) принимает следующий вид:

$$(y\in U)\wedge(f(y)=y) \qquad (2.5.35)$$

В том случае, когда $y=\varnothing$, будем иметь:

$$(\varnothing\in U)\wedge(f(\varnothing)=\varnothing) \qquad (2.5.36)$$

В этом случае формула (2.5.35) выполняется *и противоречия не возникает*. Формула (2.5.36) означает, что пустое множество, как элемент универсального класса множества U, отображается на самого себя при рассматриваемой отображении f универсального класса U на себя (или что то же самое на $P(U)=U$).

Однако, предположив $y\neq\varnothing$, **мы впадаем в противоречие со свойствами отображения** f **как отображения U на себя**, что сразу же влечет за собой возникновение еще и другого противоречия, а именно с учетом (2.5.35) получим:

$$y=f(y)\neq\varnothing \qquad (2.5.37)$$

С другой стороны, с учетом (2.5.34) формула (2.5.14) – принимает вид:

$$(y\in U)\wedge(f(y)=\varnothing) \qquad (2.5.38)$$

Мы видим, что в рассматриваемом случае формула (2.5.38) содержит на условиях конъюнкции подформулу, логически несовместную с соотношением (2.5.37), что свидетельствует о получении противоречия. Таким образом можно заключить, что **именно предположение** $y \neq \varnothing$ в сочетании с формулами (2.5.12) и (2.5.14) стандартного доказательства «Теоремы Кантора», приводят в конечном итоге к возникновению противоречия в случае сингулярного универсального класса-множества U. *Именно эти обстоятельства и являются источником возникновения серьезных логических проблем*, возникающих в связи с доказательством и дальнейшим применением «Теоремы Кантора» в классической теории множеств.

2.6 Логический анализ «Парадокса Кантора»

В теории множеств «Парадокс Кантора» наряду с « Теоремой Кантора» играет важную роль в дальнейших логико-аналитических построениях. Как известно, теорема Кантора формулируется следующим образом.

Теорема Кантора

Любое множество менее мощно, чем множество всех его подмножеств.

В предыдущем параграфе нами было показано, что в случае сингулярного универсального класса-множества U «Теорема Кантора» не является верной. А именно, имеет место следующее утверждение, - универсальный сингулярный класс-множество U, является равным и равномощным множеству всех своих подмножеств $P(U)$, что формально выражается следующим соотношением в кардинальных числах:

$$CardU = CardP(U) = SCardU = SCardP(U) = |U| = |P(U)| \qquad (2.6.1)$$

Как будет показано далее, это обстоятельство позволяет разрешить так называемый «Парадокс Кантора» , стандартная версия которого изложена ниже, с добавленными нашими комментариями, выделенными курсивом. Фрагменты логического анализа, на которые надо обратить пристальное внимание при исследовании логической природы «Парадокса Кантора», и которые в конечном счете и приводят к парадоксу, выделены красным цветом.

Парадокс Кантора

Предположим, что класс всех самотождественных множеств существует и выражается соотношением:

$$V = \{x : x = x\} \qquad (2.6.2)$$

(Обратим внимание на то обстоятельство, что согласно (2.6.2), класс V является *классом всех самотождественных множеств*).

В этом случае для множеств x и $t = t \neq \varnothing$, удовлетворяющих (2.6.2), справедливо следующее соотношение:

$$\forall x \forall t (x \in t \Rightarrow x \in V) \tag{2.6.3}$$

Соотношение (2.6.3) означает, что t является подмножеством множества V .

$$t \subseteq V \tag{2.6.4}$$

Из (2.6.4) следует:

$$\forall t : |t| \leq |V| \tag{2.6.5}$$

(2.6.5) означает, что мощность множества t не превышает мощности множества V :

Но в силу «Аксиомы степени», для множества V , как и для всякого множества существует множество всех его подмножеств $P(V)$, **и по «Теореме Кантора»:**

$$|P(V)| > |V| \tag{2.6.6}$$

Соотношение (2.6.6) вступает в противоречие с соотношением (2.6.5). **Следовательно сделанное предположение неверно и множества** V **не существует.**

Однако, как упоминалось выше, нами в предыдущем параграфе было показано, что «Теорема Кантора» не является верной в случае универсального класса-множества U . Это означает, что соотношение (2.6.6) является в общем случае недоказуемым. Таким образом, именно то обстоятельство, что «Теорема Кантора» в общем случае не является верной и является одной из причин возникновения «Парадокса Кантора. Кроме этого в силу справедливости соотношений (2.6.3) и (2.6.4), - соотношение (2.6.5) является безусловно верным, и, следовательно, *его отрицание по меньшей мере является логически недоказуемым*.

Рассмотрим вопрос, насколько возможно в принципе, в рамках аристотелевской классической традиционной логики отвергать существование класса V всех самотождественных множеств. Как известно, понятие самотождественности объектов, классов и множеств непосредственно согласуется с первым законом классической аристотелевской традиционной логики – законом тождества. Кроме этого самотождественность каждого множества следует из аксиомы экстенсиональности. Следовательно, *отрицание существования всего класса самотождественных множеств* является логически невозможным с точки зрения традиционной аристотелевской логики.

Глава 3

Исследование феномена логической трансценденции в основаниях классической формальной логики нулевого порядка и системе ZFC теории множеств

3.1 Теоремы о логической трансценденции в классической формальной логике нулевого порядка

В настоящем параграфе сформулированы и доказаны теоремы о логической трансценденции в основаниях классической формальной логики нулевого порядка. Показано, что логическая трансценденция по отношению к классической аристотелевской традиционной логике, представляет собой закономерное явление, непосредственно вытекающее из самих основ современной классической формальной логики нулевого порядка, глобальная непротиворечивость которой установлена выдающимся австрийским логиком – Куртом Геделем.

Рассмотрим определение аристотелевской формально-логически истинной формулы.

<u>Определение аристотелевской формально-логически истинной формулы</u>

Логическая формула, полностью удовлетворяющая трем основным законам классической аристотелевской традиционной логики, значения истинности которой в классической формальной логике нулевого порядка равны логической 1, при всех значениях, входящих в нее логических переменных, - называется аристотелевской формально-логически истинной формулой.

Перейдем к рассмотрению понятия логической трансценденции. Под логической трансценденцией (от лат. transcendentis – перешагивающий, выходящий за пределы) по отношению к классической аристотелевской формальной логике мы понимаем конструктивное существование и выводимость в рамках современной класической формальной логики нулевого порядка таких логических формул, которые не соответствуют второму или третьему основным законам классической аристотелевской традиционной логики и тем самым выходят за пределы упомянутой логической системы.

<u>Определение логически слабо трансцендентной формулы</u>

Логическая формула *G* ***классической формальной логики нулевого порядка называется логически слабо трансцендентной по отношению к классической***

аристотелевской традиционной логике, если и сама формула G и ее отрицание $\neg G$ являются непротиворечивыми и вместе с тем недоказуемыми.

Сформулируем и докажем следующее утверждение.

Теорема о слабой логической трасценденции в классической формальной логике нулевого порядка (Ахвледиани А.Н. – 2011)

На множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка существуют логически слабо трансендентные формулы G и $\neg G$ по отношению к классической традиционной аристотелевской логике.

Доказательство

Пусть логическая формула G определена следующим образом:

$$G \equiv g2x \equiv \langle 0,1 \rangle \tag{3.1.1}$$

Тогда ее отрицание $\neg G$ имеет следующий вид:

$$\neg G \equiv g1x \equiv \langle 1,0 \rangle \tag{3.1.2}$$

Из соотношений (3.1.1) и (3.1.2), а также правил классической формальной логики нулевого порядка следует, что каждая из формул G и $\neg G$ является непротиворечивой и вместе с тем недоказуемой. Это означает, что в отношении ни одной из них в отдельности мы не можем утверждать об ее аристотелевской истинности. Действительно:

$$(G \equiv g2x \equiv 1) = \langle 0,1 \rangle \tag{3.1.3}$$

$$(\neg G \equiv g1x \equiv 1) = \langle 1,0 \rangle \tag{3.1.4}$$

Формула (3.1.3) означает, что утверждение об истинности логической формулы G является недоказуемым. Формула (3.1.4) означает, что утверждение об истинности логической формулы $\neg G$ является недоказуемым. Таким образом мы видим, что ни одна из логических формул G, $\neg G$ по отдельности не является тождественно истинной аристотелевской формулой. Кроме этого, логические формулы $G, \neg G$ не удовлетворяют третьему основному закону классической традиционной аристотелевской логики. С другой стороны они удовлетворяют определению логически слабо трансцендентных логических формул. Таким образом мы видим, что на множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка, существуют логически слабо трансцендентные формулы G и $\neg G$. Теорема доказана.

Рассмотрим определение логически предельно трансцендентной формальной системы.

<u>Определение логически предельно трансцендентной формальной системы</u>

Формальная логическая система называется логически предельно трансцендентной, если является доказуемым, что на множестве логических формул этой системы выводима хотя бы одна из логически предельно трансцендентных логических формул, что формально может быть выражено следующим образом:

$$[(B1 \wedge B2 \wedge B3 \wedge ...Bm \wedge ...BM) \Rightarrow (C \wedge \neg C)] \equiv 1 \qquad (3.1.5)$$

$$[(B1 \wedge B2 \wedge B3 \wedge ...Bm \wedge ...BM) \Rightarrow (\neg C \wedge \neg\neg C)] \equiv 1 \qquad (3.1.6)$$

Сформулируем и докажем следующее утверждение.

<u>Теорема о предельной логической трансцендентности классической формальной логики нулевого порядка (Ахвледиани А.Н. – 2011)</u>

Классическая формальная логика нулевого порядка является логически предельно трансцендентной формальной логической системой. На множестве унарных логических операций выводима по крайней мере одна логически предельно трансцендентная формула.

Доказательство

Из рассмотрения **Таблицы 1** унарных логических операций следует, что каждая из формул $g1x$ и $g2x$ по отдельности, является непротиворечивой. Однако, несмотря на это, их конъюнкция является формально тождественно противоречивой:

$$(g1x \wedge g2x) \equiv \langle 1,0 \rangle \wedge \langle 0,1 \rangle \equiv \langle 0,0 \rangle \qquad (3.1.7)$$

Из соотношения (3.1.7) и логического закона Дунса Скота следует:

$$[(g1x \wedge g2x) \Rightarrow (\neg g1x \wedge \neg\neg g1x)] \equiv [\langle 0,0 \rangle \Rightarrow \langle 0,0 \rangle] \equiv \langle 1,1 \rangle \qquad (3.1.8)$$

Из формулы (3.1.8) и определения логически предельно трансцендентной формальной системы следует, что выводимость логически предельно трансцендентной формулы $(\neg g1x \wedge \neg\neg g1x)$ на множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка является тождественно доказуемой. *Поэтому классическая формальная логика нулевого порядка является логически предельно трансцендентной формальной логической системой.* Теорема доказана.

3.2 О логических свойствах «Аксиомы выбора» и генезис множественной логической трансценденции в классической системе теории множеств - ZFC .

В настоящем параграфе, с учетом известных результатов Курта Геделя и Герхарда Генцена в отношениии классической логико-математической аксиоматической системы **PA** Джзузеппе Пеано, сформулирована и доказана «Теорема о генезисе логической трансценденции в основаниях классической теоретико-множественной математики». Показано, что сочетание «Метода математической индукции» с глобально непротиворечивой классической формальной логикой нулевого порядка и «Аксиомой выбора» является достаточным условием для генезиса логически предельно трансцендентной формальной системы в основаниях классической теоретико-множественной математики.

Как известно, выдающимся австрийским логиком Куртом Геделем было показано существование в классических математических теориях, содержащих аксиоматическую логико-математическую аксиоматическую систему выдающегося итальянского математика Джузеппе Пеано с присоединенной к ней «Методом математической индукции» **(PA&MI)**, таких логически трансцендентных по отношению к классической аристотелевской традиционной логике, логических формул F и ⌐F, которые с одной стороны хотя и не отрицают закона об исключенном третьем, но с другой стороны и не удовлетворяют ему. При этом первая теорема Геделя по существу означает, что если достаточно богатая формальная или полуформальная математическая теория, содержащая аксиоматику Пеано, является непротиворечивой, то в ней существуют логически трансцендентные формулы F и ⌐F, которые не могут быть ни доказаны, ни опровергнуты на основании классической аристотелевской традиционной логики и «Аксиоматической системы Пеано»

Приведем формулировки теорем Курта Геделя о неполноте формальных и полуформальных логико-математических систем, содержащих систему **(PA&MI)**.

Первая теорема Геделя

Существует такое суждение F в аксиоматической системе PA&MI, что ни F, ни ⌐F не могут быть доказаны посредством аксиом из PA&MI, если система (PA&MI) непротиворечива.

Вторая теорема Геделя

Непротиворечивость аксиоматической системы (PA&MI) (Consis(PA&MI)), не может быть доказана в (PA&MI), если (PA&MI) является непротиворечивой.

Ниже приводится содержание традиционной версии аксиоматической системы Пеано – PA.

Аксиомы Пеано

1. ***1 есть натуральное число.***
2. ***Для каждого натурального числа n имеется точно одно натуральное число, называемое его последующим и обозначаемое $S(n)$.***
3. ***Всегда имеет место сотношение $S(n) \neq 1$.***
4. ***Из равенства $S(n) = S(m)$ следует $m = n$.***
5. ***Принцип полной индукции. Множество N_+ натуральных чисел, содержащее 1 и для каждого из n элементов следующий за ним элемент $S(n)$, содержит все натуральные числа.***

Арифметика Пеано

Сложение и умножение натуральных чисел определяется формулами:

$$S(n) = n + 1 \tag{3.2.1}$$

$$S(m + n) = m + S(n) \tag{3.2.2}$$

$$n \cdot 1 = n \tag{3.2.3}$$

$$n \cdot S(m) = n \cdot m + n \tag{3.2.4}$$

Необходимо отметить, что кроме аксиоматической системы Пеано, - PA, включающей в себя «Аксиомы Пеано» и «Арифметику Пеано», основания классической математики **(PA&MI)** включают в себя также «Метод математической индукции», формулировка которого приводится ниже.

Метод математической индукции

Если некоторое утверждение $A(n), n = 1,2,3.........$ справедливо для $n = 1$, и для каждого n из справедливости $A(n)$ при значении n следует справедливость $A(n+1)$ при $n+1$, то утверждение $A(n)$- справедливо для всех натуральных n, или формально:

$$(\forall n \in N_+)((\forall i \in \{1,...n\})A(n) \equiv 1 \Rightarrow A(n+1) \equiv 1) \Rightarrow (\forall n \in N_+)(A(n) \equiv 1) \tag{3.2.5}$$

Как известно выдающимся немецким математиком Герхардом Генценом в 1936 году была доказана совместность аксиом Пеано и арифметики Пеано, однако для этого ему пришлось добавить к логике первого порядка дополнительную аксиому о бескванторной индукции. Тем самым Герхардом Генценом была завершена программа Давида Гильберта по формализации оснований математики. Необходимо подчеркнуть, что результаты, полученные Герхардом Генценом не вступают в противоречие с теоремами Геделя, наоборот исследование и результаты Герхарда Генцена являются косвенным подтверждением «Второй теоремы Геделя» поскольку Генцену для обоснования внутренней логической непротиворечивости аксиоматической системы **PA** пришлось добавить к логике первого порядка дополнительную аксиому о бескванторной индукции.

Из сопоставления результатов Курта Геделя и Герхарда Генцена в отношении аксиоматической системы **PA** вытекает важное следствие – можно утверждать, что аксиоматическая система **PA** является внутренне непротиворечивой в смысле логической совместности основных арифметических аксиом этой системы, а это в соответствии с «Первой теоремой Геделя» означает, что в каждой математической теории первого порядка, основанной на системе **PA** существуют логически трансцендентные по отношению к аристотелевской традиционной формальной логике формулы F и ¬F, которые не могут быть ни доказаны, ни опровергнуты на основании классической аристотелевской традиционной логики и аксиоматической системы Пеано **PA**.

Для дальнейшего изложения нам понадобится «Аксиома выбора» из системы **ZFC** теории множеств, словесная формулировка которой приводится ниже.

Аксиома выбора

Для каждого семейства B непустых непересекающихся множеств существует по меньшей мере одно непустое множество D, которое имееет только один общий элемент c с каждым из множеств $b \in B$ данного семейства.

Рассмотрим следующее определение.

Определение логического коллапса

Логическим коллапсом (тотальным ослаблением истинности) называется такая логическая ситуация, когда в некоторой формальной или полуформальной логико-математической теории T, становится логически конструктивно осуществимым выведение на основе непротиворечивых логических формул, - тождественно противоречивой логической формулы или формул на множестве унарных, бинарных, тернарных или в общем случае n - арных логических операций.

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема о логическом коллапсе в системе PA&MI&AB в рамках классической формальной логики нулевого порядка (Ахвледиани А.Н. – 2011)

Сочетание классической формальной логики нулевого порядка, «Метода математической индукции» и «Аксиомы выбора», является достаточным условием для конструктивной осуществимости множественного логического коллапса в каждой формальной или полуформальной логико-математической теории, содержащей классическую формальную логику нулевого порядка, «Метод математической индукции» и «Аксиому выбора».

Доказательство

Пусть B - непустое семейство непустых непересекающихся множеств $b1, b2, b3,$ логических формул, определенных на множестве унарных логических операций следующим образом.

$b1$ - есть счетное множество непротиворечивых, логически слабо трансцендентных формул $a11, a12, a13, ... a1n, ...,$ логическая структура каждой из которых совпадает с логической структурой непротиворечивой формулы $g1(x)$ на множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка**.**

$b2$ - есть счетное множество непротиворечивых, логически слабо трансцендентных формул $a21, a22, a23, ... a2n, ...,$ логическая структура каждой из которых совпадает с логической структурой непротиворечивой формулы $g2(x)$ на множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка**.**

$b3$ - есть счетное множество тождественно истинных логических формул $a31, a32, a33, ... a3n, ...,$ логическая структура каждой из которых совпадает с логической структурой тождественно истинной формулы $g3(1)$ на множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка**.**

Кортежи $d1, d2, d3, ..., ..., dn, ...$ логических формул, определим следующим образом на основе «Аксиомы выбора»:

$$d1 = \langle a11, a21, a31 \rangle \quad (3.2.6)$$

$$d2 = \langle a12, a22, a32 \rangle \quad (3.2.7)$$

$$d3 = \langle a13, a23, a33 \rangle \quad (3.2.8)$$

....

$$dn = \langle a1n, a2n, a3n \rangle \quad (3.2.9)$$

....

Определим кортеж $LCU = \langle lc1, lc2, lc3, ..., lcn, ... \rangle$ логических формул следующим образом.

$$lc1 \equiv (a11 \wedge a21 \wedge a31) \quad (3.2.10)$$

$$lc2 \equiv (a12 \wedge a22 \wedge a32) \quad (3.2.11)$$

$$lc3 \equiv (a13 \wedge a23 \wedge a33) \qquad (3.2.12)$$

....

$$lcn \equiv (a1n \wedge a2n \wedge a3n) \qquad (3.2.13)$$

....

Из способа определения множеств $b1, b2, b3$ непротиворечивых логических формул множества унарных логических операций глобально непротиворечивой классической формальной логики нулевого порядка и формул (3.2.10)-(3.2.13) следует:

$$lc1 \equiv (\langle 1{,}0\rangle \wedge \langle 0{,}1\rangle \wedge \langle 1{,}1\rangle) \equiv \langle 0{,}0\rangle \qquad (3.2.14)$$

$$lc2 \equiv (\langle 1{,}0\rangle \wedge \langle 0{,}1\rangle \wedge \langle 1{,}1\rangle) \equiv \langle 0{,}0\rangle \qquad (3.2.15)$$

$$lc3 \equiv (\langle 1{,}0\rangle \wedge \langle 0{,}1\rangle \wedge \langle 1{,}1\rangle) \equiv \langle 0{,}0\rangle \qquad (3.2.16)$$

....

$$lcn \equiv (\langle 1{,}0\rangle \wedge \langle 0{,}1\rangle \wedge \langle 1{,}1\rangle) \equiv \langle 0{,}0\rangle \qquad (3.2.17)$$

....

Из определения кортежа $LCU = \langle lc1, lc2, lc3, ..., lcn, ...\rangle$ и формул (3.2.14) – (3.2.17) следует:

$$LCU = \langle \langle 0{,}0\rangle, \langle 0{,}0\rangle, \langle 0{,}0\rangle, ..., \langle 0{,}0\rangle, ...\rangle \qquad (3.2.18)$$

Формула (3.2.18) и означает конструктивную выводимость множественного логического коллапса, полученного на основе конъюнкции непротиворечивых логических формул множества унарных логических операций, законов глобально непротиворечивой классической формальной логики нулевого порядка и «Аксиомы выбора». Теорема доказана.

Рассмотрим следующее определение.

<u>Определение счетного кортежа логического коллапса на множестве унарных логических операций</u>

Кортеж, определяемый формулой (3.2.18):

$$LCU = \langle\langle 0{,}0\rangle, \langle 0{,}0\rangle, \langle 0{,}0\rangle, ..., \langle 0{,}0\rangle, ...\rangle$$

называется счетным кортежем логического коллапса на множестве унарных логических операций.

Рассмотрим следующее определение.

<u>Определение счетного кортежа истинности на множестве унарных логических операций</u>

Кортеж $U1$***, определяемый формулой:***

$$U1 = \langle\langle 1{,}1\rangle, \langle 1{,}1\rangle, \langle 1{,}1\rangle, ..., \langle 1{,}1\rangle, ...\rangle \qquad (3.2.19)$$

называется счетным кортежем истинности на множестве унарных логических операций.

Сформулируем и докажем следующую теорему.

<u>Теорема о генезисе логической трансценденции в основаниях классической теоретико-множественной математики (Ахвледиани А.Н. – 2011)</u>

Конструктивное существование счетного кортежа LCU ***логического коллапса на множестве унарных логических операций, является достаточным условием для генезиса и существования счетного кортежа истинности*** $U1$***, свидетельствующего о конструктивной осуществимости генезиса логической трансценденции на множестве унарных логических операций в каждой логико-математической формальной или полуформальной теории, содержащей классическую формальную логику нулевого порядка, «Метод математической индукции» и «Аксиому выбора».***

Доказательство

Рассмотрим множество логических формул, определенных следующим образом:

$$S1 \equiv [(a11 \wedge a21 \wedge a31) \Rightarrow (\neg g1(x) \wedge \neg\neg g1(x))] \equiv \langle 0{,}0\rangle \Rightarrow \langle 0{,}0\rangle \equiv \langle 1{,}1\rangle \qquad (3.2.20)$$

$$S2 \equiv [(a12 \wedge a22 \wedge a32) \Rightarrow (\neg g1(x) \wedge \neg\neg g1(x))] \equiv \langle 0{,}0\rangle \Rightarrow \langle 0{,}0\rangle \equiv \langle 1{,}1\rangle \qquad (3.2.21)$$

$$S3 \equiv [(a13 \wedge a23 \wedge a33) \Rightarrow (\neg g1(x) \wedge \neg\neg g1(x))] \equiv \langle 0{,}0\rangle \Rightarrow \langle 0{,}0\rangle \equiv \langle 1{,}1\rangle \qquad (3.2.22)$$

....

$$Sn \equiv [(a1n \wedge a2n \wedge a3n) \Rightarrow (\neg g1(x) \wedge \neg\neg g1(x))] \equiv \langle 0{,}0\rangle \Rightarrow \langle 0{,}0\rangle \equiv \langle 1{,}1\rangle \qquad (3.2.23)$$

……………………

Кортеж, составленный из логических векторов, полученных в результате формул (3.2.20)-(3.2.21) равен счетному кортежу истинности $U1$:

$$\langle\langle 1,1\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 1,1\rangle,\ldots,\langle 1,1\rangle,\ldots\rangle = U1 \qquad (3.2.24)$$

Полученное соотношение (3.2.24) означает доказательство сформулированной нами теоремы.

Глава 4

Два принципа логико-математической трансценденции системы INCOL&TAMLA и «Вторая проблема Гильберта»

4.1 Первый принцип логико-математической трансценденции системы INCOL&TAMLA

В настоящем параграфе приведены формулирировка и доказательство **«Первого принципа логико-математической трансценденции»** системы **INCOL&TAMLA** , свидетельствующего о том, что второй и третий основные законы классической аристотелевской традиционной логики в рамках классической формальной логики нулевого порядка носят частный характер.

Рассмотрим некоторые основные определения классической формальной логики, связанные с понятием доказательства.

Определение формального логического доказательства

В логике и математике, формальным логическим доказательством логической или математической формулы L***, при наперед заданных исходных посылках, называется цепочка логических или математических умозаключений, формально-логически истинно свидетельствующая о том, что при наперед заданном наборе аксиом и правил вывода, а также при заданных исходных посылках, - формула*** L ***выводима из исходных посылок.***

Определение формального вывода

Формальным выводом называется конечное, упорядоченное множество строк, написанных на формальном языке, таких, что каждая из них является либо аксиомой, либо получена из предыдущих строк применением одного из правил вывода.

Определение формального доказательства

Формальным доказательством утверждения или логической формулы называется формальный вывод, последней строкой которого является данное утверждение.

Определение теоремы

Утверждение, имеющее формальное доказательство, называется теоремой.

Определение формальной теории

Множество всех теорем в данной формальной модели, рассматриваемое вместе с алфавитом формального языка, множествами аксиом и правил вывода, называется формальной теорией.

Определение логически сильно трансцендентных утверждения и формулы

Логическое или математическое утверждение, или же формула A называется логически сильно трансцендентной по отношению к классической аристотелевской традиционной логике, если по отдельности непротиворечиво выводимы как формула A так и формула ⌐A.

Определение сильно трансцендентной теории

Формальная или полуформальная теория называется логически сильно трансцендентной, если в ней существуют непротиворечиво выводимые сильно трансцендентные формулы A и ⌐A.

В **Таблице 2** рассматриваются логические формулы, определенные на множестве бинарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка.

Таблица 2. Основные формулы бинарных логических операций.

Бинарные логические операции										
x	**y**		**F_1(x,y)**	**F_2(x,y)**	**F_3(x,y)**	**F_4(x,y)**	**F_5(x,y)**	**F_6(x,y)**	**F_7(x,y)**	**F_8(x,y)**
0	**0**		**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**		**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
1	**0**		**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
1	**1**		**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
x	**y**		**F_9(x,y)**	**F_{10}(x,y)**	**F_{11}(x,y)**	**F_{12}(x,y)**	**F_{13}(x,y)**	**F_{14}(x,y)**	**F_{15}(x,y)**	**F_{16}(x,y)**
0	**0**		**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
0	**1**		**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
1	**0**		**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
1	**1**		**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**

x и **y** – логические переменные;

0 и **1** — логические ,тождественные нуль и единица соответственно,

F_1(x, y) — конъюнкция **(F_1(x, y) = x&y = x$\wedge$y = min(x, y)),**

F_2(x, y) — дизъюнкция **(F_2(x, y) = x$\vee$y = max(x, y)),**

F_3(x, y) — эквивалентность **(F_3(x, y) = x$\sim$y = x$\equiv$y = x$\leftrightarrow$y),**

F_4(x, y) — сумма по модулю два **(F_4(x, y) = x$\oplus$y),**

F_5(x, y) — импликация от **y** к **x** **(F_5(x, y)** = **x$\leftarrow$y = x$\subset$y),**

F_6(x, y) — импликация от **x** к **y** **(F_6(x, y) = x$\rightarrow$y = x$\supset$y),**

F_7(x, y) — стрелка Пи́рса = функция Да́ггера = функция Ве́бба («антидизъюнкция») (**F_7(x, y) = x$\downarrow$y**).

F_8(x, y) — штрих Ше́ффера («антиконъюнкция») (**F_8(x, y) = x|y**),

F_9(x, y), **F_{10}(x, y)** — инверсии импликаций **F_5** и **F_6**,

F_{11}— F_{14} — функции только одного аргумента,

F_{15}(x, y), F_{16}(x, y) — тождества.

Теперь сформулируем и докажем «Первый принцип логико-математической трансценденции».

<u>Первый принцип логико-математической трансценденции (Ахвледиани А.Н. – Ахвледиани Н.В. – 1990 г)</u>

В классической формальной логике нулевого порядка существуют такие логически сильно трансцендентные формулы A и ⌐A, что по отдельности логически непротиворечиво выводимы, как A так и ⌐A.

Доказательство

Определим формулу A на множестве бинарных логических операций следующим образом:

$$A \equiv (x = 1) \equiv \langle 0,0,1,1 \rangle \qquad (4.1.1)$$

Покажем, что на множестве бинарных операций существует непротиворечивый формальный вывод формулы (4.1.1) такой, что упорядоченное множество строк формального вывода содержит только непротиворечивые логические формулы, и кроме этого логический кортеж истинности упомянутого выше формального вывода является тождественно доказуемым. Упомянутый выше формальный вывод основан на свойствах множества бинарных логических операций, приведенных в **Таблице 2.**

С учетом (4.1.1) имеет место следующий формальный вывод:

$$\{[(x \vee y) \wedge (x \Leftrightarrow y)] \Rightarrow (x=1) \equiv [\langle 0,1,1,1\rangle \wedge \langle 1,0,0,1\rangle] \Rightarrow \langle 0,0,1,1\rangle \equiv \langle 0,0,0,1\rangle \Rightarrow \langle 0,0,1,1\rangle\} \equiv \langle 1,1,1,1\rangle \tag{4.1.2}$$

Формула (4.1.2) показывает, что представленный формальный вывод формулы A, при фиксированных значениях логических аргументов является доказуемым.

Рассмотрим теперь формулу:

$$[\neg A \equiv \neg(x=1)] \equiv \langle 1,1,0,0\rangle \tag{4.1.3}$$

Покажем, что на множестве бинарных операций существует непротиворечивый формальный вывод формулы (4.1.3) такой, что упорядоченное множество строк формального вывода содержит только непротиворечивые логические формулы, и кроме этого упомянутый выше формальный вывод является доказуемым.

$$\{[(x \oplus y) \wedge (x \Rightarrow y)] \Rightarrow \neg(x=1) \equiv [\langle 0,1,1,0\rangle \wedge \langle 1,1,0,1\rangle] \Rightarrow \langle 1,1,0,0\rangle \equiv \langle 0,1,0,0\rangle \Rightarrow \langle 1,1,0,0\rangle\} \equiv \\ \equiv \langle 1,1,1,1\rangle \tag{4.1.4}$$

Формула (4.1.4) показывает, что представленный формальный вывод формулы $\neg A$, является доказуемым при фиксированных значениях логических аргументов.

Итак, тождественно доказуемые формулы (4.1.2) и (4.1.4) свидетельствуют о том, что формулы A и $\neg A$ выводимы непротиворечиво. Теорема доказана.

Доказанный нами «Принцип логико-математической трансценденции» свидетельствует о том, что глобально непротиворечивая классическая формальная логика нулевого порядка является сильно трансцендентной формально-логической теорией, и тем самым в сильной степени отличается от традиционной аристотелевской логики.

4.2 Второй принцип логико-математической трансценденции системы INCOL&TAMLA

В настоящем параграфе на основе теоретико-множественного топологического метода выдающегося немецкого математика Феликса Хаусдорфа исследуются топологические свойства логически инверсных пространств классической формальной логики нулевого порядка. Сформулирован и доказан **«Второй принцип логико-математической трансценденции»** формально-логической и теоретико-множественной системы **INCOL&TAMLA** в рамках классической формальной логики нулевого порядка. Показано существование трансцендентной логики, логически инверсной по отношению к аристотелевской традиционной логике.

В целях дальнейшего адекватного описания топологических логических пространств в основаниях классической формальной логики и теории множеств, мы обратимся к методу выдающегося немецкого математика Феликса Хаусдорфа, позволяющего при соблюдении определенных условий преобразовывать те или иные исходные множества в топологические пространства.

Метод преобразования исходных множеств в общие топологические пространства будем описывать в соответствии с /2/.

<u>Определение операции замыкания по Хаусдорфу</u>

Говорят, что в множестве R ***установлена операция замыкания, если каждому подмножеству*** $M \subset R$ ***поставлено в соответствие некоторое множество*** $\overline{M} \subset R$***.*** $\overline{M}$ ***называется замыканием множества*** M ***.***

<u>Определение общего топологического пространства по Хаусдорфу</u>

Множество R***, в котором установлена операция замыкания, называется общим топологическим пространством по Хаусдорфу (или по другому – общим топологическим хаусдорфовым пространством). Элементы общего топологического пространства называются его точками. Подмножества пространства*** R ***называются точечными множествами. Элементы замыкания*** $\overline{M}$ ***называются точками прикосновения множества*** M ***.***

Если в одном и том же множестве установлены две разных операции замыкания, то мы имеем два разных топологических пространства.

Рассмотрим теперь процесс построения логических общих топологических хаусдорфовых пространств в классической формальной логике нулевого порядка. Пусть в общем случае определены логические операции на множестве всех $n(n = 1,...,m,...,N)$ - арных логических отношений, где N - сколь угодно большое конечное натуральное число. Обозначим через $x_j(m)$ - j $(j = 1,...J)$ - ый логический кортеж значений логического аргумента на множестве m - арных логических операций классической формальной логики нулевого порядка. Для пояснения, в качестве примера, рассмотрим следующий частный случай фиксированного логического кортежа :

$$x_j(3) \equiv \langle 0,1,1 \rangle \tag{4.2.1}$$

Формула (4.2.1) означает, что в данном случае рассматривается фиксированный вектор значений логического аргумента на множестве тернарных логических операций.

<u>Определение явной логической формулы</u>

Явной логической формулой на множестве J ***- арных логических операций классической формальной логики нулевого порядка называется формула вида -***

$$G\left\langle x_j \right\rangle \equiv g\left\langle x_1,...,x_j,...x_J \right\rangle \qquad (4.2.2)$$

в общем случае выражающая логическую функциональную связь между логическими аргументами $\left\langle x_j \right\rangle$ и функцией $G\left\langle x_j \right\rangle$ на основе принятых в классической формальной логике правил.

<u>Определение неявной логической формулы</u>

Неявными логическими формулами на множестве J - арных логических операций классической формальной логики нулевого порядка называются формулы вида

$$g\left\langle x_1,...,x_j,...x_J \right\rangle = 1 \qquad (4.2.3)$$

$$g\left\langle x_1,...,x_j,...x_J \right\rangle = 0 \qquad (4.2.4)$$

Из рассмотрения формул (4.2.2) – (4.2.4) можно сделать вывод, что существуют определенные различия между явными и неявными логическими формулами. А именно, при определении явной логической формулы был применен логический оператор тождества, тогда как при определении неявной логической формулы применен оператор равенства значений истинности, а это означает, что в данном случае рассматриваемая неявная логическая функция определяет множество кортежей логических аргументов, удовлетворяющих данному равенству. В частных случаях формулы (4.2.3) и (4.2.4) могут принимать следующий вид:

$$g\left\langle x_1,...,x_j,...x_J \right\rangle \equiv 1 \qquad (4.2.5)$$

$$g\left\langle x_1,...,x_j,...x_J \right\rangle \equiv 0 \qquad (4.2.6)$$

<u>Определение логически инверсной формулы</u>

Для формулы (4.2.2) логически инверсной является формула

$$\neg g\left\langle x_1,...,x_j,...x_J \right\rangle \qquad (4.2.7)$$

Логические формулы (4.2.3) и (4.2.4) являются взаимно логически инверсными. Логические формулы (4.2.5) и (4.2.6) также являются взаимно логически инверсными.

<u>Определение общего топологического инверсного логического пространства и его элементов</u>

Общее топологическое инверсное логическое пространство SL определяется на основании введения операции замыкания на множестве всех логических формул всех $n(n=1,...,m,...N)$ - арных логических операций классической формальной логики нулевого порядка. Упомянутая операция замыкания определена с помощью логической операции инверсии следующем образом.

- **a.** ***Каждой логической формуле, на каждом множестве m - арных логических операций, ставится во взаимнооднозначное соответствие логически инверсная ей формула.***
- **b.** ***Из пункта (a) непосредственно следует, что каждому подмножеству L логических формул множества SL всех логических формул классической формальной логики нулевого порядка соответствует его замыкание $\overline{L}$.***
- **c.** ***SL - называется хаусдорфовым общим топологическим инверсным пространством классической формальной логики нулевого порядка.***
- **d.** ***Логические формулы пространства SL называются его обобщенными логическими точками или по иному – его логическими элементами.***
- **e.** ***Каждое подмножество L пространства SL называется точечным логическим множеством.***
- **f.** ***Множество $\overline{SL}$ логических формул $\overline{L}$ называется логическим замыканием SL.***
- **g.** ***Обобщенные логические точки (или что то же самое – логические элементы) логического замыкания $\overline{L}$ называются логическими точками соприкосновения точечного логического множества L.***

Введеное нами определение и построение общего топологического логического пространства SL позволяет рассматривать достаточно широкий спектр вопросов, связанных с изучением логических и топологических свойств классической формальной логики нулевого порядка.

Рассмотрим следующие определения.

<u>Определение аристотелевской логической формулы</u>

Логическая формула, являющаяся или истинной аристотелевской логической формулой, или аристотелевски противоречивой логической формулой называется аристотелевской логической формулой.

<u>Определение неаристотелевской логической формулы</u>

Каждая логическая формула, не являющаяся аристотелевской логической формулой, называется неаристотелевской логической формулой.

Определение аристотелевского логического подпространства

Множество AL аристотелевских логических формул в общем топологическом инверсном логическом пространстве SL классической формальной логики нулевого порядка, называется аристотелевским логическим подпространством логического пространства SL.

Определение неаристотелевского, логически трансцендентного подпространства

Множество TL неаристотелевских, логически трансцендентных логических формул в общем топологическом инверсном логическом пространстве SL классической формальной логики нулевого порядка, называется неаристотелевским логически трансцендентным подпространством логического пространства SL.

Определение аристотелевски контрадикторного логического подпространства

Множество ALC логических формул в общем топологическом инверсном логическом пространстве SL классической формальной логики нулевого порядка, являющихся логически контрадикторными по отношению к логическим формулам аристотелевской классической традиционной логики называется аристотелевски контрадикторным логическим подпространством логического пространства SL.

Определение аристотелевски сингулярного логического подпространства

Объединение ALS подпространств AL и ALC общего топологического инверсного логического пространства SL называется аристотелевски сингулярным логическим подпространством пространства SL.

Теперь сформулируем и докажем **«Второй принцип логико-математической трансценденции»**.

Второй принцип логико-математической трансценденции (Ахвледиани А.Н. – Ахвледиани Н.В., 1990-2011)

На множестве логических формул классической формальной логики нулевого порядка конструктивно существует логически инверсное хаусдорфово общее топологическое логическое пространство SL, в котором множество логических законов классической аристотелевской логики высказываний является лишь его собственным подклассом, а кроме него в упомянутом общем топологическом логическом пространстве, в качестве собственных подклассов содержатся также и классы слабо и предельно трансцендентных логических формул.

Доказательство.

Нами было рассмотрено определение общего топологического логически инверсного пространства SL в котором был рассмотрен процесс его построения. Для доказательства теоремы необходимо и достаточно показать, что пространство SL существует конструктивно и не является пустым, и в нем выполняются условия сформулированной выше теоремы. Для этого рассмотрим сперва множество унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка.

В классической формальной логике нулевого порядка логическая структура формул, определенных на множестве унарных логических операций имеет вид, представленный в **Таблице 1**. В **Таблице 1** унарных логических операций приняты следующие обозначения: **x** – логическая переменная, **g1(x)** – функция отрицания (негации), **g2(x)** – функция тождества, **g3(1)** – тождественная функция логической единицы, **g4(0)** – тождественная функция логического нуля. **0** и **1** — логические, тождественные нуль и единица соответственно.

Рассмотрим второй основной закон аристотелевской традиционной логики в следующей форме:

$$\neg(A(x) \equiv \neg A(x)) \tag{4.2.8}$$

Нетрудно заметить, что логическая структура закона (4.2.8) совпадает с функцией $g3(1) \equiv 1$, определенной на множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка.

Заметим, что на множестве унарных логических операций, определенном в **Таблице 1** существует логическая формула $g4(0) \equiv 0$, являющаяся логически инверсной по отношению к формулам $g3(1) \equiv 1$ и (4.2.8).

Легко проверить, что имеет место соотношение

$$\left[g4(0) \equiv 0\right] \equiv \left[A(x) \equiv \neg A(x)\right] \tag{4.2.9}$$

Из сопоставления (4.2.8) и (4.2.9) следует, что формулы $\neg(A(x) \equiv \neg A(x))$ и $\left[A(x) \equiv \neg A(x)\right]$ являются логически взаимно инверсными формулами. Формула $\left[A(x) \equiv \neg A(x)\right]$ является логически предельно трансцендентной и логически контрадикторной по отношению ко второму основному закону аристотелевской традиционной логики, следовательно она принадлежит аристотелевски контрадикторнму логическому подпространству ALC и аристотелевски сингулярному логическое подпространству ALS. Из последнего обстоятельства и принятых нами определений непосредственно вытекает, что и включающее их общее топологическое инверсное логическое пространство SL также являеться непустым. Соотношение (4.2.9) доказывает конструктивное существование логически предельно трансцендентных формул в пространстве SL.

В соответствии с **Таблицей 1** унарных логических операций, конструктивно существуют следующие логические формулы:

$$A(x1) \equiv (x = 1) \tag{4.2.10}$$

$$A(x2) \equiv (x = 0) \qquad (4.2.11)$$

В соответствии с таблицей унарных логических операций имеют место следующие соотношения:

$$A(x1) \equiv (x = 1) \equiv (\langle 0,1 \rangle = 1) \equiv \langle 0,1 \rangle \qquad (4.2.12)$$

$$A(x2) \equiv (x = 0) \equiv (\langle 0,1 \rangle = 0) \equiv \langle 1,0 \rangle \qquad (4.2.13)$$

Из формул (4.2.12) и (4.2.13) следует, что логические формулы $A(x1)$ и $A(x2)$ являются логически слабо трансцендентными, и кроме этого являются логически инверсными друг по отношению к другу. Сказанное выше, с учетом принятых нами определений означает, что общее топологическое логическое инверсное пространство SL содержит также логически слабо трансцендентные, логически взаимно инверсные формулы $A(x1)$ и $A(x2)$.

Итак, нами установлено, что в классической формальной логике нулевого порядка конструктивно существует непустое логически инверсное хаусдорфово общее топологическое логическое непустое пространство SL. Кроме этого нами показано, что пространство SL кроме законов и логических формул аристотелевской логики в качестве элементов содержит также логически слабо и логически предельно трансцендентные логические формулы. Полученные результаты и являются доказательством рассматриваемой нами теоремы.

Доказанный нами **«Второй принцип логико-математической трансценденции»**, свидетельствует о конструктивном существовании логически трансцендентной по отношению к аристотелевской традиционной логике формальной системы, находящейся внутри глобально формально непротиворечивой классической формальной логики нулевого порядка.

4.3 Приложение теории Курта Геделя о неполноте формальных аксиоматических систем к классической формальной логике

В начале 20-го века на Международном математическом конгрессе в Париже, выдающимся немецким математиком Давидом Гильбертом была представлена программа из 23, весьма сложных математических проблем, решение которых представляло большой интерес для математического научного сообщества того времени. Исторически известно, что Давид Гильберт отличался весьма широким математическим кругозором, и работая в различных областях математики, он во многих из них добился выдающихся научных результатов. Это обстоятельство и позволило ему сформулировать, ставшие впоследствии знаменитыми – 23 математические проблемы в различных областях математики.

Известно, что первые две проблемы Гильберта принадлежат к классу проблем оснований математики. В частности вторая проблема Гильберта заключается в установлении непротиворечивости, либо противоречивости системы аксиом и системы элементарной арифметики, где в качестве основной аксиоматической арифметической системы традиционно рассматривается арифметическая система **PA&MI** выдающегося итальянского математика Джузеппе Пеано.

Один из наиболее значимых результатов в решении второй проблемы Гильберта был достигнут ставшим впоследствии знаменитым – тогда еще молодым австрийским математиком Куртом Геделем. Как известно, Куртом Геделем в 1931 году было доказано существование в классических математических теориях, содержащих аксиоматическую логико-математическую систему **PA&MI** выдающегося итальянского математика Джузеппе Пеано, таких трансцендентных по отношению к классической аристотелевской традиционной логике, логических формул F и ⌐F, которые с одной стороны хотя и не отрицают закона об исключенном третьем, но с другой стороны и не удовлетворяют ему. При этом первая теорема Геделя по существу означает, что если достаточно богатая формальная или полуформальная математическая теория, содержащая аксиоматику Пеано, является непротиворечивой, то в ней существуют логически трансцендентные по отношению к классической традиционной аристотелевской логике логические формулы F и ⌐F, которые не могут быть ни доказаны, ни опровергнуты на основании классической аристотелевской традиционной логики и аксиоматической системы Пеано.

Для удобства дальнейшего изложения приведем еще раз формулировки теорем Курта Геделя о неполноте формальных и полуформальных логико-математических систем, содержащих систему **PA&MI**.

Первая теорема Геделя

Существует такое суждение F в аксиоматической системе PA&MI, что ни F, ни ⌐F не могут быть доказаны посредством аксиом из PA&MI, если система PA&MI непротиворечива.

Вторая теорема Геделя

Непротиворечивость аксиоматической системы PA&MI (Consis PA&MI), не может быть доказана в PA&MI, если PA&MI является непротиворечивой.

Ниже приводится содержание традиционной версии аксиоматической системы Пеано – **PA**.

Аксиомы Пеано

1. 1 есть натуральное число.

2. Для каждого натурального числа n имеется точно одно натуральное число, называемое его последующим и обозначаемое $S(n)$.

3. Всегда имеет место сотношение $S(n) \neq 1$.

4. Из равенства $S(n) = S(m)$ следует $m = n$.

5. Принцип полной индукции. Множество натуральных чисел, содержащее 1 и для каждого из n элементов следующий за ним элемент $S(n)$, содержит все натуральные числа.

<u>Арифметика Пеано</u>

Сложение и умножение натуральных чисел определяется формулами:

$$S(n) = n + 1 \qquad (4.3.1)$$

$$S(m+n) = m + S(n) \qquad (4.3.2)$$

$$n \cdot 1 = n \qquad (4.3.3)$$

$$n \cdot S(m) = n \cdot m + n \qquad (4.3.4)$$

Кроме аксиоматической системы Пеано **PA**, включающей в себя «Аксиомы Пеано» и «Арифметику Пеано», система оснований классической математики **PA&MI** включает в себя и «Метод математической индукции».

<u>Метод математической индукции</u>

Если некоторое утверждение $A(n), n = 1,2,3..........$ справедливо для $n = 1$, и для каждого n из справедливости $A(n)$ при значении n следует справедливость $A(n+1)$ при $n+1$, то утверждение $A(n)$- справедливо для всех натуральных n, или формально:

$$(\forall n \in N_+)((\forall i \in \{1,...n\})A(n) \equiv 1 \Rightarrow A(n+1) \equiv 1) \Rightarrow (\forall n \in N_+)(A(n) \equiv 1) \qquad (4.4.5)$$

В настоящем параграфе мы будем рассматривать «Теоремы Геделя» с точки зрения логически трансцендентных проблем взаимодействия аристотелевской традиционной логики, классической формальной логики нулевого порядка и «Метода математической индукции», как основ классической теоретико-множественной математики, поскольку в формализации «Метода математической индукции» употребляются кванторы принадлежности и всеобщности, характерные для теории множеств и классической формальной логики первого порядка. С этой целью будут сформулированы и доказаны метатеоремы о «Теоремах Геделя», отражающие существование логически трансцендентных проблем в основаниях классической формальной логики и классической математики.

<u>Метатеорема о «Первой теореме Геделя» (А.Н. Ахвледиани – 2011 г.)</u>

Из «Первой теоремы Геделя» следует логически конструктивное отличие классической формальной логики нулевого порядка от аристотелевской традиционной логики в смысле выполнимости «Закона об исключенном третьем».

Доказательство

Рассмотрим принципиальную схему доказательства «Первой теоремы Геделя». Здесь необходимо подчеркнуть, что нас в данном случае интересуют именно логические компоненты этого доказательства. Известно, что Геделем была выдвинута логическая формула, которая затем была превращена им в арифметическую формулу на основе так называемой «геделевской нумерации», позволяющей перевести исходную логическую формулу в арифметическую. Однако, представляется совершенно естественным, что процесс «геделевской нумерации», выдвинутой Геделем логической формулы, не меняет ее исходной логической структуры, и кроме этого, как будет показано далее, именнно упомянутая логическая структура на деле является одним из ключевых мест в теории Геделя о неполноте формальных аксиоматических систем первого порядка.

Итак рассмотрим вопрос, какая же логическая формула была выдвинута Куртом Геделем. Являясь блестящим логиком, Гедель понимал, что выдвигаемая им формула с одной стороны не должна была быть тождественно противоречивой, поскольку такая основа доказательства была бы признана, как «error fundamentalis» в основании доказательства, на основании логического закона Дунса Скота, согласно которому из тождественно противоречивой формулы следует любая формула, включая и тождественно противоречивую. С другой стороны Гедель должен был иметь твердую гарантию того, что выдвигаемая им формула, равно как и ее отрицание, не могут быть доказаны или опровергнуты ни в одной аристотелевски непротиворечивой логико-аналитической формальной или полуформальной системе, содержащей аксиоматическую арифметическую систему Пеано **PA**.

Далее мы покажем, что на множестве унарных операций классической формальной логики нулевого порядка действительно существует непротиворечивая логическая формула, удовлетворяющая сформулированным выше условиям. Именно такой формулой является следующая логическая формула:

$$G \equiv \neg(x \equiv 1) = \neg(\langle 0,1 \rangle \equiv 1) = \langle 1,0 \rangle \qquad (4.4.6)$$

Языковым эквивалентом рассмотренной в (4.4.6) формулы является утверждение: «неверно, что формула x является доказуемой». Из (4.4.6) и правил классической формальной логики нулевого порядка следует, что логическая формула выдвинутого утверждения является недоказуемой, но вместе с тем и непротиворечивой, следовательно и само утверждение является с одной стороны недоказуемым, а с другой стороны непротиворечивым. Истинностная оценка (4.4.6) представленной формулы также свидетельствует о том, что с точки зрения классической формальной логики нулевого порядка и соответствующий языковый эквивалент в виде утверждения «неверно, что формула x является доказуемой» - является недоказуемым, и вместе с тем непротиворечивым.

Рассмотрим теперь формальное отрицание логической формулы (4.4.6), а именно:

$$\neg G \equiv \neg(\neg(x \equiv 1)) = \neg\langle 1{,}0 \rangle = \langle 0{,}1 \rangle \tag{4.4.7}$$

Из (4.4.7) и правил классической формальной логики нулевого порядка следует, что и эта логическая формула, с одной стороны является недоказуемой, а с другой стороны непротиворечивой. Рассмотрим теперь логическую структуру следующей логической формулы F: «неверно, что формула x является противоречивой».

$$F \equiv \neg(x \equiv 0) = \neg\left(\langle 0{,}1 \rangle \equiv 0\right) = \langle 0{,}1 \rangle = \neg G \tag{4.4.8}$$

Из приведенного выше рассуждения мы получаем *две непротиворечивые, и вместе с эти недоказуемые* логические формулы, являющиеся по своей логической структуре взаимно контрадикторными, и выражаемые следующими утверждениями.

G: «неверно, что формула x является доказуемой» (4.4.9)

¬G=F: «неверно, что формула x является противоречивой» (4.4.10)

Исходя из приведенного выше доказательства, представляется совершенно очевидным, что «геделевская арифметизация» соответствующих логических формул и построение их конструктивного арифметического образа, ни в коей мере не могут изменить логической сути, выдвинутых Геделем логических формул. Поэтому «Первая теорема Геделя», по существу дела, касается в первую очередь вопросов взаимодействия аристотелевской традиционной логики и отличной от нее классической формальной логики нулевого порядка, которая несмотря на то обстоятельство, что признает аристотелевский закон об исключенном третьем – формально-логически истинным, - тем не менее содержит и такие взаимно контрадикторные непротиворечивые (в понимании классической формальной логики нулевого порядка) логические формулы, которые *не соответствуют закону об исключенном третьем.* Метатеорема доказана.

Рассмотрим определение логического коллапса с точки зрения аристотелевской традиционной логики, а также классической формальной логики нулевого порядка.

Определение логического коллапса в аристотелевской традиционной логике

Логическим коллапсом (тотальным ослаблением формальной истинности) в некоторой формальной или полуформальной логико-математической теории, основанной на аристотелевской традиционной логике, называется логический

процесс, приводящий к образованию в этой теории аристотелевского противоречия или антиномии.

<u>Определение логического коллапса в классической формальной логике нулевого и первого порядков</u>

Логическим коллапсом (тотальным ослаблением формальной истинности) называется такая логическая ситуация, когда в некоторой формальной или полуформальной логико-математической теории T***, становится логически конструктивно осуществимым выведение на основе непротиворечивых логических формул, - формально тождественно противоречивой логической формулы или формул на множестве унарных, бинарных, тернарных или в общем случае*** n ***-арных логических операций.***

<u>Теорема о логическом коллапсе в классической формальной логике</u>

<u>(А.Н. Ахвледиани – 2011 г.)</u>

На множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка конструктивно существуют непротиворечивые с точки зрения классической формальной логики нулевого порядка логические формулы, удовлетворяющие условиям «Первой теоремы Геделя», конъюнкция которых влечет за собой логический коллапс.

Доказательство

Из сопоставления формул (4.4.9) и (4.4.10) вытекает весьма любопытная логическая ситуация. С одной стороны формулы (4.4.9) и и (4.4.10) соответствуют реальной действительности и поэтому являются материально истинными с точки зрения классической формальной логики нулевого порядка и аристотелевской традиционной логики. С другой стороны по своей логической структуре они являются взаимно контрадикторными, а их конъюнкция тождественно равна логическому нулю:

$$(G \wedge \neg G) \equiv \langle 1{,}0 \rangle \wedge \langle 0{,}1 \rangle \equiv \langle 0{,}0 \rangle \tag{4.4.11}$$

Таким образом *<u>складывается логически парадоксальная ситуация</u>* – существуют два материально истинные утверждения, конъюнкция которых образует формально-логическое противоречие. Естественно, что такая логическая ситуация никак не укладывается в рамки аристотелевской традиционной логики.

Из соотношения (4.4.11) следует, что в рассматриваемом случае, коньюнкция двух непротиворечивых логических формул, определенных на множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка, *влечет за собой логический коллапс в классической формальной логике нулевого порядка*. Теорема доказана.

Рассмотрим определение аристотелевской формально-логической противоречивости формальной теории.

<u>Определение аристотелевской формальной логической противоречивости формальной или полуформальной теории</u>

Формальная или полуформальная логико-математическая теория называется аристотелевски формально-логически противоречивой, если является тождественно доказуемым, что на множестве логических формул этой теории выводима хотя бы одна формула, являющаяся отрицанием второго основного закона аристотелевской традиционной логики, что формально выражается следующим образом:

$$[(B1 \wedge B2 \wedge B3 \wedge ...Bm \wedge ...BM) \Rightarrow \neg(C \wedge \neg C)] \equiv 1 \qquad (4.4.12)$$

<u>Метатеорема о «Теоремах Геделя» (А.Н. Ахвледиани – 2011 г.)</u>

Из «Теорем Геделя» следует, что аристотелевская формально-логическая непротиворечивость каждой логико-математической формальной или полуформальной теории, содержащей классическую формальную логику нулевого порядка является недоказуемой.

Доказательство

Как было показано выше, из «Первой теоремы Геделя вытекает конструктивное существование двух по отдельности непротиворечивых утверждений (4.4.8) и (4.4.9), конъюнкция которых влечет за собой логический коллапс на множестве логических формул классической формальной логики нулевого порядка, что выражается соотношением (4.4.11). Таким образом истинный смысл «Первой теоремы Геделя» заключается именно в том, что классическая формальная логика нулевого порядка может генерировать неаристотелевские логические формулы, которые с одной стороны являются материально истинными в упомянутой логической системе, однако их конъюнкция образует тождественное формально-логическое противоречие. Согласно логическому закону Дунса Скота это означает, что в результате логического коллапса становится возможным осуществление соотношения (4.4.12), что эквивалентно установлению факта аристотелевской противоречивости. Так как каждая формальная или полуформальная логико-математическая теория первого порядка включает в себя классическую формальную логику первого порядка, а значит автоматически и классическую формальную логику нулевого порядка, то логические свойства этой логико-математической теории в данном рассматриваемом случае в первую очередь определяются логическими свойствами классической формальной логики нулевого порядка, которая с одной стороны признает все законы аристотелевской традиционной логики истинными законами, а с другой стороны включает в себя такие непротиворечивые с точки зрения классической формальной логики нулевого порядка логические формулы, конъюнкция которых приводит к образованию аристотелевского противоречия. Именно по этой причине аристотелевская непротиворечивость каждой логико-математической теории первого порядка, основанной на логике первого порядка (включающей в себя и логику нулевого порядка), не может быть доказана непротиворечиво, поскольку в рамках глобально непротиворечивой классической формальной логики нулевого порядка, фактически можно доказать прямо противоположное в отношении самой классической формальной логики нулевого порядка. Иными словами классическая формальная логика нулевого порядка, несмотря на ее глобальную формально-логическую непротиворечивость, в сильной степени отличается от аристотелевской традиционной логики, и обладает ярко выраженными логически трансцендентными свойствами. По этой самой причине ее аристотелевская непротиворечивость, равно как и аристотелевская непротиворечивость любой включающей ее логико-аналитической теории не могут быть доказаны непротиворечиво. Таким образом и «Вторая теорема Геделя», равно как и первая, в первую очередь относится к вопросам логико-аналитических отношений между аристотелевской традиционной логикой и классической формальной логикой нулевого порядка. Теорема доказана.

4.4. Логический аналог функции Дирихле и генезис логической трансценденции в системе PA&MI при стремлении к актуальной бесконечности.

Как известно, Герхардом Генценом в 1936 году было получено доказательство логической совместности «Аксиом Пеано» с «Арифметикой Пеано», то есть им была доказана *внутренняя непротиворечивость* «Аксиоматической системы Пеано» - **PA**. Необходимо отметить, что в процессе упомянутого доказательства, Генцену пришлось добавить к логике первого порядка «Аксиому бескванторной индукции». Это в свою очередь означает, что результаты Генцена не противоречат «Второй теореме Геделя», согласно которой непротиворечивость систем **PA** и **PA&MI** не может быть доказана исключительно средствами самих **PA** и **PA&MI**, при условии, что они являются непротиворечивыми. При этом Генценом были рассмотрены вопросы совместности «Арифметики Пеано» с «Аксиомами Пеано» (т.е. вопрос внутренней непротиворечивости системы **PA**), причем им были рассмотрены первые пять аксиом Пеано без «Метода математической индукции».

Известно, что Куртом Геделем при доказательстве «Теорем Геделя», наоборот, при рассмотрении аксиоматической системы **PA&MI**, кроме первых пяти аксиом Пеано, был также учтен на условиях логической конъюнкции и «Метод математической индукции», который является одним из методов доказательства в классической математике.

Необходимо отметить, что вопрос включения «Метода математической индукции» в число аксиом системы **PA** является неоднозначным. Исторически известно, что «Метод математической индукции» первоначально не входил в число аксиом системы

PA. С другой стороны, в современной классической математике, - «Метод математической индукции» традиционно считается включенным в систему **PA**.

Во избежание возможных недоразумений, при дальнейшем изложении мы будем обозначать совокупность «Арифметики Пеано», «Аксиом Пеано» и «Метода математической индукции», как **PA&MI**. Отметим, что результаты «Теорем Геделя» в основном относятся именно к системе **PA&MI**, а результаты, полученные Герхардом Генценом доказывают внутреннюю непротиворечивость системы **PA**.

Согласно «Первой теореме Геделя», если система **«PA&MI»** является аристотелевски непротиворечивой, то в классической математике существуют такие взаимно контрадикторные логические формулы F и ⌐F, что не представляется возможным на основании **PA** и **«PA&MI»** доказать или опровергнуть ни F, ни ⌐F. В интерпретации логико-математической системы **INCOL&TAMLA, -** это означает логически слабую трансцендентность классической математики по отношению к аристотелевской традиционной логике в том случае, если система **«PA&MI»** является аристотелевски непротиворечивой. Если же система **«PA&MI»** является аристотелевски противоречивой, то согласно закону Дунса Скота на основании этой системы выводимы любые логические формулы, в том числе и логически предельно трансцендентные. Таким образом, на предварительном этапе рассмотрения вопроса, можно придти к следующему общему выводу – если система **«PA&MI»** является аристотелевски непротиворечивой, то содержащие ее логико-математические теории первого порядка являются логически слабо трансцендентными, если же система **«PA&MI»** является аристотелевски противоречивой и тем самым логически предельно трансцендентной, то содержащие ее логико-математические теории первого порядка также являются логически предельно трансцендентными.

Рассмотрим весьма существенный вопрос – могут ли натуральные числа, определяемые системой **«PA&MI»** *быть бесконечными*? Для разрешения этого вопроса рассмотрим функцию натурального аргумента, являющуюся конечным аналогом бесконечного ряда:

$$f(n) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^s} \tag{4.4.1}$$

где $m = 1,2,..................$, $s = 2$, n - натуральное число.

Сформулируем и докажем следующую теорему.

<u>Теорема о бесконечном натуральном числе</u>

В системе «PA&MI», с точки зрения аристотелевской традиционной логики, допущение о существовании бесконечно большого натурального числа влечет противоречие, и нарушает «Метод математической индукции».

Доказательство

Для доказательства сформулированного выше теоремы рассмотрим следующее утверждение: «Для всех натуральных значений n, начиная с первого, функция, определяемая сотношением (4.4.1) принимает рациональные значения». Будем доказывать это утверждение на основе «Метода математической индукции». В силу того, что сумма конечного числа рациональных чисел является рациональным числом, то рассматриваемое нами утверждение справедливо при $n = 1,2,..........,k$, где k - конечное натуральное число. Таким образом, согласно «Методу математической индукции», сформулированное нами утверждение верно для всех сколь угодно больших, фиксированных натуральных чисел k. Рассмотрим вопрос – может ли натуральное число n быть бесконечно большим? Для разрешения этого вопроса рассмотрим значение функции (4.4.1) при $n \to \infty$. Тогда из (4.4.1) следует:

$$f(n \to \infty) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \frac{\pi^2}{6} \tag{4.4.2}$$

Если допустить, что натуральное число n может быть бесконечно большим, то в силу (4.4.1) и (4.4.2) приходим к противоречию – для всех конечных натуральных чисел сумма рассматриваемого ряда равна рациональному числу, а для бесконечного натурального числа это не является верным – сумма членов ряда равна иррациональному (нерациональному числу). Этим самым в рассматриваемом случае нарушается справедливость «Метода математической индукции». В результате приведенного выше рассуждения, мы в рамках традиционной аристотелевской логики, с логической необходимостью пришли к выводу о том, *что натуральное число n не может быть бесконечно большим в системе* ***«PA&MI»***.

Бесконечно большой величиной в рассматриваемом случае, - является *переменная величина n* при *стремлении последней к бесконечности*, - так как в этом случае выполняются условия соотношения (2.5.8). Поэтому, в рассматриваемом случае, при стремлении n к бесконечности, бесконечно большая величина $g(n) = n, (n \to \infty)$, в силу самого определения бесконечно большой величины, - *не является конкретным рациональным или же иррациональным числом, а является переменной величиной*.

Рассмотрим определение функции Дирихле.

<u>Определение функции Дирихле</u>

Функцией Дирихле $D(x)$, называется функция, определенная на множестве всех действительных чисел $(x \in R)$, и принимающая лишь два дискретных значения – 1 или 0 в зависимости от действительного значения аргумента x, а именно – если x - рациональное число, то значение функции Дирихле равно 1, если же действительное число x - не является рациональным то значение функции Дирихле равно 0:

$$D(x) = \begin{Bmatrix} 1, если - x \in Q \\ 0, если - \neg(x \in Q) \end{Bmatrix} \tag{4.4.3}$$

где Q - множество рациональных чисел.

Рассмотрим определение формально-логического аналога функции Дирихле.

<u>Определение формально-логического аналога функции Дирихле</u>

Формально-логическим аналогом функции Дирихле $DL(x)$ ***называется функция, областью определения которой является все множество действительных чисел, объединенное с множеством бесконечно больших величин, а область значений состоит из логических 1 и 0. Формально-логический аналог функции Дирихле имеет следующий вид:***

$$DL(x) = \begin{cases} 1, если - x \in Q \\ 0, если - \neg(x \in Q) \end{cases} \qquad (4.4.4)$$

Сформулируем и докажем следующее утверждение.

<u>Теорема об условии тождественной истинности формально логического аналога функции Дирихле (Ахвледиани А.Н. - 2011)</u>

Если все рассматриваемые значения действительного аргумента в формально-логическом аналоге функции Дирихле, являются конечными натуральными числами, то это обстоятельство является достаточным условием для того, чтобы значения формально-логического аналога функции Дирихле были тождественно равны логической 1 для каждого конечного, сколь угодно большого натурального значения n***.***

Доказательство

Рассмотрим значения логической истинности формул:

$$x \in Q, \neg(x \in Q) \qquad (4.4.5)$$

при $x = n$. Имеем

$$[(n \in Q)] \equiv 1, [\neg(n \in Q)] \equiv 0 \qquad (4.4.6)$$

Тогда в силу свойств формально-логического аналога функции Дирихле для каждого конечного,сколь угодно большого натурального значения n имеем:

$$DL(n) \equiv 1 \qquad (4.4.7)$$

Теорема доказана.

Сформулируем и докажем следующее утверждение.

Теорема о достаточном условии генезиса формального логического коллапса в логическом аналоге функции Дирихле в системе PA&MI (Ахвледиани А.Н. – 2011)

Если значения натурального аргумента в формально-логическом аналоге функции Дирихле стремятся к актуальной бесконечности, то это обстоятельство является достаточным условием для генезиса формального логического коллапса в системе PA&MI при стремлении аргумента функции Дирихле к актуальной бесконечности.

Доказательство

Рассмотрим значения логической истинности формул:

$$x \in Q, \neg(x \in Q) \tag{4.4.8}$$

при $x = n \to \infty$. В этом случае n является бесконечно большой величиной большей любого наперед заданного рационального числа, поэтому n не является рациональным числом и не принадлежит множеству рациональных чисел. В рассматриваемом случае имеем.

$$[(n \to \infty) \in Q)] \equiv 0, [\neg(n \to \infty) \in Q)] \equiv 1 \tag{4.4.9}$$

Тогда в силу свойств формально-логического аналога функции Дирихле для бесконечно больших $n \to \infty$ имеем:

$$DL(n) \equiv 0 \tag{4.4.10}$$

Формула (4.4.10) означает возникновение логического коллапса при стремлении $n \to \infty$. Теорема доказана.

4.5. «Парадокс лжеца» и «Теоремы о логическом коллапсе в аристотелевской традиционной логике»

Как известно, «Парадокс лжеца» в аристотелевской традиционной логике формулируется следующим образом.

«Парадокс лжеца»

Неким человеком было высказано суждение: «То, что я утверждаю сейчас, ложно». Требуется определить – является ли высказанное утверждение ложным, либо истинным.

Стандартное рассуждение в рамках аристотелевской традиционной логики о *«Парадоксе лжеца»* выглядит следующим образом: «Суждение, высказанное в

«Парадоксе лжеца» либо истинно, либо ложно. Если оно ложно – то оно истинно. Если же оно истинно, то оно ложно». Представляется актуальным проанализировать логическую структуру стандартного рассуждения о «Парадоксе лжеца» в аристотелевской традиционной логике методами классической формальной логики нулевого порядка.

Сформулируем и докажем следующее утверждение.

«Первая теорема о формально-логическом коллапсе в аристотелевской традиционной логике» (Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)

Стандартное рассуждение о «Парадоксе лжеца» в рамках аристотелевской традиционной логики влечет за собой формально-логический коллапс (тотальное ослабление формально-логической истинности).

Доказательство

Исходя из логической структуры «Парадокса лжеца» и стандартного рассуждения о нем в рамках традиционной аристотелевской логики, логическое моделирование будем осуществлять на множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка.

Логическая структура утверждения, содержащегося в «Парадоксе лжеца» на множестве унарных логических операций имеет следующий вид:

$$L := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.5.1}$$

$$\overrightarrow{(L = 0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.5.2}$$

В формуле (4.5.1) представлен кортеж значений истинности логического аргумента на множестве унарных логических операций. В формуле (4.5.2) – представлен кортеж истинностных значений утверждения, содержащегося в «Парадоксе лжеца».

Ниже приводится формализация *стандартного рассуждения о «Парадоксе лжеца» в рамках аристотелевской традиционной логики*:

$$\overrightarrow{[[[(L = 0) = 0] \oplus (L = 0) = 1] \wedge [\Rightarrow[[(L = 0) = 0],[(L = 0) = 1]] \wedge \Rightarrow[[(L = 0) = 1],[(L = 0) = 0]]]]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.5.3}$$

Из соотношения (4.5.3) следует, что *стандартное рассуждение о «Парадоксе лжеца» в рамках аристотелевской традиционной логики* приводит к логическому коллапсу (тотальному ослаблению формально-истинности). Теорема доказана.

Сформулируем и докажем следующее утверждение.

<u>«Вторая теорема о формально-логическом коллапсе в аристотелевской традиционной логике» (Ахвледиани А.Н. -2011 г.)</u>

Суждение о «Парадоксе лжеца» в рамках аристотелевской традиционной логики, заключающееся в том, что утверждение, содержащееся в «Парадокс лжеца» - не истинно и ни ложно, влечет за собой формально-логический коллапс (тотальное ослабление формально-логической истинности).

Доказательство

В качестве доказательства, ниже, в рамках классической формальной логики нулевого порядка приводится истинностная оценка логической формулы, моделирующей утверждение о том, что утверждение, содержащееся в «Парадоксе лжеца» - не истинно, и не ложно:

$$\overrightarrow{[\neg[(L = 0) = 1] \wedge \neg[(L = 0) = 0]]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (4.5.4)$$

Полученная нами формула (4.5.4) свидетельствует о том, что рассматриваемое нами суждение привело к формально-логически тождественно противоречивому результату, т.е. к логическому коллапсу. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопрос, какими же должно быть логически адекватное заключение об утверждении, заключающимся в «Парадоксе лжеца» с точки зрения глобально непротиворечивой классической формальной логики нулевого порядка.

В соответствии с правилами классической формальной логики нулевого порядка – одним из правильных заключений будет следующее: «Утверждение, содержащееся в «Парадоксе лжеца» является недоказуемым».

Полученные выше результаты позволяют сделать следующие важные выводы.

1. Аристотелевская традиционная логика является неполной с точки зрения классической формальной логики нулевого порядка, поскольку не в состоянии дать адекватную оценку некоторым непротиворечивым с точки зрения классической формальной логики нулевого порядка логическим формулам.
2. Классическая формальная логика нулевого порядка отличается от аристотелевской традиционной логики тем, что в состоянии дать адекватную оценку логическим формулам, которые с одной стороны являются недоказуемыми, а с другой стороны – непротиворечивыми.
3. Классическая формальная логика нулевого порядка отличается от аристотелевской традиционной логики в частности также и тем, что дает иную

оценку утверждению, содержащемуся в «Парадоксе лжеца», которое в аристотелевской традиционной логике считается противоречием.

4. Попытка логической оценки с одной стороны непротиворечивых, а с другой стороны недоказуемых логических формул классической формальной логики нулевого порядка, в рамках аристотелевской традиционной логики – в ряде случаев приводит к формально-логическому коллапсу (тотальному ослаблению формально-логической истинности), - который в свою очередь согласно логическому закону Дунса Скота может повлечь за собой дальнейшие логически непредсказуемые и неконтролируемые выводы.

4.6 Логически сингулярные аспекты «Второй проблемы Гильберта» и логическая формула «Модифицированного метода логико-математической индукции» в системе INCOL&TAMLA

В целях логически адекватного рассмотрения «Второй проблемы Гильберта», обсуждения имеющихся решений, полученных Герхардом Генценом и Куртом Геделем, а также обсуждения полученных нами новых результатов в отношении рассматриваемой проблемы, - необходимо в первую очередь четко сформулировать поставленную в ней логико-аналитическую задачу. Ниже приводится по возможности наиболее полная формулировка, раскрывающая логико-аналитический смысл содержания «Второй проблемы Гильберта», с учетом тех логических систем, которые применяются в современной классической математике, основанной на классической формальной логике.

Формулировка «Второй проблемы Гильберта»

Требуется исследовать вопросы аристотелевской непротиворечивости логико-математической системы, включающей в себя «Аксиоматическую систему Пеано», «Арифметику Пеано», «Метод математической индукции», классическую формальную логику нулевого порядка и классическую формальную логику первого порядка.

В первую очередь мы приведем результат Герхарда Генцена, полученный им в отношении рассматриваемой проблемы в 1936 году. Как известно, Генценом была установлена логическая совместность и внутренняя аристотелевская непротиворечивость системы **PA**, включающей в себя «Аксиоматическую систему Пеано» совместно с «Арифметикой Пеано». Это означает, что аристотелевская непротиворечивость системы **PA** является доказанной.

Далее мы перейдем к рассмотрению результатов, полученных Куртом Геделем в отношении системы **PA&MI**, содержащей систему **PA**, «Метод математической индукции», аристотелевскую традиционную логику, классическую формальную логику нулевого порядка и классическую формальную логику первого порядка. Эти результаты были подробно исследованы и рассмотрены в **Параграфе 4.3.** На основании детального анализа «Теорем Геделя» нами была сформулирована и доказана следующая теорема:

<u>Теорема о логическом коллапсе в классической формальной логике (А.Н. Ахвледиани – 2011 г.)</u>

На множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка конструктивно существуют непротиворечивые с точки зрения классической формальной логики нулевого порядка логические формулы, удовлетворяющие условиям «Первой теоремы Геделя», конъюнкция которых влечет за собой логический коллапс.

Приведенная выше теорема, совместно с другими результатами, полученными в рамках **Параграфа 4.3** , свидетельствуют о том, что непротиворечивые логические формулы классической формальной нулевой логикой первого порядка, в ряде случаев приводит к логическому коллапсу (тотальному ослаблению формально-логической истинности), в результате чего, далее, на основе логического закона Дунса Скота, становится возможным выведение логических формул, эквивалентных отрицанию закона о непротиворечии и закона об исключенном третьем аристотелевской традиционной логики. При этом с позиций аристотелевской традиционной логики этот процесс сопровождается образованием логических антиномий. Полученные результаты означают, что в ряде случаев классическая формальная логика нулевого порядка не удовлетворяет определению аристотелевской непротиворечивости. По этой причине, логика первого порядка, включающая в себя логику нулевого порядка и аристотелевскую традиционную логику, также не может считаться аристотелевски непротиворечивой. Это обстоятельство означает, что каждая математическая теория, основанная на логике первого порядка, в том числе и система **PA&MI**, также не могут считаться аристотелевски непротиворечивыми.

В частности, в рамках **Параграфа 4.1** , нами был доказан «Первый принцип логико-математической трансценденции», который был сформулирован следующим образом.

<u>Первый принцип логико-математической трансценденции (Ахвледиани А.Н. – Ахвледиани Н.В. – 1990 г)</u>

В классической формальной логике нулевого порядка существуют такие логически сильно трансцендентные формулы A и ⌐A, что по отдельности логически непротиворечиво выводимы, как A так и ⌐A.

«Первый принцип логико-математической трансценденции» по сути дела означает, что на множестве логических формул классической формальной логики нулевого порядка выводима аристотелевская антиномия, которая с точки зрения системы **INCOL&TAMLA** означает наличие у классической формальной логики нулевого порядка логически сильно трансцендентных свойств.

Возникает закономерный вопрос – как же следует понимать глобальную формальную непротиворечивость классической формальной логики нулевого и первого порядков, которая как известно была доказана Куртом Геделем?

В связи с поставленным выше вопросом необходимо отметить, что система современной классической формальной логики нулевого и первого порядков, иерархически и в содержательном смысле является логической системой более высокого уровня по сравнению с аристотелевской традиционной логикой. Ее основной задачей является исследование и оценка логической природы той или иной логической формулы, или же того или иного утверждения. Так как заведомо конструктивно существуют логические формулы и утверждения, логическая природа которых отличается от аристотелевских высказываний, то представляется очевидным, что именно по этой самой причине упомянутая задача не может быть решена только лишь в рамках одной аристотелевской традиционной логики. Действительно, как нами было показано ранее, аристотелевская логика не в состоянии оперировать с утверждениями и логическими формулами, выходящими за пределы аристотелевской логики, основанной на первых трех основных законах – законе тождества, законе о непротиворечии и законе об исключенном третьем.

Таким образом классическая формальная логика нулевого порядка обладает более широкими возможностями по сравнению с аристотелевской традиционной логикой. В частности, на основе классической формальной логики нулевого порядка могут быть адекватно и эффективно исследованы и решены многие классические парадоксы традиционной логики.

Однако, необходимо отметить, что преимущество классической формальной логики нулевого порядка перед аристотелевской традиционной логикой имеет также и свою оборотную сторону. В частности, внутри классической формальной логики нулевого порядка существуют такие непротиворечивые с ее точки зрения логические формулы, логическая конъюнкция которых приводит к логическому коллапсу, то есть к тотальному ослаблению формально-логической истинности. Эта логическая ситуация в корне отличается от той, которая имеется в аристотелевской логике, а именно – непротиворечивые высказывания аристотелевской традиционной логики являются тождественно истинными, и их логическая конъюнкция является также тождественно истинной. Таким образом можно сделать вывод о том, что несмотря на то, что классическая формальная логика нулевого порядка признает все логические законы аристотелевской традиционной логики истинными, тем не менее, эти две логические системы являются логически неоднородными.

Вследствие имеющейся существенной неоднородности логических свойств аристотелевской традиционной логики и классической формальной логики нулевого порядка, в логическом пространстве, включающем в себя, как логические формулы аристотелевской логики, так и логические формулы классической формальной логики нулевого порядка, возможно явление формально-логического коллапса, которое заключается в генезисе логических формул, логические кортежи значений истинности которых содержат лишь формально-логические нули при совершении допустимых и непротиворечивых логических операций с непротиворечивыми логическими формулами классической формальной логики нулевого порядка. Согласно логическому закону Дунса Скота, дальнейшее развитие логического процесса на основе таких формул влечет за собой непредсказуемые логические выводы, часть из которых может быть истинной, а часть – ложной. Таким образом, логический процесс, понимаемый как цепочка умозаключений, и совершаемый с применением аристотелевской традиционной логики и классической формальной логикой нулевого порядка, - чреват возникновением формально-логических противоречий, как с точки зрения аристотелевской традиционной логики, так и с позиций классической формальной логики нулевого и первого порядков.

Таким образом, с одной стороны, мы видим, что аристотелевская традиционная логика является неполной, поскольку не в состоянии дать адекватное решение логическим парадоксам. С другой стороны классическая формальная логика нулевого порядка, являющаяся полной относительно аристотелевской традиционной логики – не может считаться аристотелевски непротиворечивой. В частности, нами была доказан «Первый принцип логико-математической трансценденции», свидетельствующий о том, в классической формальной логике нулевого порядка при определенных условиях выводимы, как формула **A** так и формула **¬A**. Такая логическая ситуация в аристотелевской традиционной логике характеризуется как антиномия.

С третьей стороны, мы также видим, что в рамках глобально непротиворечивой классической формальной логики нулевого порядка, в целом ряде случаев, второй и третий законы аристотелевской традиционной логики нарушаются конструктивно, и это несмотря на то, что все логические законы аристотелевской традиционной логики признаются истинными также и в классической формальной логике нулевого порядка.

Таким образом, по всей видимости, в рамках логико-математических теорий, основанных на комплексном применении аристотелевской традиционной логики, классической формальной логики нулевого порядка и классической формальной логики первого порядка, мы уже не можем утверждать, что можем достигнуть постижения «аристотелевской истинности» об изучаемых явлениях и процессах, где под «аристотелевской истинностью» в данном случае понимается совокупность аристотелевских представлений о материальной и логически-формальной сторонах понятия истинности, в которых второй и третий законы аристотелевской традиционной логики играют основополагающую роль.

Исходя из современной терминологии, общепринятой в классической формальной логике нулевого и первого порядков, в упомянутых логических системах, в основном речь идет о логической доказуемости, или же логической недоказуемости тех или иных логических формул. При этом, подавляющее большинство логических стандартных формул, определенных на множестве унарных, бинарных и в общем случае n- арных логических операций – являются логически недоказуемыми.

Наряду с понятиями доказуемости и недоказуемости логических формул, в классической формальной логике нулевого порядка рассматриваются понятия непротиворечивости, или же наоборот – противоречивости логических формул. При этом логическая формула считается непротиворечивой, если она является логически выполнимой, то есть выполняется хотя бы при одном сочетании значений логических аргументов из области их определения. Подавляющее большинство логических стандартных формул, определенных на множестве унарных, бинарных и в общем случае n- арных логических операций – являются логически выполнимыми и непротиворечивыми с точки зрения классической формальной логики нулевого порядка.

В целом, подавляющее большинство логических стандартных формул, определенных на множестве унарных, бинарных и в общем случае n- арных логических операций классической формальной логики нулевого порядка, – являются логически непротиворечивыми и вместе с тем недоказуемыми. Однако, с другой стороны для множества из них, согласно «Первому принципу логико-математической трансценденции, логически непротиворечиво выводимыми являются, как сами формулы **A,** так и логически инверсные им формулы **⌐A**. При этом, под непротиворечивым выводом, подразумевается такой логический вывод в рамках классической формальной логики нулевого порядка, который не содержит в себе тождественно противоречивых логических формул. Таким образом мы видим, что в рамках классической формальной логики нулевого порядка, понятия логической доказуемости и логической выводимости логических формул, являются принципиально отличными друг от друга понятиями. В частности, логическая формула, определенная на множестве n- арных логических операций классической формальной логики нулевого порядка, по своей начальной логической структуре может быть логически недоказуемой, но тем не менее логически непротиворечиво выводимой из других формул классической формальной логики нулевого порядка. Отмеченное выше обстоятельство является весьма существенной особенностью классической формальной логики нулевого порядка.

Классическая формальная логика нулевого порядка и формализуемый в ней «Первый принцип логико-математической трансценденции» системы **INCOL&TAMLA**, позволяют выявить то существенное обстоятельство, что аристотелевская традиционная логика, на деле не является общезначимой логической системой даже в рамках классической формальной логики нулевого порядка. Применение аристотелевской традиционной логики является верным только в том случае, когда изучаемые в ее рамках утверждения и их совокупности принадлежат к классу высказываний аристотелевской традиционной логики, то есть удовлетворяют первым трем законам упомянутой логической системы. В противном случае, рассуждения в рамках аристотелевской традиционной логики могут приводить к логическому коллапсу (тотальному ослаблению формально-логической истинности) и к дальнейшим недостоверным выводам.

Глобальная формальная непротиворечивость формальной классической логики нулевого порядка, доказанная Куртом Геделем, означает, что в ее рамках невозможно получить такие *две одновременно тождественно доказуемые внешние логические формулы*, которые в то же самое время *являются взаимно контрадикторными*. Классическая формальная логика нулевого порядка обладает также свойством логической полноты и разрешимости. Это обстоятельство выражается в том, что каждая логическая n-арная формула, формализуемая в рамках упомянутой системы, может быть полностью исследована за конечное число шагов, равняющееся числу 2^n.

В целом классическая формальная логика нулевого порядка является весьма эффективным и мощным средством логического анализа формализуемых в ее рамках логических формул, утверждений, а также их многобразных логических сочетаний и формализуемых логических процессов. С учетом результатов, полученных в рамках системы **INCOL&TAMLA,** в рамках классической формальной логики нулевого порядка становится возможным не только моделирование многих задач интуиционистской и конструктивистской логик, но также и многих задач «суперконструктивной логики», отличительной особенностью которой является исследование логических формул, выходящих за рамки второго и третьего основных законов аристотелевской традиционной логики.

Перейдем к рассмотрению логических проблем, связанных с применением «Метода математической индукции» в системе **PA&MI**, с точки зрения классической формальной логики нулевого порядка, а также с точки зрения аристотелевской традиционной логики. Ниже приведены формулировка и формальная логическая формула «Метода математической индукции».

Метод математической индукции

Если некоторое утверждение $A(n), n = 1,2,3..........$ ***справедливо для*** $n = 1$***, и для каждого*** n ***из справедливости*** $A(n)$ ***при значении*** n ***следует справедливость*** $A(n+1)$ ***при*** $n+1$***, то утверждение*** $A(n)$***- справедливо для всех натуральных*** n***, или формально:***

$$(\forall n \in N_+)((\forall i \in \{1,...n\})A(n) \equiv 1 \Rightarrow A(n+1) \equiv 1) \Rightarrow (\forall n \in N_+)(A(n) \equiv 1) \quad (4.6.1)$$

В рамках **Параграфа 4.4** , нами была сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема о достаточном условии генезиса формального логического коллапса в логическом аналоге функции Дирихле в системе PA&MI (Ахвледиани А.Н. – 2011)

Если значения натурального аргумента в формально-логическом аналоге функции Дирихле стремятся к актуальной бесконечности, то это обстоятельство является достаточным условием для генезиса формального логического коллапса в системе PA&MI при стремлении аргумента функции Дирихле к актуальной бесконечности.

Приведенная выше теорема свидетельствует о том, что конструктивно существуют случаи, когда логическая структура утверждений и логических формул, доказуемых при конечных значениях натурального аргумента, может меняться на недоказуемую логическую структуру при стремлении аргумента к актуальной бесконечности, что может сопровождаеться формально-логическим коллапсом.

Полученный нами результат свидетельствует о необходимости формулирования и обоснования «Модифицированного метода математической индукции» в логически корректной форме, в соответствии с классической формальной логикой нулевого и первого порядков, а также с учетом возможного генезиса логического коллапса при стремлении натурального аргумента к актуальной бесконечности. Это можно сделать на основе принятой в классической формальной логике, а также в аристотелевской традиционной логике, логической конструкции - «Модус поненс». Ниже предлагаются формулировка и обоснование «Модифицированного метода математической индукции», принятого в рамках формально-логической и теоретико-множественной системы **INCOL&TAMLA**.

<u>Модифицированный метод логико-математической индукции</u>

Если некоторое утверждение $A(n)$, является логически непротиворечиво выводимым для каждого натурального n, начиная с первого, и утверждение $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ также является логически непротиворечиво выводимым для каждого натурального n, начиная с первого, то утверждение $A(n+1)$ является логически непротиворечиво выводимым для каждого, сколь угодно большого, фиксированного конечного натурального числа n.

Необходимо отметить, что представленная выше формулировка «Модифицированного метода логико-математической индукции» основана на пошаговом применении логической формы «Модус поненс», которая является доказуемой логической формулой в классической формальной логике нулевого порядка. Кроме этого, речь идет только о логической выводимости рассматриваемого утверждения, что может быть доказано за конечное число шагов, на основе применения логической формы «Модус поненс». Представленная формулировка не исключает генезиса логического утверждения, логически трансцендентного по отношению к рассматриваемому, в процессе стремления натурального значения n к актуальной бесконечности. «Модифицированный метод логико-математической индукции» гарантирует только непротиворечивую логическую выводимость логического утверждения $A(n+1)$ для каждого, сколь угодно большого конечного натурального значения n при условии пошагового соблюдения логической формы «Модус поненс».

4.7 Феномен логической трансценденции в классической формальной логике первого порядка.

В настоящем параграфе рассматривается феномен логической трансценденции с точки зрения классической формальной логики первого порядка. Показано, что понятие **ω**-непротиворечивости, а также правила формального вывода логики первого порядка, - приводят к необходимости признания конструктивного существования феномена логической трансценденции в рамках классической формальной логики нулевого и первого порядка. Сформулирована и доказана теорема о тождественной доказуемости и формальной истинности логического вывода сильно трансцендентных логических формул на множестве бинарных логических операций в рамках классической формальной логики нулевого порядка.

Как известно, классическая формальная логика первого порядка включает в себя классическую формальную логику нулевого порядка. Основное отличие логики первого порядка от логики нулевого порядка заключается в наличии и применении квантора существования $\exists$ и квантора всеобщности $\forall$, а также связанных с этим правилами логического вывода. Ниже в соответствии с /4/ приводятся некоторые основные правила формального вывода, которые отличают логику первого порядка от логики нулевого порядка.

<u>Правило 1</u>

Суждение выражаемое формулой:

$$\forall x A(x) \Rightarrow A(c) \tag{4.7.1}$$

где, c - любой допустимый по условиям задачи символ для постоянной, является верным суждением.

<u>Правило 2</u>

Пусть B - суждение, не содержащее ни c, ни x. Тогда, если $A(c) \Rightarrow B$ - является верным суждением, таково же суждение $\exists x A(x) \Rightarrow B$.

<u>Правило 3</u>

Пусть $A(x)$ имеет одну-единственную свободную переменную (x) и пусть в ней каждое вхождение x свободно. Пусть B - суждение, не содержащее x. Тогда являются верными следующие суждения:

$$\neg(\forall x A(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x) \tag{4.7.2}$$

$$(\forall x A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x (A(x) \wedge B) \tag{4.7.3}$$

$$(\exists x A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x (A(x) \wedge B) \qquad (4.7.4)$$

Задача формальной логики первого порядка в приложении к конкретным наукам, в том числе и к математике, состоит в формировании логически правильных заключений, называемых формально-логически истинными или формально верными суждениями. Терминами «истинные» и «верные» в классической формальной логике первого порядка, обозначаются те суждения, которые образуются согласно некоторым правилам, принятым в рамках логики первого и нулевого порядка. Формируя суждение, содержащее некоторые логические символы, в виде логической формулы, мы еще не имеем указания ни на какую конкретную интерпретацию этих символов. Формальное суждение считается истинным, если его логическая структура является истинной независимо от того, как интерпретируется это суждение.

Правила для получения верных суждений известны под названием исчисления предикатов. Исчисление предикатов в свою очередь содержит подсистему правил, известную под названием исчисления высказываний. В исчислении высказываний принят следующий критерий тождественной формальной истинности (доказуемости) логического утверждения, выражаемого пропозициональной логической функцией.

Критерий тождественной формальной истинности (доказуемости) утверждения

Если логическое утверждение, выражено пропозициональной логической функцией, которая на всем множестве области определения входящих в нее бинарных логических аргументов принимает значения, равные логической единице, - то оно является тождественно формально истинным, или, что то же самое – доказуемым.

Рассмотрим определение сильно трансцендентных классов и множеств.

Определение логически сильно трансцендентных утверждений и формул

Логическое или математическое утверждение, или же логико-аналитическая формула А называются логически сильно трансцендентной по отношению к классической аристотелевской традиционной логике, если по отдельности непротиворечиво выводимы как формула А так и формула ⌐А.

Для дальнейшего изложения следует вновь обратиться к **Таблице 2** бинарных логических операций множества логических формул классической формальной логики нулевого порядка.

Сформулируем и докажем утверждение о формальной истинности и тождественной доказуемости формального вывода логически сильно трансцедентных формул на множестве бинарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка.

<u>Теорема о тождественной доказуемости формального вывода логически сильно трансцендентных формул (Ахвледиани А.Н. – 2011)</u>

На множестве бинарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка существуют такие две логически сильно трансцендентные формулы A и $\neg A$, для которых существуют тождественно доказуемые и формально-истинные логический выводы, конъюнкция которых также является тождественно доказуемой и формально-истинной.

Доказательство

Для доказательства сформулированного нами утверждения рассмотрим следующие логически сильно трансцендентные формулы A и $\neg A$:

$$A \equiv (x = 1) \tag{4.7.5}$$

$$\neg A \equiv \neg(x = 1) \tag{4.7.6}$$

Далее, средствами вычислительной логической программы математического пакета **MATCAD**, покажем, что для каждой из них, на множестве бинарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка, - существует тождественно доказуемый, а значит и формально-логически истинный вывод, причем конъюнкция упомянутых выводов также является тождественно доказуемой.

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.7.7}$$

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.7.8}$$

$$A := \overrightarrow{(x = 1)} \tag{4.7.9}$$

$$\overrightarrow{\Rightarrow[(x \vee y) \wedge (\Leftrightarrow(x,y)), A]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.7.10}$$

$$\overrightarrow{\Rightarrow[(x\oplus y)\wedge(\Rightarrow(x,y)),\neg A]}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad (4.7.11)$$

$$\overrightarrow{[\Rightarrow[(x\vee y)\wedge(\Leftrightarrow(x,y)),A]\wedge\Rightarrow[(x\oplus y)\wedge(\Rightarrow(x,y)),\neg A]]}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad (4.7.12)$$

Соотношение (4.7.12) доказывает сформулированную нами теорему.

В классической формальной логике первого порядка существует понятие о **ω** – логической непротиворечивости, смысл которого раскрывается в следующем ниже определении.

<u>Определение ω - непротиворечивости теории</u>

Некоторая логико-аналитическая теория Т называется логически ω-непротиворечивой тогда и только тогда, когда в ней не являются выводимыми следующие логические утверждения или формулы:

$$\exists xB(x)\wedge\forall x\neg B(x) \qquad (4.7.13)$$

$$\exists x\neg B(x)\wedge\forall xB(x) \qquad (4.7.14)$$

Рассмотрим следующее утверждение **С**:

С≡«*Все утверждения и логические формулы, выводимые на множестве утверждений логики нулевого порядка, не являются логически трансцендентными».*

Как было показано выше, конструктивно существует формально-логически тождественно истинный вывод логически сильно трансцендентных формул, что подтверждается соотношением (4.7.12). Это означает, что в том случае, если мы признаем утверждение **С** истинным, то в соответствии с определением **ω** – непротиворечивости, логика первого порядка будет **ω** – противоречивой. Поэтому у нас остается только один выход, - признать истинным следующее утверждение **SL**≡ ⌐**С** , что может быть выражено в виде следующей теоремы.

<u>Теорема о логической трансценденции в логике первого порядка (Ахвледиани А.Н. -2011г.)</u>

В классической формальной логике первого порядка имеет место следующее утверждение :

SL ≡ «*Некоторые утверждения и логические формулы, выводимые на множестве утверждений логики нулевого порядка, являются логически трансцендентными*».

Полученный нами результат доказывает наличие феномена формально-логической трансценденции в рамках современной классической формальной логики нулевого порядка.

Глава 5

Анализ формально-логических условий генезиса логического коллапса и логической неопределенности

5.1.Теоремы об условиях логического коллапса в классических формальных и полуформальных теориях на множестве бинарных логических операций.

Рассмотрим определение понятия логического коллапса (тотального ослабления формально-логической истинности в рамках классической формальной логики). Рассмотрение логико-аналитических явлений, связанных с логическим коллапсом, и сопутствующими ему явлениями, будем рассматривать в системах классической формальной логики нулевого порядка и классической формальной логики первого порядка, глобальная формальная непротиворечивость которых доказана выдающимся австрийским логиком Куртом Геделем.

Как известно, аристотелевская традиционная логика является составной частью систем классической формальной логики нулевого и первого порядков. Это означает, что все логические законы аристотелевской традиционной логики формализуются и доказываются также методами систем классической формальной логики нулевого и первого порядка.

Рассмотрим определения понятий логического коллапса (тотального ослабления формально-логической истинности) с точки зрения аристотелевской традиционной логики, а также с точки зрения систем классической формальной логики нулевого и первого порядка.

Определение логического коллапса в аристотелевской традиционной логике

Логическим коллапсом (тотальным ослаблением истинности) в аристотелевской традиционной логике (аристотелевским логическим коллапсом), называется такая логическая ситуация, когда цепочка умозаключений, удовлетворяющих логическим законам и правилам аристотелевской традиционной логики и систем классической формальной логики нулевого и первого порядка, приводит к противоречию с одним из законов аристотелевской традиционной логики.

Определение логического коллапса в классической формальной логике нулевого порядка

Логическим коллапсом (тотальным ослаблением истинности) в классической формальной логике нулевого порядка (логическим коллапсом нулевого порядка),

называется такая логическая ситуация, когда цепочка умозаключений, удовлетворяющих логическим законам и правилам аристотелевской традиционной логики и систем классической формальной логики нулевого и первого порядка, приводит к генезису (образованию) кортежа формально-логических значений истинности, каждый элемент которого равен логическому 0.

Определение логического коллапса в классической формальной логике первого порядка

Логическим коллапсом (тотальным ослаблением истинности) в классической формальной логике первого порядка (логическим коллапсом первого порядка), называется такая логическая ситуация, когда цепочка умозаключений, удовлетворяющих логическим законам и правилам аристотелевской традиционной логики и систем классической формальной логики нулевого и первого порядка, приводит к противоречию с одним из законов или правил классической формальной логики первого порядка.

Определение глобального (логически общезначимого) логического коллапса

Глобальным (логически общезначимым) логическим коллапсом, называется такой вид логического коллапса, который удовлетворяет каждому из определений аристотелевского логического коллапса, логического коллапса нулевого порядка и логического коллапса первого порядка.

Определение частичного логического коллапса

Частичным логическим коллапсом, называется такой вид логического коллапса, который удовлетворяет одному из определений аристотелевского логического коллапса, логического коллапса нулевого порядка или логического коллапса первого порядка, и вместе с тем не является логическим коллапсом с точки зрения другой из рассматриваемых систем – аристотелевской традиционной логики, классической формальной логики нулевого порядка или классической формальной логики первого порядка.

Сформулируем и докажем следующую теорему о достаточных условиях логического коллапса в логико-математических и формализованных физико-механических исследованиях на множестве бинарных логических операций.

Теорема о первом достаточном условии генезиса логического коллапса (Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)

Если логико-аналитические или физические, логически формализуемые объекты A и B, изучаемые в некоторой формальной или полуформальной логико-математической, или физико-механической теории T, удовлетворяют следующей логической формуле на множестве бинарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка:

$$[(A \oplus B) \wedge (A \wedge B)] \equiv 0 \qquad (5.1.1)$$

то это обстоятельство – является достаточным условием для генезиса логического коллапса с точки зрения систем классической формальной логики нулевого и первого порядков.

Доказательство

Ниже представлено формально-логическое доказательство, выполненное средствами логической вычислительной программы известного и широко распространенного вычислительного математического пакета **MATCAD**.

$$A := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (5.1.2)$$

$$B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (5.1.3)$$

$$\overrightarrow{[(A \oplus B) \wedge (A \wedge B)]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (5.1.4)$$

Формула (5.1.4) указывает на то, что формула $[(A \oplus B) \wedge (A \wedge B)]$ является тождественно противоречивой, что свидетельствует о логическом коллапсе в теории T. Поскольку классическая формальная логика нулевого порядка является составной частью классической формальной логики нулевого порядка, то логический коллапс нулевого порядка является одновременно и логическим коллапсом первого порядка. Теорема доказана.

<u>Теорема о втором достаточном условии генезиса логического коллапса (Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)</u>

Если логико-аналитические или физические, логически формализуемые объекты A и B, изучаемые в некоторой формальной или полуформальной логико-математической, или физико-механической теории T, удовлетворяют следующей

логической формуле на множестве бинарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка:

$$[(A \to B) \wedge (A \wedge \neg B)] \equiv 0 \tag{5.1.5}$$

то это обстоятельство – является достаточным условием для генезиса логического коллапса с точки зрения систем классической формальной логики нулевого и первого порядков.

Доказательство

Ниже представлено формально-логическое доказательство, выполненное в автоматическом режиме, на основе логической вычислительной программы вычислительного математического пакета **MATCAD**.

$$A := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.1.6}$$

$$B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.1.7}$$

$$\overrightarrow{[(\Rightarrow(A,B)) \wedge (A \wedge \neg B)]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.1.8}$$

Формула (5.1.8) указывает на то, что рассматриваемая нами формула $[(A \to B) \wedge (A \wedge \neg B)]$ является тождественно противоречивой, что свидетельствует о логическом коллапсе в теории T. Поскольку классическая формальная логика нулевого порядка является составной частью классической формальной логики нулевого порядка, то логический коллапс нулевого порядка является одновременно логическим коллапсом первого порядка. Теорема доказана.

<u>Теорема о трансформации частичного логического коллапса в глобальный логический коллапс (Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)</u>

Если логико-аналитические или физические, логически формализуемые объекты A и B, изучаемые в некоторой формальной или полуформальной логико-математической, или физико-механической теории T, удовлетворяют условиям генезиса логического коллапса в классической формальной логике нулевого и первого порядков, то рассматриваемый случай логического коллапса влечет за собой аристотелевский логический коллапс и трансформируется в глобальный (логически общезначимый) логический коллапс.

Доказательство

Ниже представлено формально-логическое доказательство, выполненное в автоматическом режиме, на основе логической вычислительной программы вычислительного математического пакета **MATCAD**.

$$A := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.1.9}$$

$$B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.1.10}$$

$$\overrightarrow{\Rightarrow [[(A \oplus B) \wedge (A \wedge B)], (A = \neg A)]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.1.11}$$

$$\overrightarrow{\Rightarrow [[(\Rightarrow(A, B)) \wedge (A \wedge \neg B)], (A = \neg A)]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.1.12}$$

Формулы (5.1.11) и (5.1.12) свидетельствуют о генезисе аристотелевского логического коллапса, поскольку в рассматриваемом случае, на основании логического закона Дунса Скота, становятся выводимыми логические формулы, противоречащие второму основному закону аристотелевской традиционной логики. Таким образом логический коллапс нулевого и первого порядков влечет за собой также и аристотелевский логический коллапс, и тем самым трансформируется в глобальный, логически общезначимый логический коллапс в теории T, причем не только с точки зрения классической формальной логики, а также и с точек зрения конструктивистской и интуиционистской логик, признающих второй основной закон аристотелевской традиционной логики истинным. Теорема доказана.

5.2 Общий метод анализа возможности логического коллапса на множестве n *– арных логических операций*

В настоящем параграфе рассматривается общий метод анализа возможности логического коллапса на множестве n- арных логических операций в логико-аналитических математических теориях, содержащих классическую формальную логику нулевого порядка. Имеет место следующее общее условие генезиса логической трансценденции на множестве n- арных логических операций.

Теорема о достаточном условии генезиса логического коллапса на множестве N-арных логических операций

Если для логико-аналитических или физических, логически формализуемых объектов A1,A2,...AN, изучаемых в некоторой формальной или полуформальной логико-математической, или физико-механической теории T, конструктивно существует логическая формула этой теории, удовлетворяющая на множестве N-арных логических операций классической формальной логики нулевого порядка следующему условию:

$$F(A1, A2,..., AN) \equiv 0 \qquad (5.2.1)$$

то это обстоятельство является достаточным условием для генезиса логического коллапса в теории T с точки зрения систем классической формальной логики нулевого и первого порядков.

Доказательство

Для исследования логической формулы $F(A1, A2,..., AN)$ в некоторой теории T, необходимо сперва составить логические кортежи для логических переменных $A1, A2,..., AN$, учитывающие все комбинации возможных значений рассматриваемых независимых логических переменных. Затем следует вычислить логический кортеж истинностных значений логической формулы $F(A1, A2,..., AN)$. Если при всех возможных 2^N логических комбинациях аргументов будет выполняться условие:

$$\overline{F(A1, A2,..., AN)} = 0 \qquad (5.2.2)$$

то это обстоятельство в соответствии с терминологией классической формальной логики нулевого порядка будет означать тождественную формальную противоречивость формулы $F(A1, A2, ..., AN)$. С другой стороны полученная логическая ситуация будет удовлетворять определению понятия логического коллапса. Это обстоятельство и свидетельствует о генезисе логического коллапса на множестве n- арных логических операций в рассматриваемой теории T. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь метод, с помощью которого можно формировать кортежи истинностных значений логических аргументов с учетом всего множества их возможных комбинаций. Упомянутый метод заключается в способе построения логических кортежей логических аргументов, обеспечивающего рассмотрение полного набора всевозможных комбинаций истинностных значений логических аргументов.

В том случае, если мы рассматриваемтся логическую формулу, содержащую всего один логический аргумент, то у нас имеется множество унарных логических операций, а соответствующая таблица, описывающая множество значений комбинаций логического аргумента будет состоять всего из одного столбца:

A1
0
1

(5.2.3)

Далее переходим к случаю бинарных логических операций. В этом случае у нас имеется два логических аргумента, все множество возможных комбинаций которых сведены в следующую таблицу:

A1	**A2**
0	0
1	0
0	1
1	1

(5.2.4)

Таблица (5.2.4) образована следующим образом. Сперва по вертикали дублируется столбец истинностных значений логического аргумента $A1$, представленный в таблице (5.2.3). Затем формируется столбец истинностных значений логического аргумента $A2$. При этом, сперва по вертикали два раза записывается значения логического нуля, а затем еще два раза значения логической единицы.

Далее переходим к случаю тернарных логических операций. В этом случае у нас имеется три логических аргумента, все множество возможных комбинаций которых сведены в следующую таблицу:

A1	**A2**	**A3**
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	0
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	1

(5.2.5)

Таблица (5.2.5) образована следующим образом. Сперва по вертикали дублируются столбцы истинностных значений логических аргументов $A1, A2$, представленные в таблице (5.2.4). Затем формируется столбец истинностных значений логического аргумента $A3$. При этом сперва по вертикали четыре раза записываются значения логического нуля, а затем еще четыре раза значения логической единицы.

Применяя последовательным образом описанный выше метод, при переходе к n-арным логическим операциям мы будем иметь n логических аргументов. Для формирования таблицы всех возможных комбинаций значений логических аргументов надо поступить следующим образом. Вначале по вертикали дублируется таблица значений логических аргументов $A1, A2, ..., A(n-1)$, полученная на предыдущем этапе. Затем формируется столбец истинностных значений логического аргумента An. При этом, сперва по вертикали 2^{n-1} раз записываются значения логического нуля, а затем еще столько же раз – значения логической единицы.

Само вычисление логического кортежа истинностных значений рассматриваемой формулы $F(A1, A2, ..., AN)$ в системе **MATCAD** происходит в автоматическом режиме, причем логические операции в соответствии с рассматриваемой логической формулой осуществляются построчно на основании применения оператора векторизации, в соответствии с которой вычисляемая функция принимает вид - $\overline{F(A1, A2, ..., AN)}$.

В случае логического коллапса в соответствии с формулой $F(A1, A2, A3)$ на множестве тернарных логических отношений, таблица истинностных значений логических аргументов и соответственных значений логической функции принимает следующий вид:

A1	**A2**	**A3**	$F(A1, A2, A3)$
0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

(5.2.6)

В общем случае, если исследуемая на предмет возможности логического коллапса формула $F(A1, A2, ..., AN) \equiv 0$ такова, что она тождественно равна логическому нулю при всех возможных комбинациях входящих в нее логических аргументов, то в рассматриваемом случае имеет место логический коллапс.

$$F(A1, A2, ..., AN) \equiv 0 \qquad (5.2.7)$$

5.3 Логико-аналитические теоремы об исключенных и неисключенных логических возможностях

Как известно, один из основных законов аристотелевской традиционной логики, - закон об исключенном третьем, - формулируется следующим образом.

Закон об исключенном третьем

Для любого высказывания – истинно либо само высказывание либо его отрицание, третья возможность исключена.

$$A \oplus \neg A \qquad (5.3.1)$$

В формуле (5.3.1) приняты следующие обозначения:

A - некоторое высказывание, $\neg A$ - отрицание высказывания A. $\oplus$ - логическая пропозициональная связка, языковым эквивалентом которой является исключающее «либо», $\neg$ - символ отрицания, языковый эквивалент которого выражается, как «не - A», или выражением «не верно, что A» .

При внимательном анализе «Закона об исключенном третьем» можно заметить, что в упомянутом логическом законе имеется существенная логическая неопределенность в отношении самого «исключенного третьего», т.е. по сути дела оказывается, что понятие «исключенного третьего» не является вполне формально-логически определенным.

В связи с упомянутым обстоятельством, в настоящей работе исследуются различные возможности, которые могут претендовать по некоторым формально-логическим и аналитическим признакам на статус «исключенного третьего» в аристотелевской традиционной логике, и анализируются возникающие при этом формально-логические проблемы в основаниях классической формальной логики.

Так например, в **Параграфе 4.1** настоящей работы, показано, что имеются существенные различия между аристотелевской традиционной логикой и классической формальной логикой нулевого порядка. В частности, в упомянутой работе сформулирован и доказан «Первый закон логико-математической трансценденции».

Первый принцип логико-математической трансценденции (Ахвледиани А.Н. – Ахвледиани Н.В. – 1990 г)

В классической формальной логике нулевого порядка существуют такие логически сильно трансцендентные утверждения и формулы А и ⌐А, что по отдельности логически непротиворечиво выводимо, как А так и ⌐А.

«Первый принцип логико-математической трансценденции» свидетельствует о весьма существенных различиях между аристотелевской традиционной логикой и классической формальной логикой нулевого порядка. В аристотелевской традиционной логике выводимость утверждений A и $\neg A$ в некоторой теории T, свидетельствует о логической противоречивости теории, однако известным австрийским логиком Куртом Геделем было установлено, что классическая формальная логика является глобально формально непротиворечивой логической системой. Поэтому факт непротиворечивой выводимости утверждений A и $\neg A$ в классической формальной логике нулевого порядка указывает на имеющиеся различия между упомянутыми двумя логическими системами.

Упомянутые выше обстоятельства означают конструктивное существование явления логической трансценденции, имеющее место в основаниях классической формальной логики и классической теоретико-множественной математики. При этом под логической трансценденцией понимается выход за пределы аристотелевской традиционной логики (от латинского transcendence – выходить за пределы) в смысле выполнимости второго и третьего основных законов аристотелевской традиционной логики.

Рассмотрим теперь определение логической неопределенности и теорему о существовании логической неопределенности в рамках классической формальной логики нулевого порядка.

<u>Определение логической неопределенности</u>

Логической неопределенностью называется такая логическая ситуация при которой не представляется возможным утверждать, какое из двух утверждений A ***или*** $\neg A$ ***является истинным. Формально, логическая неопределенность моделируется следующим образом:***

$$LI \equiv (A = 1) \vee (\neg A = 1) \tag{5.3.2}$$

Сформулируем и докажем следующую теорему.

<u>Теорема о неисключенной логической возможности (А.Н. Ахвледиани – 2011г.)</u>

Логическая неопределенность в отношении истинности утверждений A ***и*** $\neg A$ ***является неисключенной и формально-логически истинной логической возможностью, как с точки зрения классической формальной логики нулевого порядка, так и с точки зрения аристотелевской традиционной логики.***

Доказательство

В соответствии с правилами унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка имеем.

$$A := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.3.3}$$

$$LI := \overrightarrow{[(A = 1) \vee (\neg A = 1)]} \tag{5.3.4}$$

$$LI = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.3.5}$$

Соотношения (5.3.4) и (5.3.5), в силу получения тождественно истинного логического кортежа истинностных значений исследуемого утверждения, означают, что рассматриваемый вид логической неопределенности является логически истинно возможным с точки зрения классической формальной логики нулевого порядка.

Рассмотрим теперь ту же самую логическую ситуацию с точки зрения аристотелевской традиционной логики. В соответствии с третьим основным законом аристотелевской традиционной логики, истинным является либо A, либо $\neg A$. В полном соответствии с законом о непротиворечии аристотелевской традиционной логики и законом об исключенном третьем следует, что одно из двух утверждений A или $\neg A$ обязательно является истинным. Поэтому из основных законов аристотелевской традиционной логики также следует:

$$LI \equiv (A=1) \vee (\neg A=1) \equiv 1 \tag{5.3.6}$$

Соотношение (5.3.6) означает справедливость сформулированной нами теоремы и с точки зрения аристотелевской традиционной логики. Теорема доказана.

Рассмотрим теорему о логических возможностях, исключенных с точки зрения аристотелевской традиционной логики.

Теорема об исключенных логических возможностях (А.Н. Ахвледиани - 2011г.)

Логические возможности, определяемые соотношениями:

$$L1 \equiv (A \wedge \neg A) \tag{5.3.7}$$

$$L2 \equiv (\neg A \wedge \neg\neg A) \tag{5.3.8}$$

эквивалентны отрицанию логического закона о непротиворечии и исключены из рассмотрения в аристотелевской традиционной логике.

Доказательство.

Отметим, что в силу логического закона аристотелевской традиционной логики о снятии двойного отрицания, логические формулы $L1$и $L2$ эквивалентны друг другу. Поэтому достаточно доказать сформулированное в теореме утверждение для одной из этих формул. Доказательство осуществляется на множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка. А именно имеем:

$$A := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.3.9}$$

$$\overrightarrow{\Leftrightarrow [(A \wedge \neg A), \neg(A \neq \neg A)]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.3.10}$$

Соотношение (5.3.10) свидетельствует о том, что логическая формула $L1$ эквивалентна отрицанию закона о непротиворечии. В связи с этим обстоятельством логические формулы этого типа исключаются из рассмотрения в аристотелевской традиционной логике на основании их несответствия основным логическим законам упомянутой логической системы. Теорема доказана.

Рассмотрим теорему об условии генезиса логических формул, исключенных из рассмотрения в аристотелевской традиционной логике.

<u>Условие генезиса логических формул, исключенных из рассмотрения в аристотелевской традиционной логике (А.Н. Ахвледиани – 2011г.)</u>

Наличие логической неопределенности в отношении некоторой логической формулы A ***является достаточным условием для выводимости логической формулы, исключенной из рассмотрения в аристотелевской традиционной логике, или формально:***

$$(A \forall \neg A) \Rightarrow [(A \Rightarrow (A = \neg A)) \vee (A \Rightarrow (A = \neg A))] \equiv 1 \qquad (5.3.11)$$

Доказательство.

Доказательство осуществляется средствами логической программы вычислительного математического пакета **MATCAD**.

$$\overrightarrow{\Rightarrow[[(A = 1) \vee (\neg A = 1)],[\Rightarrow[A,(A = \neg A)] \vee \Rightarrow[\neg A,(A = \neg A)]]]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (5.3.12)$$

Соотношение (5.3.12) означает, что в случае наличия логической неопределенности вида (5.3.6), или из логической формулы A выводимо противоречие, или из логической формулы $\neg A$ выводимо противоречие, причем в силу наличия логической неопределенности, заранее неизвестно из какой именно формулы A или $\neg A$ выводимо противоречие. Соотношение (5.3.12) доказывает сформулированную нами теорему.

Рассмотрим некоторые особенности применения логического «Метода доказательства от противного» в рамках классической формальной логики. Известно, что упомянутый метод является одним из основных видов косвенного доказательства, и, как правило, применяется в тех случаях, когда не представляется возможным доказать то или иное утверждение на основе прямых методов доказательства. Логическая формула «Метода доказательства от противного» определена на множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка и имеет следующий вид.

$$\overrightarrow{\Rightarrow [(\Rightarrow (A,0)), \neg A = 1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (5.3.13)$$

Логическая формула (5.3.13) может быть выражена следующим образом.

<u>Метод доказательства от противного</u>

Если из рассматриваемого утверждения А следует логическое противоречие, то отрицание ¬А рассматриваемого утверждения является истинным.

Соотношение (5.3.13) свидетельствует о том, что логическая формула «Метода доказательства от противного» является истинной.

Таким образом мы видим, что применение «Метода доказательства от противного» оправдано в рамках аристотелевской традиционной логики.

Однако при выходе из рамок аристотелевской традиционной логики и переходе в область классической формальной логики нулевого порядка, - положение осложняется. Ниже будет показано, что в классической формальной логике нулевого порядка возникают логические ситуации, являющиеся альтернативными по отношению к «Методу доказательства от противного». В частности имеет место следующая теорема.

<u>Альтернативный метод доказательства от противного (А.Н. Ахвледиани – 2011г.)</u>

Если из рассматриваемой логической формулы А следует логическое противоречие, то рассматриваемая логическая формула может быть непротиворечивой с точки зрения классической формальной логики нулевого порядка, а ее логическая структура может представлять собой двухместный логический кортеж, на первом месте которого находится логический ноль, а на втором логическая единица.

Доказательство.

Доказательство осуществляется средствами логической программы вычислительного математического пакета **MATCAD**.

$$\overrightarrow{\Rightarrow \left[\Rightarrow (A,0), A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (5.3.14)$$

Соотношение (5.3.14), в силу получения нами тождественно истинного логического кортежа истинностных значений рассматриваемой логической формулы, - доказывает сформулированную нами теорему.

Сравнивая соотношения (5.3.13) и (5.3.14) мы можем придти к заключению, что с точки зрения классической формальной логики нулевого порядка, «Метод доказательства от противного» и «Альтернативный метод доказательства от противного» являются формально-логически равноистинными, хотя и описывают две различные возможности. Это обстоятельство по нашему мнению открывает новые перспективы с точки зрения возможности достижения большей логической полноты при исследовании тех или иных логически формализованных утверждений в рамках классической формальной логики нулевого порядка.

5.4 Третий принцип логико-математической трансцендентности.

Рассмотрим следующее определение внутреннего локального логического подпространства.

Определение внутреннего локального логического подпространства пространства SL

Пусть** T **- некоторая формально-логически тождественно доказуемая формула общего топологического логического пространства** SL**, содержащая подформулы** $X1,...Xn,...XN$**. Формула** T **называется внутренним локальным логическим подпространством пространства** SL **в том, и только в том случае, если внутри формулы** T **выполняются все правила, определенные в пространстве** SL**.

Рассмотрим определение внутреннего, локального, предельно трансцендентного логического подпространства TZ.

Определение внутреннего локального предельно трансцендентного логического подпространства TZ

*TZ **называется внутренним локальным предельно трансцендентным логическим подпространством пространства** SL **в том, и только в том случае, когда оно является внутренним локальным логическим подпространством пространства** SL**, и внутри него являются выводимыми логические формулы, эквивалентные отрицанию второго или третьего основных законов аристотелевской традиционной логики без изменения внешней тождественной формально-логической истинности** TZ**.***

Известно следующее основное правило исчисления высказываний классической формальной логики нулевого порядка.

Основное правило исчисления высказываний

Если** G **является** j**- арной пропозициональной функцией бинарных логических переменных** x_j, $j = 1,...,J$**, и является тождественно доказуемой, то результат замены некоторых логических переменных** x_j **каким либо суждением , не меняет тождественной доказуемости** G **.

Теперь сформулируем и докажем **«Третий принцип логико-математической трансценденции»**.

<u>Третий принцип логико-математической трансценденции (Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)</u>

В классической формальной логике нулевого порядка конструктивно существуют внутренние локальные, логически предельно трансцендентные подпространства $TZ1$ ***и*** $TZ2$***, определяемые тождественно доказуемыми формулами классического формального исчисления Гильберта.***

Доказательство.

Рассмотрим следующие две логические формулы классического формального исчисления Гильберта и соответствующие им логические кортежи истинностных значений.

$$A := \overrightarrow{\Rightarrow(x, \Rightarrow(\neg x, y))} \tag{5.4.1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.4.2}$$

$$B := \overrightarrow{\Rightarrow(\neg x, \Rightarrow(x, y))} \tag{5.4.3}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.4.4}$$

Логические кортежи значений истинности (5.4.2) и (5.4.4) свидетельствуют о том, что рассматриваемые формулы (5.4.1) и (5.4.3) классического формального исчисления Гильберта являются тождественно доказуемыми.

Необходимо отметить, что логические формулы (5.4.1) и (5.4.3) являются основой так называемого «Диагонального метода доказательства», часто применяемого в современной классической формальной логике нулевого порядка. Языковые эквиваленты формул (5.4.1) и (5.4.3) имеют следующий вид:

$A \equiv$ «Если имеет место логическая формула x, то из ее отрицания $\neg x$ следует логическая формула y» ; (5.4.5)

$B \equiv$ «Если имеет место логическая формула $\neg x$, то из ее отрицания x следует логическая формула y» . (5.4.6)

«Основное правило исчисления высказываний» позволяет нам преобразовать формулы (5.4.1) и (5.4.3) без изменения логического кортежа значений истинности в следующие формулы:

$$\mathrm{TZ1} := \overrightarrow{\Rightarrow[\mathrm{x}, \Rightarrow[\neg\mathrm{x}, [(\mathrm{z} = \neg\mathrm{z}) = 1]]]} \tag{5.4.7}$$

$$\mathrm{TZ1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.4.8}$$

$$\mathrm{TZ2} := \overrightarrow{\Rightarrow[\neg\mathrm{x}, \Rightarrow[\mathrm{x}, [(\mathrm{z} = \neg\mathrm{z}) = 1]]]} \tag{5.4.9}$$

$$\mathrm{TZ2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.4.10}$$

Из формул (5.4.7) и (5.4.9) следует, что в этих формулах каждой логической бинарной точке из общего топологического инверсного логического пространства SL соответствует логически инверсная точка. Например элементы следующих пар: x и $\neg x$, z и $\neg z$, $(z = \neg z)$ и логическая 1, являются логически взаимно инверсными точками пространства SL. Кроме этого мы видим, что формулы (5.4.7) и (5.4.9) содержат в качестве подформул формулы, являющиеся отрицаниями второго основного закона аристотелевской традиционной логики, и несмотря на это логические кортежи значений истинности (5.4.8) и (5.4.10) свидетельствуют о тождественной формально-логической истинности формул (5.4.7) и (5.4.9). Таким образом из приведенного выше рассуждения видно, что для $TZ1$ и $TZ2$ - выполнены все требования предъявляемые к внутренним локальным логически предельно трансцендентным подпространствам пространства SL. Теорема доказана.

Доказанный нами **«Третий принцип логико-математической трансценденции»**, свидетельствует о конструктивном существовании локальных, логически предельно трансцендентных подпространств общего топологического логического пространства SL, существующих внутри некоторых («диагональных») тождественно доказуемых формул классического формального исчисления Гильберта.

5.5 Четвертый принцип логико-математической трансценденции.

Настоящий параграф посвящен исследованию логико-аналитической природы одного их основных понятий классической теории множеств – понятия эквивалентности множеств. В книге / 2 / понятие множественной эквивалентности между двумя множествами A и B определяется следующим образом.

<u>Определение порядковой эквивалентности множеств</u>

Два множества A и B называются множественно эквивалентными, если существует взаимно однозначное соответствие между ними, при котором каждому элементу a множества A соответствует единственный элемент b множества B, и каждому элементу b множества B, соответствует единственный элемент a множества A.

Понятие множественной эквивалентности между двумя множествами является основой для установления отношения равенства между кардинальными числами (мощностями) множеств.

<u>Определение равенства кардинальных чисел</u>

Если два множества A и B являются множественно эквивалентными, то их кардинальные числа равны:

$$(A \cong B) \Rightarrow [Card(A) = Card(B)] \tag{5.5.1}$$

Соотношение (5.5.1) является формальным выражением достаточного условия равенства кардинальных чисел с точки зрения классической теории множеств.

Кардинальные числа бесконечных множеств являются бесконечно большими величинами, по терминологии классической теории множеств являются трансфинитными числами, а по терминологии классического математического анализа являются «несобственными числами». Например, кардинальное число всего множества натуральных чисел обозначается, как $\aleph_0$, и определяется следующим выражением:

$$Card(N_+) = \aleph_0 = 1+1+1+.................................. \quad (5.5.2)$$

Постольку поскольку кардинальные числа бесконечных множеств и классов одновременно являются бесконечно большими величинами, то они подлежат количественному сравнению по правилам, которые сответствуют аналитическим правилам, установленным в классическом математическом анализе для бесконечно больших величин - /5 /.

<u>Правила количественного сравнения кардинальных чисел</u>

1. ***Кардинальное число бесконечного класса A и кардинальное число бесконечного класса B являются кардинальными числами одного порядка, если для этих кардинальных чисел выполняется следующее соотношение***:

$$\lim \frac{Card(A)}{Card(B)} = d \quad (5.5.3)$$

где d – конечное и отличное от нуля действительное число.

2. ***Кардинальное число бесконечного класса B является кардинальным числом большего порядка по сравнению с кардинальным числом бесконечного класса A, если для этих кардинальных чисел выполняется следующее соотношение:***

$$\lim \frac{Card(A)}{Card(B)} = 0 \quad (5.5.4)$$

3. ***Если два кардинальных числа Card(A) и Card(B) равны друг другу, то по определению равенства кардинальных чисел, они являются кардинальными числами одного порядка. По логическому закону контрапозиции это означает, что если кардинальные числа Card(A) и Card(B) являются бесконечно большими величинами разного порядка, то они не равны друг другу, или формально:***

$$\left[\left(\lim \frac{Card(A)}{Card(B)} = 0\right) \vee \left(\lim \frac{Card(B)}{Card(A)}\right) = 0\right] \Rightarrow (A \neq B) \quad (5.5.5)$$

Рассмотрим разбиение всего множества Q_{0+} неотрицательных рациональных чисел на два класса Q_{01} и $Q_{1\infty}$ следующим образом. Число 0 отнесем к классу Q_{01}. Число 1 отнесем к классу $Q_{1\infty}$. В отношении любых других положительных рациональных чисел будем поступать следующим образом. Пусть $\frac{m}{n}$ - произвольное рациональное число. Если $\frac{m}{n} > 1$, то число $\frac{m}{n}$ отнесем к классу $Q_{1\infty}$, а соответствующее ему число $\frac{n}{m}$ - отнесем к классу Q_{01}. Если же $0 < \frac{m}{n} < 1$, то число $\frac{m}{n}$ отнесем к классу Q_{01}, а соответствующее ему число $\frac{n}{m}$ отнесем к классу $Q_{1\infty}$. Нетрудно видеть, что при рассматриваемом разбиении, каждое неотрицательное рациональное число попадет в один и только один из классов, и кроме этого каждому рациональному числу $\frac{m}{n}$ одного класса соответствует одно и только одно рациональное число $\frac{n}{m}$ другого класса. Классы, полученные в результате рассмотренного разбиения, одновременно являются и множествами, поскольку однозначно можно определить, какое из неотрицательных рациональных чисел попадает в тот или иной класс. Построенное нами конструктивное разбиение позволяет считать доказанной на основе приведенного выше прямого и непротиворечивого вывода следующую лемму, которая является справедливой, как с точки зрения теоретико-множественной эквиваленции множеств, так и с точки зрения равенства кардинальных чисел сооответствующих множеств, как бесконечно больших числовых величин.

<u>Лемма 1</u>

Кардинальные числа множеств Q_{01} и $Q_{1\infty}$ ***равны:***

$$Card(Q_{01}) = Card(Q_{1\infty}) \tag{5.5.6}$$

В соответствии с **Леммой 1,** рассмотренное нами выше разбиение определяет эквиваленцию $\Im Q1$ между двумя множествами рациональных чисел Q_{01} и $Q_{1\infty}$, при котором каждому рациональному числу $\frac{m}{n}$ одного множества, соответствует одно и только одно рациональное число $\frac{n}{m}$ другого множества.

Рассмотрим теперь соответствие $\Im Q2$, определенную следующим образом. Каждому рациональному числу множества Q_{01} поставим в соответствие рациональное число множества Q_{12} всех рациональных чисел, заключенных на полусегменте [1,2) согласно выражениям:

$$Q_{12} = [1,2) \tag{5.5.7}$$

$$(r1 \in Q_{01}) \Leftrightarrow [(r1+1) \in Q_{12}] \qquad (5.5.8)$$

Из формул (5.5.7) и (5.5.8) следует, что рассмотренное нами соответствие $\Im Q2$ является взаимно однозначным. Это обстоятельство означает справедливость следующего утверждения.

Лемма 2

Кардинальные числа множеств Q_{01} и Q_{12} ***равны:***

$$Card(Q_{01}) = Card(Q_{12}) \qquad (5.5.9)$$

Из известного *свойства транзитивности отношения эквивалентности* и справедливости соотношений (5.5.6) и (5.5.9), следует справедливость следующего утверждения.

Лемма 3

Кардинальные числа множеств Q_{12} и $Q_{1\infty}$ ***равны:***

$$Card(Q_{12}) = Card(Q_{1\infty}) \qquad (5.5.10)$$

Теперь рассмотрим вопрос количественного соотношения между кардинальными числами $Card(Q_{12})$ и $Card(Q_{1\infty})$ с точки зрения бесконечно больших количественных величин. Вследствие того обстоятельства, что мощности всех множеств всех рациональных чисел, расположенных в полусегментах $(n, n+1]$, где n - натуральное число, - равны, - то имеет место следующее соотношение:

$$\frac{Card(Q_{12})}{Card(Q_{1\infty})} = \frac{1}{n-1}, n \to \infty \qquad (5.5.11)$$

Из соотношения (5.5.11) следует:

$$\lim \left[\frac{Card(Q_{12})}{Card(Q_{1\infty})} \right] = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n-1} \right) = 0 \qquad (5.5.12)$$

Из справедливости соотношения (5.5.12) и правил количественного сравнения кардинальных чисел вытекает справедливость следующего утверждения:

Лемма 4

Кардинальные числа множеств Q_{12} и $Q_{1\infty}$ ***являются бесконечно большими величинами разного порядка.***

Сопоставление «Правил количественного сравнения кардинальных чисел» с **Леммой 4** позволяет придти к следующему утверждению.

Лемма 5

Кардинальные числа множеств Q_{12} и $Q_{1\infty}$ ***не являются равными.***

Нетрудно видеть, что **Лемма 5** и **Лемма 3** являются логически взаимно контрадикторными.

Полученный результат можно сформулировать в виде «Четвертого принципа логико-математической трансценденции».

Четвертый принцип логико-математической трансценденции

Каждая, достаточно богатая формальная или полуформальная математическая теория, содержащая классическую формальную логику нулевого и первого порядков, теорию рациональных чисел, определение бесконечно большой величины и определение взаимно однозначного соответствия классов или множеств (в том числе и бесконечных), содержит такие логически сильно трансцендентные логико-математические утверждения А и ¬А, что по отдельности выводимо, как утверждение А, так и утверждение ¬А.

Таким образом из представленного выше материала становится очевидным, что существуют случаи, когда понятие о взаимно-однозначном соответствии двух бесконечных множеств, в сочетании со свойством транзитивности отношения множественной эквивалентности двух бесконечных множеств, приводит к генезису феномена логической трансценденции на множестве рациональных чисел вследствие различия между логико-аналитической природой множественно-порядковой и количественной составляющих понятия кардинального числа.

Глава 6

Исследование явления логического коллапса пластических систем в «Классической теории предельного равновесия»

6.1. Теоремы о физико-механическом коллапсе жестко-пластических систем в «Классической теории предельного равновесия» («LET»)

История развития и практика применения методов «Теории предельного равновесия пластических систем» в сфере экспертного анализа по установлению причин коллапса зданий и сооружений, выполненных из материалов, обладающих пластическими свойствами, показывает, что статический, кинематический и статико-кинематические методы «Теории предельного равновесия пластических систем», на сегодняшний день, являются весьма эффективными, как с точки зрения достоверности оценки реальной угрозы развития коллапса упомянутых сооружений, так и с точки зрения наличия хорошо разработанного и эффективного математического аналитического аппарата, позволяющего описывать многообразные физико-механические и логико-аналитические процессы, сопровождающие процесс развития коллапса в тех или иных конкретных сооружениях и конструкциях. История развития «Теории предельного равновесия» в 20-м столетии ознаменовалась созданием общей аналитической формализованной теории в виде «Классической теории предельного равновесия» **(LET - Limiting Equilibrium Theory)**.

Как известно, основоположником «Классической теории предельного равновесия пластических систем», является выдающийся российский ученый-механик прошлого столетия – профессор Алексей Алексеевич Гвоздев. Им была разработана методика оценки прочности для широкого класса сооружений и конструкций, выполненных из материалов, обладающих пластическими свойствами. В соответствии с «Классической теорией предельного равновесия пластических систем» А.А.Гвоздева, исследуемая конструкция должна удовлетворять следующим требованиям:

1. Все элементы конструкции являются пластическими.
2. Условия текучести пластических элементов являются выпуклыми.
3. Конструкция не является геометрически изменяемой (в том числе мгновенно изменяемой).
4. Нагружение является квазистатическим и однократным.
5. На систему действует совокупность постоянной и переменной части нагрузки.

6. Деформации системы пренебрежимо малы по сравнению с габаритными размерами конструкции вплоть до ее разрушения.

7. Пластическая конструкция является регулярной, то есть не находится в состоянии пластического течения под воздействием одной лишь постоянной нагрузки.

8. Переменная часть нагрузки пропорциональна переменному параметру нагружения p.

Основной целью «Классической теории предельного равновесия пластических систем» является определение такого предельного значения параметра нагружения $p*$, при реализации значения которого, с достоверностью можно утверждать, что система не разрушается при действии соответствующей суммарной нагрузки.

В «Классической теории предельного равновесия пластических систем» приняты следующие признаки равновесия и разрушения пластических систем.

Статический признак равновесия пластической системы

Для равновесия пластической системы при данном уровне нагружения необходимо, чтобы при этом уровне нагружения существовало поле реакций внешних и внутренних связей системы, удовлетворяющее статическим условиям равновесия и прочности системы совместно с внешней нагрузкой, приложенной к системе.

Статический признак разрушения (коллапса) пластической системы

Для разрушения пластической системы при данном уровне нагружения достаточно, чтобы при этом уровне нагружения не существовало бы поля реакций внешних и внутренних связей системы, удовлетворяющего статическим условиям равновесия и прочности системы совместно с внешней нагрузкой, приложенной к системе.

Кинематический признак разрушения (коллапса) пластической системы

Если при рассматриваемом уровне нагружения, реализуется поле кинематически возможных перемещений точек рассматриваемой системы, осуществляющееся за счет пластического течения достаточного количества ее элементов, при котором совокупная отрицательная работа перешедших в пластическое состояние связей системы по абсолютной величине не превышает положительной работы внешней нагрузки, то это обстоятельство является достаточным для разрушения системы.

Применительно к пластическим системам, удовлетворяющим условиям 1-8, проф. А.А. Гвоздевым в 1936 году были сформулированы и доказаны следующие теоремы «Классической теории предельного равновесия пластических систем».

Статическая теорема

Предельная нагрузка $p*$ является наибольшей из тех, которые могут быть уравновешены на системе.

Кинематическая теорема

Предельная нагрузка $p*$ является наименьшей из тех, которым соответствует какой либо вариант обращения системы в пластический механизм (движение которого возможно при неизменной нагрузке за счет пластического течения некоторых связей системы).

Теорема о совпадении границ

Для систем, у которых все собственные элементы пластические, внешняя и внутренняя границы несущей способности совпадают между собой.

Известным грузинским ученым-механиком, профессором Нодаром Валериановичем Ахвледиани, еще в 1957 году, было внесено существенное уточнение в «Теорему о совпадении границ» в виде «Теоремы о необходимых условиях единственности предельной нагрузки», которая была обоснована, как аналитически, так и экспериментально.

Теорема об условиях единственности предельной нагрузки (Н.В.Ахвледиани - 1957 г.)

Для того, чтобы при однопараметрическом нагружении пластической системы, выполнялась «Теорема о совпадении границ», согласно которой, значение предельной нагрузки $p*$ является единственным и совпадает, как со статической, так и с кинематической предельной нагрузками, необходимо, чтобы эта система сохраняла свойство регулярности в состоянии предельного равновесия, а предельное значение параметра нагрузки $p*$, соответствующее состоянию предельного равновесия системы, определялось на основе кинематического метода теории предельного равновесия, исходя из рассмотрения бесконечно малых по абсолютной величине пластических деформаций системы.

В 1963 году проф. Н.В. Ахвледиани было положено начало новому направлению в «Теории предельного равновесия пластических систем». Это новое направление было названо им **«Теорией свободы выбора возможных перемещений»**, поскольку в ее основе лежал **«Принцип свободы выбора возможных перемещений»**, формулировка которого приводится ниже.

Принцип свободы выбора возможных перемещений (Н.В.Ахвледиани – 1963г.):

Для исследования множества состояний предельного равновесия, пластическую систему следует разделить на М элементов путем отбрасывания связей и заменой их соответствующими реакциями. Преобразованная таким образом система

будет иметь 6М (имеется в виду пространственная задача) степеней свободы. Число основных условий равновесия системы равно числу степеней свободы - 6М. Каждое уравнение возможных работ на любом свободно выбранном поле возможных перемещений системы, которое совместно с основными условиями равновесия, и которому соответствует количество перешедших в пластическое состояние связей системы, достаточное для реализации пластической кинематической цепи в состоянии предельного равновесия, определяет бесконечную область комбинаций значений внешних и внутренних сил, возможных в состоянии статико-кинематического коллапса пластической системы.

Разработанная Н.В. Ахвледиани «Теория свободы выбора возможных перемещений» оказалась весьма эффективным средством при оценке опасности возникновения коллапса, так как предполагает возможность реализации любой формы коллапса конструкции, не противоречащей возможным перемещениям конструкции в состоянии предельного равновесия. При этом, под возможными перемещениями подразумеваются любые перемещения точек конструкции, разрешенные внешними и внутренними связями конструкции в состоянии предельного равновесия. Основой **«Теории свободы выбора возможных перемещений»** является фундаментальный **«Принцип виртуальных перемещений»** выдающегося французского математика Лагранжа, а также общие теоремы теории предельного равновесия пластических систем в формулировке проф. С.М. Фейенберга. Поэтому результаты аналитической экспертизы пластических систем в соответствии с **«Теорией свободы выбора возможных перемещений»** гарантируют достоверность результатов.

В руководимом проф. Н.В. Ахвледиани, - Отделе теории предельного равновесия Института Строительной механики и Сейсмостойкости АН Грузии, - на основе **«Теории свободы выбора возможных перемещений»**, в 1963-1990 годах, была разработана экспертная методика диагностики железобетонных конструкций на предмет выявления опасности сингулярного кинематического коллапса этих конструкций. Упомянутая методика позволяет оценивать уровень нагружения при котором становится возможным коллапс конструкций и сооружений, определять характерные опасные конфигурации переменной нагрузки, а также находить пластические зоны в конструкции в состояниях, близких к состоянию коллапса.

В дальнейшем, **«Теория свободы выбора возможных перемещений»** была развита совместно Н.В.Ахвледиани и А.Н.Ахвледиани и обобщена на нерегулярные пластические системы для случая повторно-переменного нагруженииия, где под нерегулярными понимаются пластические системы, не удовлетворяющие пункту 7 условий 1-8.

Определение нерегулярной пластической системы

Пластическая система называется нерегулярной, если она находится в состоянии пластического течения уже при исходной постоянной нагрузке.

6.2 Теоремы о логическом коллапсе жестко-пластических систем в «Классической теории предельного равновесия» («LET»)

Для того, чтобы перейти к рассмотрению вопросов логического коллапса жестко-пластических систем в состоянии предельного равновесия, необходимо прежде всего рассмотреть определение понятия жестко-пластической системы, а также определения понятий статического равновесия и физико-механического коллапса (разрушения) жестко-пластических систем.

Определение жестко-пластической системы

Жестко-пластической системой называется такая разновидность регулярной пластической системы, которая при воздействии квазистатической пропорциональной однопараметрической нагрузки, не испытывает деформаций до тех пор, пока количество перешедщих в пластическое состояние связей не становится достаточным для обращения ее в пластическую кинематическую цепь, а после достижения предельного уровня параметра нагрузки $p = p*$ ***пластические (необратимые) деформации системы становятся неограниченными.***

Определение состояния равновесия жестко-пластической системы

Состоянием равновесия жестко-пластической системы RP ***при некотором уровне квазистатического нагружения*** $p_S(t_S)$, ***в момент времени*** $t = t_S$, ***называется такое ее состояние, при котором выполняются аналитические статические и кинематические условия равновесия системы, и кроме этого, - перемещения, а также скорости точек ее частей в рассматриваемый момент времени и при рассматриваемой нагрузке равны нулю.***

Статические условия равновесия жестко-пластической системы

Для того, чтобы жестко-пластическая система RP ***находилась в состоянии статического равновесия при некотором уровне квазистатического нагружения*** $p_S(t_S)$, ***в момент времени*** $t = t_S$, ***необходимо, чтобы при этом уровне нагружения существовало поле реакций внешних и внутренних связей системы, удовлетворяющее статическим условиям равновесия и прочности системы совместно с внешней нагрузкой, приложенной к системе.***

Кинематические условия равновесия жестко-пластической системы

Для того, чтобы жестко-пластическая система RP ***находилась в состоянии статического равновесия при некотором уровне квазистатического нагружения*** $p_S(t_S)$, ***в момент времени*** $t = t_S$, ***необходимо, чтобы при рассматриваемых условиях на всех полях кинематически возможных перемещений точек рассматриваемой системы, могущих быть осуществленными за счет пластического течения достаточного количества элементов системы, совокупная отрицательная работа перешедших в пластическое состояние связей***

системы по абсолютной величине была строго больше положительной суммарной работы внешней нагрузки.

<u>Определение физико-механического коллапса жестко-пластической системы</u>

Физико-механическим коллапсом жестко-пластической системы RP ***при некотором уровне квазистатического нагружения*** $p*(t_*)$, ***в момент времени*** $t = t_*$, ***называется состояние этой системы, несовместное с условиями равновесия жестко-пластической системы.***

Обозначим через $A(t)$ - определенное на множестве бинарных логических операций логическое утверждение о том, что рассматриваемая жестко-пластическая система находится в состоянии равновесия в рассматриваемый момент времени t. Через $B(t)$ обозначим определенное на множестве бинарных логических операций логическое утверждение о том, что рассматриваемая жестко-пластическая система испытывает коллапс (разрушение) в рассматриваемый момент времени t. Тогда состоянию жестко пластической системы в моменты времени, близкие к физико-механическому коллапсу соответствует следующая логическая формула:

$$F(A,B,t) \equiv (A(t) \oplus B(t)) \qquad (6.2.1)$$

Формула (6.2.1) означает, что в рассматриваемый момент времени t, жестко-пластическая система либо находится в состоянии равновесия, либо испытывает коллапс и разрушается.

Сформулируем и докажем следующую теорему о логическом коллапсе жестко-пластических систем.

<u>Первая теорема о логическом коллапсе жестко-пластических систем (Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)</u>

Состояние предельного равновесия, определенное для жестко-пластических систем в соответствии с «Классической теорией предельного равновесия», в момент времени $t = t_*$, ***соответствующий состоянию предельного равновесия системы, сопровождается логическим коллапсом следующего вида:***

$$FP(A,B,t_*) \equiv [(A(t_*) \oplus B(t_*) \wedge (A(t_*) \wedge B(t_*)] \equiv 0 \qquad (6.2.2)$$

Доказательство

В момент времени $t = t_*$ в соответствии с «Теоремой о совпадении границ» и «Классической теорией предельного равновесия», предельной нагрузке $p*(t_*)$, одновременно, с одной стороны соответствует кинематический механизм разрушения, а с другой стороны в «Классической теории предельного равновесия» утверждается, что система находится в состоянии предельного равновесия. Это означает, что в этот момент времени, с одной стороны выполняется условие (6.2.1) в следующем виде:

$$F_*(A,B,t_*) \equiv (A(t_*) \oplus B(t_*)) \qquad (6.2.3)$$

С другой стороны, в рассматриваемый момент времени $t = t_*$, в соответствии с классической теорией предельного равновесия, - выполняется условие предельного равновесия в следующем виде:

$$F^*(A,B,t_*) \equiv (A(t_*) \wedge B(t_*)) \qquad (6.2.4)$$

Конъюнкция условий (6.2.3) и (6.2.4) приводит к генезису логического коллапса в момент времени $t = t_*$:

$$FP(A,B,t_*) \equiv F_*(A,B,t_*) \wedge F^*(A,B,t_*) \equiv [(A(t_*) \oplus B(t_*) \wedge (A(t_*) \wedge B(t_*)] \equiv 0 \quad (6.2.5)$$

Теорема доказана.

Сформулируем и докажем следующую теорему о логическом коллапсе жестко-пластических систем.

Вторая теорема о логическом коллапсе жестко-пластических систем (Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)

В состоянии предельного равновесия, определенного для жестко-пластических систем в соответствии с «Классической теорией предельного равновесия», в момент времени $t = t_*$, соответствующий состоянию предельного равновесия системы, утверждение о том, что жестко-пластическая система не испытывает коллапса (не подвергается разрушению), - определяет тождественное формально-логическое противоречие.

Доказательство

Для доказательства сформулированной теоремы необходимо формализовать соответствующее утверждение о том, что в момент времени $t = t_*$, соответствующий состоянию предельного равновесия, определенного на основе методов «Классической теории предельного равновесия», а затем определить логический кортеж значений истинности соответствующей логической формулы. Формально-логически упомянутая формула имеет следующимй вид:

$$LP(A,B,t_*) \equiv [(A(t_*) \wedge B(t_*)) \wedge (A(t_*) \wedge \neg B(t_*))] \qquad (6.2.6)$$

Рассмотрим соответствующий языковый эквивалент формулы (6.2.6) и ее составных элементов.

$A(t_*)$ - представляет собой утверждение о том, что в состоянии предельного равновесия жестко-пластической системы, выполняются статические условия равновесия системы. В соответствии с «Классической теорией предельного равновесия» это утверждение является верным.

$B(t_*)$ - представляет собой утверждение о том, что в состоянии предельного равновесия жестко-пластической системы выполняются кинематические условия глобального пластического течения системы, в результате чего жестко-пластическая система превращается в пластическую кинематическую цепь, имеющую то свойство, что рост пластических деформаций системы осуществляется без увеличения нагрузки, что в свою очередь означает коллапс и разрушение системы. В соответствии с «Классической теорией предельного равновесия» это утверждение также является верным.

$A(t_*) \wedge B(t_*)$ - представляет собой утверждение о том, что в состоянии предельного равновесия одновременно выполняются статические аналитические условия равновесия и кинематические аналитические условия разрушения системы. В соответствии с «Классической теорией предельного равновесия» это утверждение также является верным.

$\neg B(t_*)$ - представляет собой утверждение о том, что жестко-пластическая система не испытывает коллапса (не разрушается) в состоянии предельного равновесия.

Перейдем к непосредственной формально-логической оценке логического кортежа истинности для формулы (6.2.6) в соответствии с правилами классической формальной логики нулевого порядка для момента времени $t = t_*$:

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (6.2.7)$$

$$B(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (6.2.8)$$

$$\overrightarrow{[(A(t) \wedge B(t)) \wedge (A(t) \wedge \neg B(t))]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (6.2.9)$$

Из сопоставления (6.2.6) и (6.2.9)следует:

$$LP(A, B, (t_* = t)) \equiv [(A(t = t_*) \wedge B(t = t_*)) \wedge (A(t = t_*) \wedge \neg B(t = t_*))] \equiv \langle 0,0,0,0 \rangle \quad (6.2.10)$$

Формула (6.2.10) свидетельствует о том, что рассматриваемая нами логическая формула является формально-логически тождественно противоречивой. Теорема доказана.

Из первых двух теорем о логическом коллапсе жестко-пластических систем вытекает следующее утверждение.

Третья теорема о логическом коллапсе жестко-пластических систем (Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)

Методы «Классической теории предельного равновесия», в момент времени $t = t_*$***, соответствующий состоянию предельного равновесия системы, - определяют физико-механическое состояние системы, являющееся формально-логически тождественно противоречивым, и не в состоянии обеспечить безопасную работу системы при соответствующем уровне нагружения.***

6.3 Описание некоторых экспериментальных и аналитических данных о явлении логического коллапса железобетонных оболочек.

Практика эксплуатации железобетонных конструкций и накопленный печальный опыт обрушений большепролетных сооружений, выполненных из железобетона, показывают, что при достаточно высоком уровне нагружения, в жестко-пластических, железобетонных конструкциях происходит опасное раскрытие трещин, что существенным образом снижает их прочность и устойчивость. Часто наблюдается ранняя стадия образования трещин в растянутых зонах элементов (вследствие слабого включения арматуры) и быстрое их раскрытие до предельно допустимых величин. Это в свою очередь вызывает быстрый рост прогибов элементов до предельной величины после образования трещин в их растянутых зонах. В результате этого железобетонная конструкция может быть разрушена при эксплуатационных нагрузках намного меньших чем расчетные.

Стремление к наиболее полному использованию несущей способности элементов за счет пластических (то есть необратимых деформаций) часто приводит к внезапному, преждевременному коллапсу железобетонных конструкций. Под преждевременным подразумевается коллапс конструкции, который происходит задолго до исчерпания расчетного срока службы сооружения, при эксплуатационных нагрузках, значительно меньших чем расчетные. При этом часто разрушение одного конструктивного элемента вызывает разрушение в окрестной области (прогрессивный частичный коллапс) или даже разрушение всей конструкции (прогрессивный тотальный коллапс).

Современные экспериментально-аналитические исследования в области прочности и устойчивости железобетонных конструкций свидетельствуют о том, что при сочетании сдвига с изгибом и сжатием уже при нагрузке более 15-20% от предельной, определенной для железобетонной конструкции в соответствии с «Классической теорией предельного равновесия», в железобетонных элементах возникают и развиваются трещины, нарушающие сплошность, однородность и монолитность железобетона, как строительного материала. При дальнейшем возрастании нагрузки бетон и арматура начинают работать раздельно. По мере развития трещин в железобетонных элементах сокращается их способность сопротивляться сдвигу. Это чрезвычайно опасное явление, так как бетон, как строительный материал плохо сопротивляется сдвигу, а продольная рабочая арматура сама по себе практически вообще не способна воспринимать усилия сдвига. В результате возникает угроза хрупкого разрушения элементов и конструкции в целом, которое носит как правило внезапный характер.

К сожалению, опасности возникновения преждевременного тотального коллапса, подвержены и такие ответственные объекты гражданского строительства, как большепролетные железобетонные оболочки, служащие перекрытием общественных гражданских строительных объектов, под которыми возможно массовое скопление людей (перекрытия рынков, спортивных залов, оздоровительных комплексов и.т.д.). В современных условиях рыночной экономики имеет место отчетливая тенденция строительства все более пологих и тонкостенных железобетонных оболочек, что связано в основном со стремлением уменьшеньшить неиспользуемый объем здания.

Однако известно, что при уменьшении толщины железобетонной оболочки и стрелы ее подъема над опорной плоскостью, возникает опасность потери устойчивости всей оболочки или отдельных ее частей. При этом к моменту коллапса конструкции, форма поверхности оболочки может измениться настолько, что это явление необходимо учитывать при расчете несущей способности оболочки. Экспериментально-аналитические данные исследования прочности и устойчивости железобетонных оболочек показывают, что процесс развития конечных пластических, необратимых деформаций железобетонных оболочек, как правило имеющий место при достаточно высоком уровне нагружения конструкции, является одним из показателей, по которому можно судить об опасности преждевременного коллапса железобетонной оболочки, и оказывает существенное влияние на несущую способность конструкции в целом.

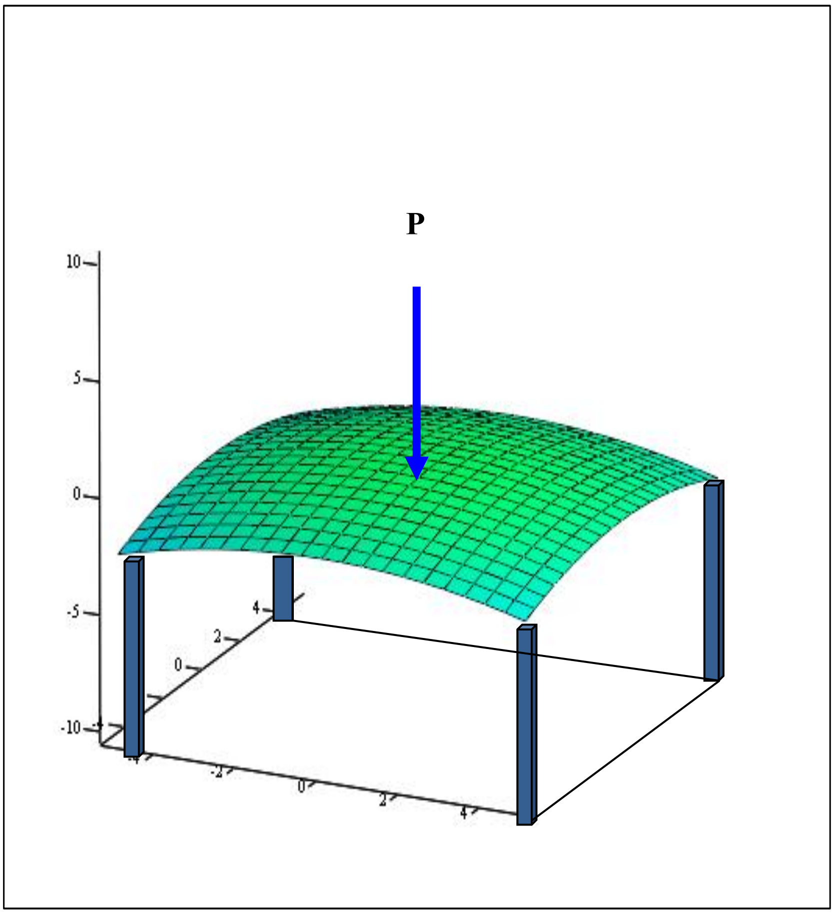
В российском научно-исследовательском институте **НИИЖБ**, под руководством проф. В.В. Шугаева были проведены аналитические и экспериментальные исследования по изучению влияния конечных пластических деформаций на несущую способность большепролетных железобетонных оболочек и их экспериментальных моделей с учетом фактора времени, результаты которых приведены в книге /6/. В упомянутых выше исследованиях, в процессе аналитического и экспериментального моделирования обеспечивались такие условия, при которых в процессе пластического деформирования железобетонной оболочки, внешняя активная нагрузка была способна изменяться таким образом, что ее переменная величина обеспечивала непрерывный процесс пластического деформирования исследуемой конструкции. Экспериментальные и аналитические данные упомянутого исследования показали, что, как правило, имел место процесс уменьшения деформирующей нагрузки в процессе пластического формоизменения, свидетельствующий о том, что в состоянии предельного равновесия конструкции - мощность внешних нагрузок превышает скорость диссипации энергии и *предельное состояние конструкции является неустойчивым*.

В результате проведенных исследований было установлено, что задачи теории предельного равновесия железобетонных оболочек, принадлежат к классу задач потери устойчивости. При однопараметрическом нагружении железобетонных оболочек следует *различать два генеральных уровня предельной нагрузки – верхний и нижний. Верхний уровень предельной нагрузки* определяется в соответствии со статическим методом «Классической теории предельного равновесия» в соответствии с геометрически неизменяемой расчетной схемой. *Нижний уровень предельной нагрузки* определяется из условия минимума переменной нагрузки, удовлетворяющей условиям течения железобетонной оболочки, происходящего во времени. При этом является необходимым учет изменения начальной конфигурации оболочки с течением времени.

В результате аналитических и экспериментальных исследований, проведенных проф. В.В. Шугаевым, выяснилось, что во многих случаях *нижний уровень предельной нагрузки* весьма сильно отличается от *верхнего уровеня предельной нагрузки,* определенной в соответствии с «Классической теорией предельного равновесия».

В работе /6/ подчеркивается, что при значительных начальных несовершенствах срединной поверхности оболочки, *действительная величина разрушающей нагрузки может оказаться ближе к нижнему уровню предельной нагрузки, чем к верхнему.* Поэтому представляет значительный интерес задача сравнения величины нагрузки для произвольно выбранной точки на кривой «предельная нагрузка – прогиб», определяющей мгновенную конфигурацию жестко-пластической оболочки в процессе ее пластического деформирования, с величиной предельной нагрузки для жестко-пластической оболочки с той же исходной конфигурацией, которой обладает пластически деформированная оболочка в рассматриваемый момент времени. В работе /6/ показано, что эти предельные нагрузки можно считать равными в том случае, если совпадают пределы текучести материалов этих оболочек.

В работе /6/ на основе теоретических и экспериментальных исследований установлено, что в том случае, если свободно опертая по внешнему контуру оболочка, срединная поверхность которой имеет вид пологого эллиптического параболоида - **Рис.1**, нагружена в центре сосредоточенной силой, то ее несущая способность в сильной степени зависит от необратимых пластических прогибов оболочки на момент потери устойчивости оболочки.



Z

Рис.1. Расчетная схема пологой оболочки в форме эллиптического параболоида.

На **Рис.2**, в соответствии с экспериментально-аналитическим исследованиям, представленными в работе /6/, представлен график зависимости «прогиб-несущая способность» для рассматриваемого класса железобетонных оболочек в предельной стадии. Из представленного графика следует, что если в соответствии с жестко-пластической моделью поведения рассматриваемой оболочки, активная внешняя нагрузка достигает верхнего предела несущей способности, то практически, непосредственно после перехода в предельное состояние – несущая способность оболочки падает в 4 раза!

P1* - представляет собой предельное значение параметра нагрузки, определенное в соответствии с классической теорией предельного равновесия по недеформированной расчетной схеме. P2* - представляет собой предельное значение параметра нагрузки, определенное в соответствии с учетом реализации конечных прогибов δ.

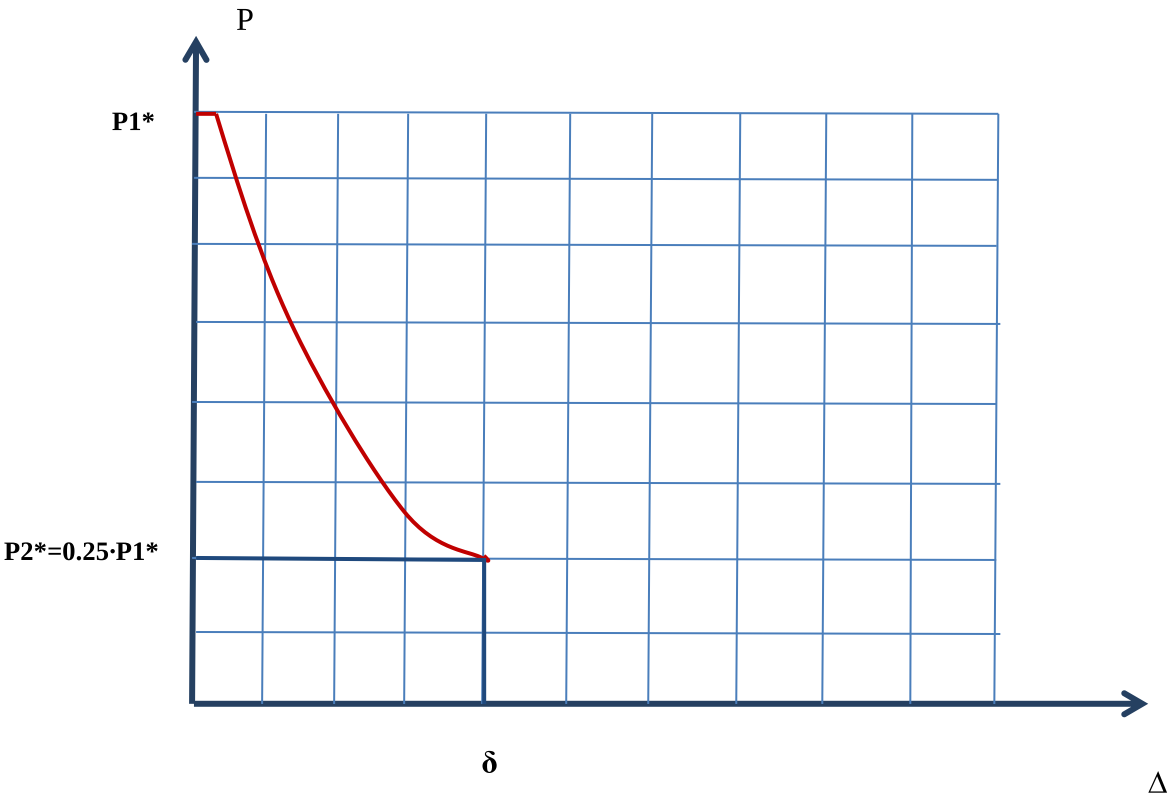


Рис.2 График падения несущей способности жестко-пластической оболочки при реализации конечных прогибов в предельном состоянии.

В работе /6/ приводятся также результаты экспериментальных исследований запредельного поведения жестко-пластической, свободно-опертой по внешнему контуру пологой оболочки на квадратном плане, при действии на нее равномерно распределенной нагрузки. Показано, что сразу после перехода в пластическую стадию оболочка теряет устойчивость. Верхней критической нагрузке соответствует предельная нагрузка при недеформированной поверхности. Если оболочка после хлопка не разрушается полностью, то она переходит в иное состояние равновесия. Нижняя критическая нагрузка составляла для рассмотренного случая всего около 20% от верхнего предела несущей способности.

Приведенные в работе /6/ данные экспериментальных и аналитических исследований свидетельствуют о том, что пологие железобетонные оболочки по достижению ими предельного состояния резко теряют свою несущую способность по мере реализации конечных пластических необратимых деформаций, что по нашему мнению является подтверждением возникновения состояния логического коллапса, сопутствующее достижению состояния физико-механического коллапса этих конструкций.

Из приведенных выше данных следует, что достижение состояния физико-механического коллапса конструкции сопровождается также возникновением состояния логического коллапса, которое заключается в резком и неконтролируемом падении несущей способности сооружения. Рассматриваемые явления свидетельствуют о повышенной опасности коллапса в случае эксплуатации соответствующих конструкций при высоком уровне нагружения, и стимулируют проведение конструктивных, расчетных и эксплуатационных мероприятий по обеспечению безопасной работы сооружений и конструкций рассматриваемого класса.

6.4 Исследование влияния кинематических факторов на несущую способность железобетонной оболочки в форме эллиптического параболоида.

Рассмотрим вопросы прочности и устойчивости свободно опертой по внешнему контуру железобетонной жестко-пластической оболочки, срединная поверхность которой имеет вид пологого эллиптического параболоида - **Рис.1**, а сама оболочка нагружена в центре сосредоточенной силой. Формула срединной поверхности оболочки в трехмерной декартовой системе кординат имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} z &= \eta \cdot \left(x^2 + y^2\right) \\ \eta &= -\frac{f}{r^2} \end{aligned} \qquad (6.4.1)$$

где, f - стрела подъема оболочки, ограниченная зоной разрушения; r - радиус зоны разрушения оболочки.

В работе /6/, проф. В.В.Шугаевым была установлена зависимость несущей способности оболочек рассматриваемого класса от прогибов центральной зоны оболочки при сосредоточенной нагрузке в состоянии предельного равновесия. Упомянутая зависимость представлена соотношением (6.4.2).

$$P_* = P^* \left(1 + \frac{3 \cdot w^2}{4} - \frac{3 \cdot w}{2}\right) \qquad (6.4.2)$$

В соотношении (6.4.2) приняты следующие обозначения. P_* - нижняя критическая нагрузка, зависящая от конечных необратимых прогибов центральной части оболочки при разрушении. P^* - верхняя критическая нагрузка, определяемая в соответствии с классической теорией предельного равновесия. w - безразмерная величина необратимого прогиба в центральной части оболочки.

Согласно /6/, величина w является функцией времени, а также скорости реализации необратимого прогиба в предельном состоянии оболочки:

$$w = \frac{v \cdot t}{f} \qquad (6.4.3)$$

Из сопоставления соотношений (6.4.2) и (6.4.3) следует:

$$P_*(v,t) = P^*\left(1 + \frac{3 \cdot v^2 \cdot t^2}{4 \cdot f^2} - \frac{3 \cdot v \cdot t}{2 \cdot f}\right) \qquad (6.4.4)$$

Верхняя критическая нагрузка определяется на основе следующего соотношения:

$$P^* = \frac{2 \cdot \pi \cdot q_S \cdot f}{3} \qquad (6.4.5)$$

В соотношении (6.4.5), q_S - предельное погонное сопротивление растяжению, воспринимаемое арматурой оболочки в кольцевом направлении.

Рассмотрим следующее определение.

<u>Определение траектории влияния кинематических факторов на несущую способность оболочки в форме эллиптического параболоида</u>

Под траекторией влияния кинематических факторов на несущую способность оболочки в форме эллиптического параболоида, понимается любая кривая, определенная временем необратимых деформаций, скоростью изменения генерального параметра деформации и несущей способностью оболочки, и расположенная на поверхности потери несущей способности оболочки, определяемой соотношением (6.4.4) – рис.3, с началом в точке, соответствующей верхнему значению критической нагрузки.

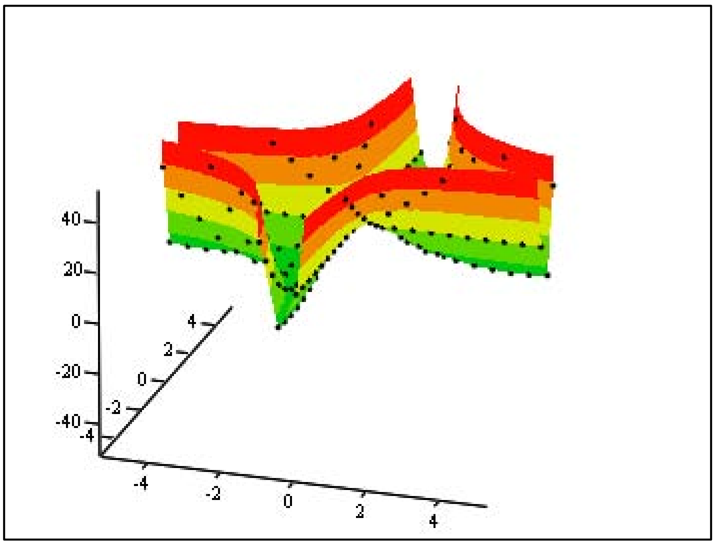
Имеет место следующая теорема.

<u>Теорема об условиях свободы выбора траектории влияния кинематических факторов на несущую способность железобетонной оболочки в форме гиперболического параболоида (А.Н. Ахвледиани – 2012 г.)</u>

Физико-механический и логического коллапс, имеющие место в состоянии предельного равновесия железобетонной оболочки в форме гиперболического параболоида, определенного в соответствии с классической теорией предельного равновесия, являются достаточными условиями для свободного выбора траектории влияния кинематических факторов на несущую способность оболочки, в рамках соблюдения условия $P_* \leq P^*$ и условия нахождения упомянутой траектории на поверхности потери несущей способности оболочки, определяемой соотношением (6.4.4).

Доказательство

Как это было установлено нами ранее, в состоянии предельного равновесия жестко-пластической системы, определенного в соответствии с классической теорией предельного равновесия, имеет место формально-логический коллапс, сопутствующий состоянию физико-механического коллапса оболочки. Согласно логическому закону Дунса Скота, состояние логического коллапса влечет за собой выполнимость любого логико-аналитически обоснованного утверждения, логико-аналитически адекватно описывающего процесс физико-механического коллапса оболочки. Применительно к рассматриваемой нами железобетонной оболочке в форме эллиптического параболоида, это означает, что по достижению активной квазистатической нагрузкой значения P^*, определяемого в соответствии с формулой (6.4.5), реальная несущая способность оболочки определяется соотношением (6.4.4), которому соответствует поверхность второго порядка в трехмерной декартовой системе координат, определяемой временем необратимых деформаций разрушения оболочки, скоростью изменения генерального параметра деформаций и несущей способностью оболочки. При этом, в соответствии с /6/, несущая способность оболочки не может превышать верхнюю критическую нагрузку P^*, определенную в соответствии с классической теорией предельного равновесия. В условиях логического коллапса и действия логического закона Дунса Скота, нами может быть выбрана любая траектория влияния кинематических факторов на несущую способность оболочки рассматриваемого типа, находящаяся на поверхности, определяемой сотношением (6.4.4), при соблюдении условия $P_* \leq P^\bullet$. Теорема доказана.



P

Рис.3. Поверхность потери несущей способности оболочки.

На **рис.3** изображена поверхность потери несущей способности оболочки. Темные точки на поверхности являются точками всевозможных траекторий влияния кинематических факторов на несущую способность оболочки.

6.5 Прогнозирование уровня несущей способности железобетонной оболочки в форме эллиптического параболоида.

В настоящем параграфе предлагается метод оценки уровня несущей способности железобетонной оболочки в форме эллиптического параболоида на основе статистической обработки данных автоматизированного прогноза, выполненного с учетом возможности потери устойчивости рассматриваемой оболочки в состоянии предельного равновесия.

Приведем зависимость несущей способности железобетонной оболочки с поверхностью в форме эллиптического параболоида от времени и скорости развития необратимых пластических прогибов центральной зоны оболочки в состоянии предельного равновесия оболочки, возникающего при действии на нее сосредоточенной нагрузки и достижения последней критического уровня, на основе изложенного в работе /6/ метода проф. В.В.Шугаева. Упомянутая зависимость представлена соотношением (1).

$$P_*(v,t) = P^*\left(1 + \frac{3 \cdot v^2 \cdot t^2}{4 \cdot f^2} - \frac{3 \cdot v \cdot t}{2 \cdot f}\right) \qquad (6.5.1)$$

где, f - стрела подъема оболочки, ограниченная зоной разрушения; v - скорость развития необратимых прогибов центральной зоны оболочки; t - время развития необратимых деформаций в состоянии коллапса оболочки; $P_*(v,t)$ - реальная несущая способность оболочки, зависящая в состоянии предельного равновесия от кинематических параметров необратимого деформирования; P^* - верхняя критическая нагрузка, определяемая в соответствии с классической теорией предельного равновесия.

Верхняя критическая нагрузка определяется на основе следующего соотношения:

$$P^* = \frac{2 \cdot \pi \cdot q_S \cdot f}{3} \qquad (6.5.2)$$

В соотношении (6.5.2), q_S - предельное погонное сопротивление растяжению, воспринимаемое арматурой оболочки в кольцевом направлении. Соотношение (6.5.2) получено на основе применения методов классической теории предельного равновесия.

Ранее нами было показано, что в условиях физико-механического и логического коллапса, и действия логического закона Дунса Скота, соответствующих состоянию предельного равновесия оболочки, нами может быть выбрана любая траектория влияния кинематических факторов на несущую способность оболочки рассматриваемого типа, находящаяся на поверхности, определяемой соотношением (6.5.1), при соблюдении условия:

$$P_*(v,t) \le P^\bullet \qquad (6.5.3)$$

Указанные выше обстоятельства, свидетельствующие о существенной неопределенности в вопросе оценки несущей способности оболочки в предельной стадии, делают актуальными прогнозирование и вероятностный анализ прогноза уровня несущей способности оболочки, включая определение математического ожидания, стандартной девиации и доверительного интервала прогноза уровня несущей способности оболочки.

Первый этап предлагаемого далее метода, включает в себя аналитический эксперимент, проводимый на основе соотношения (6.5.1), который заключается в определении многоместного кортежа $\{P_*(v_n, t_n, N)\}, n = 1,..., N$ - значений несущей способности оболочки рассматриваемого типа при реализации случайных значений времени и скорости необратимого деформирования. При этом переменные v и t рассматриваются, как случайные величины, с нормальным законом распределения вероятности. N - общее количество элементарных исходов аналитического эксперимента. v_n и t_n - случайные значения переменных величин при n - ом случайном элементарном исходе аналитического эксперимента. Генерация случайных величин с последующим прогнозированием возможных значений несущей способности оболочки производится на основе вычислительных программ математического пакета **MATCAD**.

В результате осуществления аналитического эксперимента мы получим пространство P_{*N} исходов экперимента, состоящее из множества элементарных событий, где под элементарным событием в данном случае подразумевается реализация того или иного случайного значения несущей способности $P_*(v_n, t_n)$:

$$P_{*N} = \{P_*(v_n, t_n, N)\}, n = 1,..., N \qquad (6.5.4)$$

Прогнозирование уровня несущей способности оболочки в состоянии предельного равновесия осуществляется на основе соотношения (6.5.4) с помощью команды $predict$, встроенной в **MATCAD**. В результате применения указанной команды мы получим множество прогнозируемых значений несущей способности оболочки:

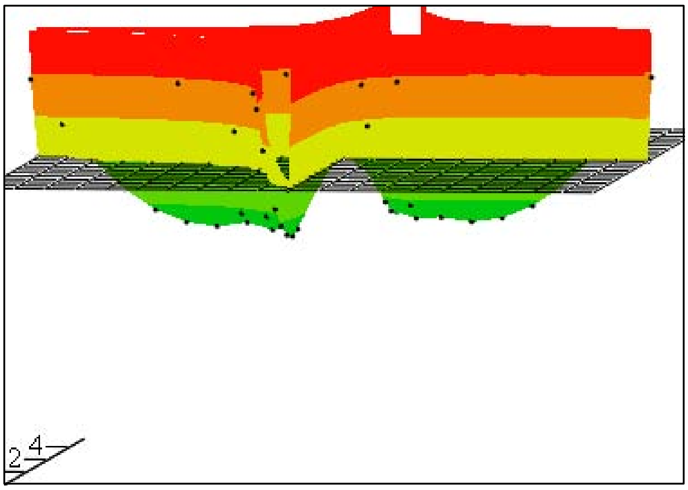
$$P_{*NM} = predict_M \{P_*(v_n, t_n, N)\}; n = 1,..., N; m = 1,...M; M < N \qquad (6.5.5)$$

где M - количество элементов в кортеже прогнозируемых значений.

Далее на основе **MATCAD** и соотношения (6.5.5) определяем математическое ожидание, стандартную девиацию и доверительный интервал прогноза уровня несущей способности оболочки.

При проведении аналитического эксперимента в соответствии с описанной выше схемой, будем считать, что в течение каждого элементарного эксперимента, явление необратимого пластического деформирования оболочки представляет собой процесс потери несущей способности, а определенное в результате n - го эксперимента значение $P_*(v_n, t_n)$, является n- ой критической нагрузкой, определенной с учетом реализации случайных значений (v_n, t_n).

Конкретный численный аналитический эксперимент был проведен для следующих значений основных параметров: $f = 1m, q_S = 40t/m, r = 10m, P^* = 25.133t, N = 10^5$. Каждая из переменных v, t, - рассматривалась как случайная величина с нормальным законом распределения вероятности, со средней равной 0, и среднеквадратическим отклонением равным 1. При проведении эксперимента учитывалось также то обстоятельство, что при некоторых случайных значениях (v_n, t_n), одним из возможных вариантов реакции оболочки на рассматриваемое воздействие может заключаться в ее кратковременном упрочнении. В результате графической обработки аналитического эксперимента была построена поверхность критических значений несущей способности оболочки – **Рис.1**.



P,P1

Рис.4. Поверхность критических значений несущей способности оболочки.

Графические статистические данные обработки результатов аналитического эксперимента представлены на **Рис.5-6**.

Необходимо отметить, что на **Рис.1**, горизонтальной плоскости сответствует уровень нагружения $P^* = 25.133t$, определяемый в соответствии с классической теорией предельного равновесия. Та часть поверхности, которая расположена ниже горизонтальной плоскости, является поверхностью потери несущей способности оболочки. Та часть поверхности, которая расположена выше горизонтальной плоскости, является поверхностью возможного кратковременного упрочнения оболочки.

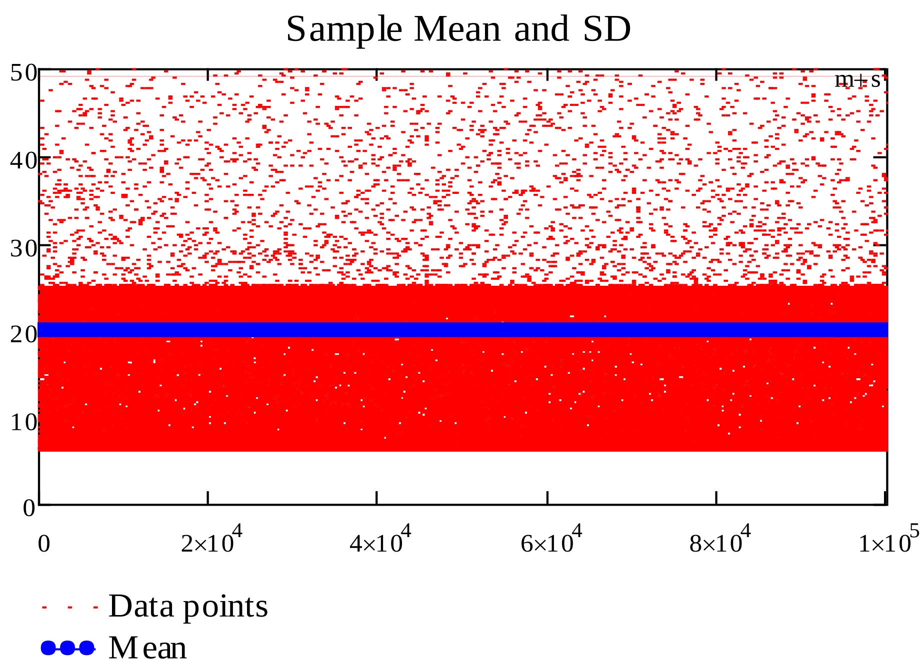


Рис.5. Математическое ожидание и стандартная девиация критической нагрузки по непосредственным результатам аналитического эксперимента.

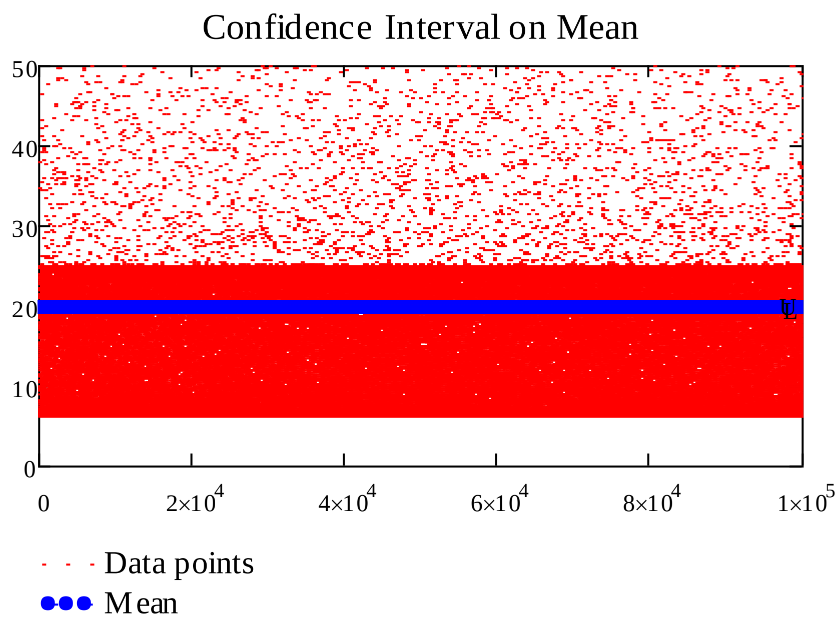


Рис.6. Математическое ожидание и доверительный интервал критической нагрузки по непосредственным результатам аналитического эксперимента.

В результате обработки результатов непосредственных данных аналитического эксперимента были получены следующие статистические данные.

1. Математическое ожидание критической нагрузки составило:

$$mean(P_{*N}) = 19.860t \tag{6.5.6}$$

2. Минимальное значение критической нагрузки составило:

$$\min(P_{*N}) = 6.283t \tag{6.5.7}$$

3. Стандартная девиация критической нагрузки составила:

$$SD(P_{*N}) = 29.197t \tag{6.5.8}$$

4. Доверительный интервал $CI\alpha$ критической нагрузки при $\alpha = 0.05$ составил:

$$CI_{0.05}(P_{*N}) = (19.679t, 20.041t) \tag{6.5.9}$$

В результате автоматической обработки результатов аналитического эксперимента был получен следующий кортеж прогноза несущей способности оболочки. Ниже, в два этапа, представлены данные начального и заключительного отрезков упомянутого кортежа $PNM = P_{*NM}$:

PNM = (6.5.10)

	0
0	14.027
1	13.587
2	13.844
3	13.705
4	13.909
5	13.979
6	13.427
7	13.527
8	13.332
9	12.777
10	...

PNM =

	0
29	10.578
30	10.481
31	10.38
32	10.291
33	10.178
34	10.085
35	9.984
36	9.876
37	9.788
38	9.691
39	...

(6.5.11)

Результат обработки результатов данных кортежа прогноза несущей способности оболочки представлен ниже.

1.Математическое ожидание прогноза несущей способности оболочки составило:

$$mean(P_{*NM}) = 11.728t \tag{6.5.12}$$

2. Стандартная девиация прогноза несущей способности оболочки составила:

$$SD(P_{*NM}) = 1.384t \tag{6.5.13}$$

3. Доверительный интервал $CI\alpha$ прогноза несущей способности оболочки при $\alpha = 0.05$ составил:

$$CI_{0.05}(P_{*NM}) = (11.286t, 12.171t) \tag{6.5.14}$$

Графические данные прогноза несущей способности оболочки, соответствующие соотношениям (6.5.12)-(6.5.14) представлены на **Рис.7-8**.

Из приведенных нами данных следует, что прогноз несущей способности оболочки указывает на необходимость проявления осторожности в вопросе прогнозирования несущей способности оболочки рассматриваемого типа по результатам статистической обработки аналитического эксперимента на первом этапе. Действительно отношение математического ожидания (6.5.6), определенного по результатам аналитического эксперимента, к математическому ожиданию (6.5.12) прогноза несущей способности составляет величину равную 1.693.

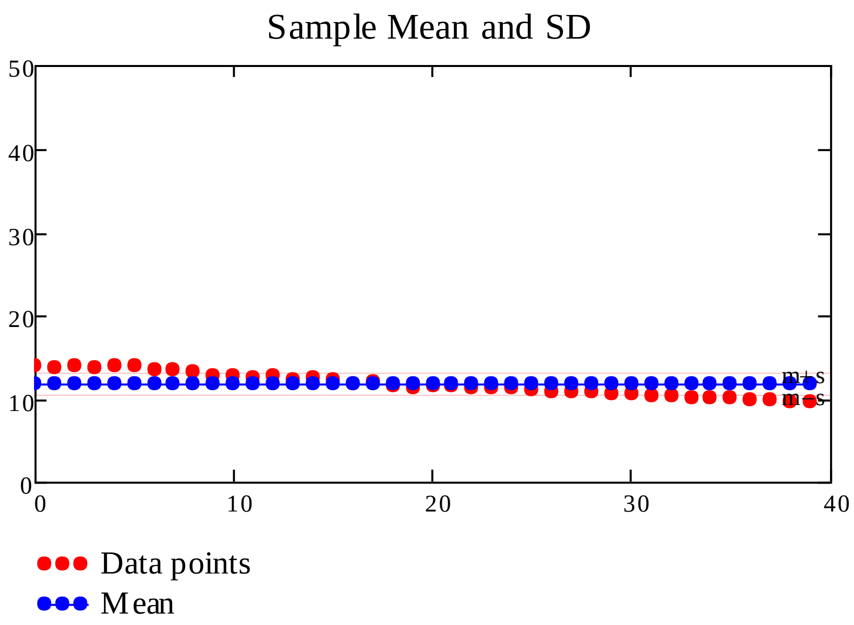


Рис.7. Математическое ожидание и стандартная девиация прогноза несущей способности оболочки.

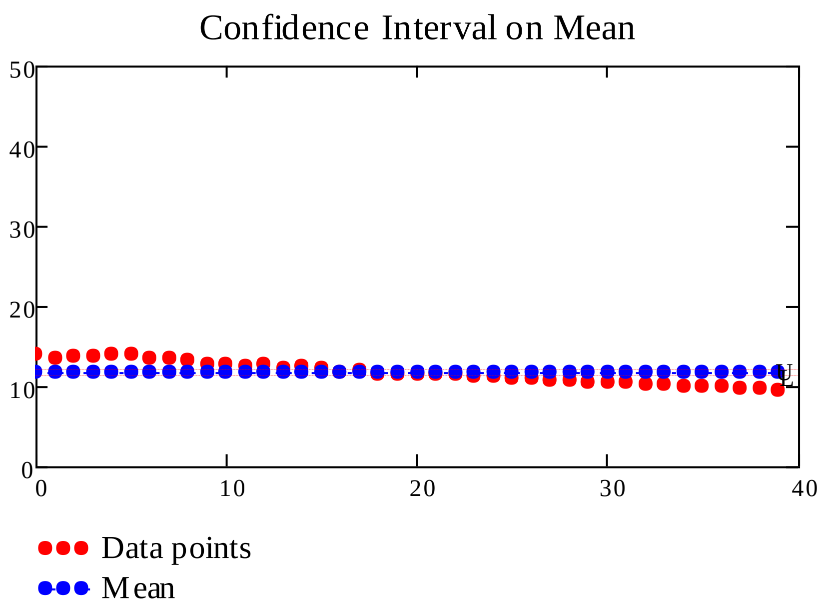


Рис.8. Математическое ожидание и доверительный интервал прогноза несущей способности оболочки.

Полученные нами результаты позволяют придти к следующим заключениям.

1. Величина математического ожидания критической нагрузки составляет $mean(P_{*N}) = 19.860t$. Это обстоятельство означает, что по достижению нагрузкой указанного значения, и при дальнейшем увеличении нагрузки, с большой долей вероятности следует ожидать разрушения оболочки вследствие потери устойчивости.

2. Математическое ожидание $mean(P_{*NM}) = 11.728t$ прогноза уровня несущей способности оболочки учитывает статистическую природу явления потери устойчивости оболочки в соответствии с соотношением (6.5.1), и указывает на необходимость принятия мер по обеспечению должной безопасности работы оболочки в долгосрочной перспективе.

3. Прогноз уровня несущей способности оболочки свидетельствует о необходимости принятия минимального коэффициента безопасности условия работы оболочки (максимальная несущая способность которой была определена в соответствии с классической теорией предельного равновесия), определяемого по формуле:

$$k_{\min} = \frac{P^*}{mean(P_{*NM})} = \frac{25.133}{11.728} = 2.143 \qquad (6.5.15)$$

4. Максимальное значение коэффициента безопасности условия работы оболочки (максимальная несущая способность которой была определена в соответствии с классической теорией предельного равновесия), определяется с учетом нижней границы доверительного интервала прогноза несущей способности оболочки:

$$k_{\max} = \frac{P^*}{CI_{0.05}(P_{*NM})_-} = \frac{25.133}{11.286} = 2.227 \qquad (6.5.16)$$

5. Исходя из рассмотренных выше пунктов, рекомендация по эксплуатации рассмотренной нами оболочки, - заключается в обеспечении мероприятий по ограничению действующей на оболочку эксплуатационной нагрузки:

$$P_e \le \frac{P^*}{k_{\max}} \qquad (6.5.17)$$

Заключение

Альтернативный взгляд на логическую природу классической теории множеств и оснований современной классической формальной логики

В настоящей работе, нами были рассмотрены вопросы логической природы некоторых логико-математических и механико-аналитической теорий первого порядка в свете известных теорем Курта Геделя о неполноте формальных и полуформальных математических аксиоматических систем, содержащих «Аксиоматическую систему Пеано», а также в свете «Второй проблемы Гильберта», в отношении решений которой, как известно, и по сей день не достигнуто единого мнения со стороны международного математического сообщества.

В последние десятилетия, многие специалисты по основаниям классической математики, - отмечают наличие серьезного научного кризиса в области инфинитарной теоретико-множественной математики /1/. Изучая историю создания и развития теории множеств, как самостоятельного раздела математики, можно придти к выводу, что этот кризис, по сути дела начался с самого начала зарождения теории множеств, как самостоятельной математической дисциплины, и продолжается до сего дня, вот уже около 130 лет.

Как известно, первый труд по теории множеств был написан выдающимся чешским математиком Бернардом Больцано, еще в середине 19-го века. Его книга «Парадоксы бесконечного», и по сей день пользуется популярностью, является интересной с логико-философской точки зрения и проливает свет на логические и философские особенности основ теории множеств. Уже из самого названия книги, а также из ее содержания, становится очевидным, что Бернарду Больцано были известны парадоксальные логические свойства понятия бесконечности в связи с исследованием свойств бесконечных классов и множеств.

Математическая теория множеств, как самостоятельная математическая дисциплина, оформилась и получила дальнейшее развитие благодаря научному вкладу выдающегося немецкого математика Георга Кантора, который традиционно считается основоположником математической теории множеств. Уже сам Кантор, блестяще владевший логикой, задумывался над тем, насколько создаваемая им теория, соответствует принципам аристотелевской традиционной логики. По-видимому не является случайным и то обстоятельство, что Кантор вначале называл свое новое математическое направление не теорией, а «Учением о множествах» (Mengenlehre – нем.). Однако, по мере продвижения в своей работе в направлении развития новой математической науки, Кантор пришел к заключению, что созданное им направление может являться основой для всей математики. В связи с этим Кантором была разработана программа стандартизации математики на основе созданной им теории множеств.

Необходимо отметить, что созданная Георгом Кантором теория множеств, с самого начала встретила резкое неприятие со стороны многих ведущих математиков. В числе противников применения теории множеств были такие видные математики того времени, как Анри Пуанкаре и Герман Шварц. Особой непримиримостью по отношению к теории множеств отличался выдающийся немецкий математик Леопольд Кронекер.

Вполне естественно предположить, что у таких известных и авторитетных математиков, как Анри Пуанкаре, Герман Шварц, Леопольд Кронекер, Бертран Рассел, - должны были быть весьма веские основания для обоснования своей позиции. И, как это показывают современные исследования, эти основания действительно существуют, и отражают определенную точку зрения, связанную прежде всего с аристотелевской логикой, а также с ее онтологической установкой.

Необходимо отметить, что логика Аристотеля неразрывно связана с его философской системой, и в определенной степени выступает, как средство и инструмент познания человеком внешнего мира. Из истории развития античной философии и логики известно, что Аристотель придерживался той позиции в теории познания, что человек может познать только те явления и предметы, которые доступны его восприятию органами чувств, и которые могут быть восприняты и обработаны его сознанием на основе рационального и непротиворечивого логического мыслительного процесса. Для этого является необходимым выполнение по крайней мере следующих условий. Первое условие - упомянутые явления и предметы должны удовлетворять категории бытия, то есть они должны существовать объективно в настоящем времени, или достоверно известно, что они имели место и существовали в прошлом. Второе условие - изучаемые явления и предметы могут быть восприняты человеком с помощью органов чувств в настоящем, или информация о них может быть получена из достоверных научных источников. Третье условие – исследуются явления и предметы, имеющие место в настоящем, или имевшие место в прошлом. Четвертое условие – свойства предметов и явлений остаются неизменными в процессе исследования. Все это означает, что с помощью аристотелевской логики могут быть познаны только те явления и предметы, которые по крайней мере имеют свое собственное, определенное и неизменное бытие в настоящем, или существовали в прошлом, а об их характеристических качествах имеется достоверная научная информация, не подлежащая изменению в процессе исследования.

Что касается отношения Аристотеля к философской категории «небытия», то Аристотель придерживался того мнения, что «небытие» не может быть познано человеком, по причине отсутствия признаков, по которым можно было бы судить о его существовании. С другой стороны Аристотель полагал, что если «небытие» проявляет себя определенным образом и может быть воспринято человеком, то оно уже перестает быть «небытием», и становится частью «бытия». Отсюда и онтологическая установка Аристотеля в отношении «небытия» - «небытия» нет. Из этого непосредственно вытекает описательная характеристика одного из видов противоречия в аристотелевской логике – *называть несуществующее существующим является* *противоречием с онтологической точки зрения аристотелевской традиционной логики.*

Для того, чтобы оценить степень соответствия логических оснований теории множеств аристотелевской логике, необходимо рассмотреть систему основных определений теории множеств. К числу основных понятий теории множеств относится понятие пустого множества. Пустое множество определяется, как множество не имеющее ни одного элемента. При аксиоматическом построении теории множеств формулируют так называемую «Аксиому пустого множества» *в которой постулируется существование пустого множества*.

С онтологической точки зрения, в теории множеств именно пустое множество является архетипом (образом) категории «небытия» аристотелевской философии и логики. В силу самого своего определения, пустое множество не содержит в себе ни одного элемента, и в силу этого обстоятельства с точки зрения аристотелевской логики, - не может быть воспринято познающим субъектом непосредственно. С точки зрения аристотелевской онтологической позиции, в основаниях теории множеств *прямо нарушается одна из логико-онтологических установок аристотелевской логики*, а именно – множество, не имеющее ни одного элемента, то есть конструктивно не существующее с точки зрения аристотелевской традиционной логики, - *объявляется существующим*. Нетрудно видеть, что такое положение дел в основаниях теории множеств прямо противоположно учению Аристотеля о категориях бытия и небытия.

Принятие «Аксиомы пустого множества» влечет за собой также невозможность логического отсечения рассмотрения противоречивых объектов и классов. В классической математике, в предшествующий созданию теории множеств период, вопрос рассмотрения противоречивых объектов решался в соответствии с основными законами аристотелевской логики – те объекты и явления, которые по своей логической и аналитической природе вступали в противоречие с основными логическими законами аристотелевской традиционной логики, признавались несуществующими с точки зрения аристотелевской логики и не включались в число рассматриваемых объектов. После создания аксиоматической теории множеств, в силу постулирования конструктивного существования пустого множества, не содержащего ни одного элемента, становится невозможным отрицать существование даже противоречивого класса, имеющего хотя бы один элемент. Если существует класс, заведомо не имеющий элементов, то тем более конструктивно существует класс, имеющий хотя бы один элемент, даже несмотря на его возможную логически противоречивую природу.

Еще одна, весьма значительная с точки зрения аристотелевской традиционной логики проблема, заключается в схеме определения классов и множеств, как таковых, на основе задания так называемого характеристического свойства, или совокупности характеристических свойств, определяющих это множество и входящие в него элементы. Георгом Кантором классы и множества определялись по следующей общей формальной схеме:

$$Cls(Cx) = \{x : (\forall x)(C(x))\} \tag{1}$$

где, $C(x)$ характеристическое свойство, или совокупность характеристических свойств, определяющих тот или иной класс или множество.

Известно, что Кантор выделял понятие множества из общего понятия класса. Множество по Кантору – это такой класс, который удовлетворяет всем логическим законам аристотелевской традиционной логики. В противном случае – рассматриваемый класс является по Кантору – *логически неконсистентной совокупностью*. Однако Кантором, так и не было сделано соответствующего формального уточнения. Последствия этого обстоятельства хорошо известны – выдающимся английским логиком и математиком Бертраном Расселом был открыт так называемый «Парадокс Рассела», в рамках которого была построена конструкция такого логически трансцендентного класса R, который удовлетворяет формальному требованию (1), но не соответствует законам аристотелевской традиционной логики. Таким образом, со всей определенностью выяснилось, что канторовская теория множеств на деле определяет также и логически неконсистентные совокупности.

Георгом Кантором в рамках его теории множеств, был открыт так называемый «Парадокс Кантора», в результате рассмотрения которого Кантор пришел к не менее парадоксальному заключению о том, что класса V всех самотождественных множеств не существует. Логическая парадоксальность этого заключения состоит в том, что сами по себе самотождественные множества существуют, но тем не менее, *составленный из них класс – не существует*. Эта логически парадоксальная ситуация выглядит еще более парадоксальной на фоне принятия «Аксиомы пустого множества», - в частности, в рамках канторовской и классических систем **ZF** и **ZFC** теории множеств приходят к заключению, что пустое множество, не содержащее ни одного элемента существует, а класс всех самотождественных множеств, несмотря на наличие самих самотождественных множеств, *тем не менее не существует, как таковой*.

В теории классов и множеств весьма существенной проблемой является вопрос существования универсального U- класса, то есть класса, элементами которого являются все другие множества и классы. В настоящей работе нами было представлено логически адекватное определение универсального класса U и доказано его конструктивное существование. Кроме этого, нами также было показано, что U - класс является сингулярным множеством, то есть таким множеством, которое является тождественно равным и равномощным собственному множеству степени $P(U)$:

$$U = P(U) \tag{2}$$

Из (2) непосредственно следует равенство мощностей:

$$|U| = |P(U)| \tag{3}$$

Однако, необходимо отметить, что конструктивное существование универсального U - класса, - до сих пор, как правило, - не признается в классических системах теории множеств. В качестве характерного примера можно привести рассмотрение этого вопроса в книге /1/. Красным курсивом выделены те места в доказательстве, на которые необходимо обратить пристальное внимание.

<u>Утверждение об универсальном классе</u>

Не существует класса всех множеств, или формально

$$\neg(\exists x)(\forall y)(y \in x) \tag{4}$$

Доказательство

Доказательство будем вести от противного, а именно допустим, что для некоторого x верно:

$$(\forall y)(y \in x) \tag{5}$$

Положим:

$$v = \{u \in x; u \notin u\} \tag{6}$$

Рассмотрим первое предположение:

$$v \in v \tag{7}$$

Из сопоставления (7) и (6) следует:

$$(v \in v) \Rightarrow (v \notin v) \tag{8}$$

Рассмотрим второе предположение:

$$v \notin v \tag{9}$$

Из сопоставления (9) и (6) следует:

$$(v \notin v) \Rightarrow (v \in v) \tag{10}$$

Из сопоставления (8) и (10) следует:

$$[(v \in v) \Leftrightarrow (v \notin v)] \equiv 0 \tag{11}$$

Соотношение (11) означает получение аристотелевского противоречия. Следовательно допущение, выражаемое соотношением (5) неверно и имеет место (4).

Нетрудно видеть, что формула (11) выражает не что иное, как «Парадокс Рассела». Иными словами, именно «Парадокс Рассела» является тем логическим основанием, исходя из которого делается вывод о несуществовании универсального класса всех множеств. Таким образом, можно придти к выводу о том, что в классической теории множеств, вопрос существования универсального класса непосредственно связан с «Парадоксом Рассела».

Рассмотрим вопрос, как могут быть преодолены те логические проблемы, которые возникают в классической теории множеств и современной классической формальной логике нулевого и первого порядков.

В настоящей работе было показано, что современная классическая формальная логика нулевого порядка, в сильной степени отличается от аристотелевской традиционной логики в смысле обязательной выполнимости второго и третьего законов аристотелевской традиционной логики. По существу дела, логические операции классической формальной логики нулевого порядка строятся на логических отношениях логического **0** и логической **1**, где **0** – тождественное формально-логическое противоречие, а **1** – тождественная формально-логическая истина. Это означает, что формально-логическое противоречие в виде логического **0** , не только не является исключенным из рассмотрения, а наоборот является одной из системообразующих логических констант, без которой невозможна не только сама классическая формальная логика нулевого порядка, но и включающая ее классическая формальная логика первого порядка.

Как это было показано в настоящей работе, генезис логического коллапса (тотального ослабления формальной истинности) является вовсе не исключительным явлением при исследовании тех или иных формально-логических процессов. Еще Аристотелю было известно, что формальные противоречия могут возникать на аналитико-синтетическом этапе умственной деятельности человека в процессе переработки той или иной реальной информации. Кроме этого необходимо учитывать также и то обстоятельство, что реальная информация, по своей логической структуре может и не соответствовать аристотелевской традиционной логике. Представляется совершенно естественным, что *мы не можем без должных на то оснований приписывать реальной информации логические свойства, вытекающие из аристотелевской традиционной логики*, поскольку заведомо существуют такие утверждения и логические формулы, которые не соответствуют второму и третьему законам аристотелевской традиционной логики. Упомянутые логические формулы содержатся например в классических логических парадоксах, которые построены именно на том обстоятельстве, что входящие в них логические формулы выходят за рамки аристотелевской традиционной логики.

С другой стороны наличие логического **0**, как системобразующей константы классической формальной логики нулевого порядка, позволяет нам формализовать «Парадокс Рассела» естественным образом, представив одно из вытекающих из него утверждений в качестве логического **0**:

$$Q \equiv [(v \in v) \Leftrightarrow (v \notin v)] \equiv 0 \qquad (12)$$

Из соотношения (12) следует, что логическая формула Q является логически трансцендентной по отношению к аристотелевской традиционной логике. Учитывая свойства логического нуля и логической единицы, мы можем построить таблицы унарных и бинарных логических операций трансцендентной логики, по своей логической структуре являющихся автоморфными соответствующим логическим операциям классической формальной логики нулевого порядка.

Таблица 3. Унарные логически трансцендентные операции

Унарные логически трансцендентные операции				
x	**g1(x)Ξ(¬)**	**g2x Ξ(=)**	**g3(1) Ξ (1)**	**g4(0)Ξ (0)**
$Q \Leftrightarrow \neg Q$	**1**	**0**	**1**	**0**
$A = A$	**0**	**1**	**1**	**0**

Таблица 4. Бинарные логически трансцендентные операции

Бинарные логически трансцендентные операции										
x	**y**		$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$	$\mathbf{F_3}$	$\mathbf{F_4}$	$\mathbf{F_5}$	$\mathbf{F_6}$	$\mathbf{F_7}$	$\mathbf{F_8}$
$Q \Leftrightarrow \neg Q$	$Q \Leftrightarrow \neg Q$		**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
$Q \Leftrightarrow \neg Q$	$A = A$		**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
$A = A$	$Q \Leftrightarrow \neg Q$		**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
$A = A$	$Z = Z$		**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
x	**y**		$\mathbf{F_9}$	$\mathbf{F_{10}}$	$\mathbf{F_{11}}$	$\mathbf{F_{12}}$	$\mathbf{F_{13}}$	$\mathbf{F_{14}}$	$\mathbf{F_{15}}$	$\mathbf{F_{16}}$
$Q \Leftrightarrow \neg Q$	$Q \Leftrightarrow \neg Q$		**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
$Q \Leftrightarrow \neg Q$	$A = A$		**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
$A = A$	$Q \Leftrightarrow \neg Q$		**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
$A = A$	$A = A$		**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**

Из **Таблицы 3** и **Таблицы 4** следует, что в них логические **1** и **0**, заменены законом тождества и отрицанием закона о непротиворечии соответственно. С точки зрения логической структуры классической формальной логики нулевого порядка такая замена является логически эквивалентной в смысле значений формально-логической истинности.

В современной классической формальной логике общепринятым является следующее правило /4/, называемое «Правилом исчисления высказываний».

Правило исчисления высказываний

Если P ***- пропозициональная функция от логических переменных*** $A_1, A_2, ...A_N$ ***является тождественно доказуемой, то результат замены каждого*** A_n ***каким-либо суждением является верным суждением.***

Из представленного выше «Правила исчисления высказываний» непосредственно следует, что каждая тождественно доказуемая логическая формула исчисления высказываний может быть интерпретирована в терминах «Трансцендентной логики» при условии сохранения отношения автоморфизма логических операций. Таким образом, одним из возможных выходов из создавшегося положения дел в инфинитарной теоретико-множественной математике, является переход на классическую формальную логику нулевого порядка и логику первого порядка с обязательным учетом их логически трансцендентных свойств в рамках «Трансцендентной логики». Такой подход может оказаться весьма полезным при изучении и совершенствовании уже разработанных логически формализованных аналитических теорий с целью выявления в них феномена логической трансценденции. Именно такой подход был осуществлен нами при изучении «Классической теории предельного равновесия», в которой был выявлен феномен логического коллапса (тотального ослабления формальной истинности).

В настоящей работе нами было показано, что современная классическая формальная логика нулевого порядка, а значит и содержащая ее классическая формальная логика первого порядка имеют логически трансцендентные свойства по отношению к аристотелевской традиционной логике, в частности:

1. Классическая формальная логика нулевого порядка содержит множество логических формул, исключенных из рассмотрения в аристотелевской традиционной логике.

2. В классической фомальной логике нулевого порядка конъюнкция двух непротиворечивых логических формул может приводить к логическому коллапсу – тождественному ослаблению формальной истинности. Эта логическая ситуация в корне отличается от положения дел в аристотелевской традиционной логике, где непротиворечивость формулы означает ее истинность, и вследствие этого

обстоятельства, - конъюнкция двух или более непротиворечивых логических формул является тождественно истинной.

3. Аристотелевская традиционная логика является неполной по отношению к классической формальной логике нулевого порядка, поскольку в силу своих основных логических законов, в отличие от классической формальной логики нулевого порядка, - не в состоянии осуществить адекватный логический анализ классических парадоксов формальной логики.

4. В настоящей работе, в рамках классической формальной логики нулевого порядка был сформулирован и доказан «Первый принцип логико-математической трансценденции» согласно которому в некоторых случаях формально-логически непротиворечиво выводимыми является, как само утверждение A, так и его отрицание $\neg A$, что с позиций аристотелевской традиционной логики может быть охарактеризовано, как выведение антиномии. Из отмеченного нами обстоятельства непосредственно следует, что в рамках классической формальной логики нулевого порядка, во многих случаях мы уже не можем в полной мере претендовать на постижение «аристотелевской истинности». В большинстве случаев идет речь только о «логически непротиворечивой выводимости», причем во многих случаях непротиворечиво выводимыми являются, как сама логическая формула, так и ее отрицание. Понятие «аристотелевской истинности» в классической формальной логике нулевого и первого порядков заменяется понятием «логической доказуемости», где под логически доказуемой подразумевается формула, значение логической истинности которой при любой комбинации входящих в нее переменных равно логической единице.

5. Критерий непротиворечивости классической формальной логики нулевого порядка отличается от критерия непротиворечивости аристотелевской традиционной логики. В соответствии с аристотелевской традиционной логикой, непротиворечивыми считаются логические формулы, полностью соответствующие основным логическим законам – закону тождества, закону о непротиворечии и закону об исключенном третьем. В классической формальной логике нулевого порядка непротиворечивой считается любая выполнимая логическая формула, причем если взаимно контрадикторные логические формулы по отдельности являются выполнимыми, то они по отдельности являются и непротиворечивыми. Отмеченное выше обстоятельство выявляет существенное различие между двумя рассматриваемыми логическими системами в смысле обязательной выполнимости закона об исключенном третьем. Иными словами, логические формулы, исключенные в аристотелевской традиционной логике, не исключены в классической формальной логике нулевого порядка.

6. Аристотелевская традиционная логика и классическая формальная логика нулевого порядка имеют различные критерии противоречивости. Согласно аристотелевской традиционной логике, та или иная формальная или

полуформальная теория признается противоречивой, если в ее рамках выводима формула, не соответствующая одному из основных логических законов аристотелевской логики, или же являющаяся логически контрадикторной, или контрарной по отношению к упомянутым логическим законам. В классической формальной логике нулевого порядка наоборот, выполнимая логическая формула, не соответствующая закону об исключенном третьем считается непротиворечивой. Выводимость логически тождественно противоречивой формулы, являющейся свидетельством логического коллапса, также не признается признаком противоречивости теории, поскольку несмотря на то, что в рамках самой классической формальной логики нулевого порядка логический коллапс является выводимым, тем не менее это обстоятельство не является достаточным для признания классической формальной логики нулевого порядка противоречивой теорией. Наоборот, известно, что классическая формальная логика нулевого порядка является формальной глобально непротиворечивой теорией. С точки зрения классической формальной логики нулевого порядка формально-логическая противоречивость теории заключается в выведении в ее рамках таких двух тождественно доказуемых формул, каждая из которых является отрицанием другой.

7. В силу существеных различий между двумя рассматриваемыми логическими системами, сочетание аристотелевской традиционной логики с классической формальной логикой нулевого порядка в ряде случаев может приводить к образованию аристотелевских антиномий. При получении аристотелевской антиномии на основе сочетания методов классической формальной логики нулевого порядка с аристотелевской традиционной логикой в рамках некоторой формальной или полуформальной теории, такая теория уже не может считаться аристотелевски непротиворечивой.

8. В силу того обстоятельства, что классическая формальная логика нулевого порядка является составной частью классической формальной логики первого порядка, то отмеченные выше логические проблемы автоматически распространяются и на классическую логику первого порядка.

Таким образом, можно придти к выводу, что феномен логической трансценденции, наблюдающийся в основаниях классической теоретико-множественной математики, вызван в первую очередь логически трансцендентными свойствами самой глобально непротиворечивой классической формальной логики нулевого порядка. Этот вывод подтверждается также детальным анализом доказательства известных «Теорем Геделя», который выявляет то существенное обстоятельство, что логические формулы F и $\neg F$, выдвинутые Куртом Геделем, по своей логической структуре принадлежат к классу недоказуемых логических формул, определенных на множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка. Именно, по этой причине, они не могут быть выведены непротиворечиво *в аристотелевском смысле этого понятия* на основе логических законов аристотелевской традиционной логики, а значит и на основе «Аксиоматической системы Пеано», если последняя является непротиворечивой с точки зрения аристотелевской традиционной логики.

Феномен логической трансценденции, имеющий место в классической формальной логике нулевого порядка, самым естественным образом распространяется на содержащую ее классическую формальную логику первого порядка, а также на те логико-аналитические теории, логической базой которых является формальная логика первого и нулевого порядков.

Одним из ярких примеров проявления феномена логической трансценденции является сочетание классической формальной логики нулевого порядка, «Аксиомы выбора», классической системы теории множеств **ZFC** и аксиоматической системы Пеано с включенным в нее «Методом математической индукции» - **PA&MI&AB**. Как это было показано в настоящей работе, упомянутое сочетание может приводить к множественному логическому коллапсу (тотальному ослаблению формальной истинности) и множественному генезису логически трансцендентных формул.

Феномен генезиса логической трансценденции имеет место также в аксиоматической системе Пеано **PA&MI**, содержащей «Метод математической индукции». В настоящей работе на основе введения логического аналога функции Дирихле было показано, что «Метод математической индукции» применительно к утверждениям, при стремлении натурального аргумента n к актуальной бесконечности влечет за собой генезис логического коллапса на актуальной бесконечности. В связи с этим обстоятельством нами для сколь угодно больших, конечных натуральных значений n, был сформулирован и обоснован «Модифицированный метод логико-математической индукции» на основе логической конструкции «Модус поненс», являющейся общепринятой в классической формальной логике.

Приведенные в настоящей книге материалы свидетельствуют о том, что логической основой классической математической теории множеств являются системы классической формальной логики нулевого и первого порядков, имеющие ярко выраженный логически трансцендентный характер, отличающий их от аристотелевской традиционной логики. Это обстоятельство необходимо учитывать при формулировании и доказательстве тех или иных положений теории множеств, тем более, что смешение современной классической формальной логики с аристотелевской традиционной логикой, в силу логической неоднородности этих систем, само по себе может приводить к логическому коллапсу (тотальному ослаблению формальной истинности).

Из сказанного выше непосредственно следует существенное обстоятельство, которое заключается в том, что такие важные и обширные разделы математики, как классический математический анализ и классическая математическая теория множеств *имеют различную логическую основу*. Как известно, классический математический анализ построен на аристотелевской традиционной логике, а математическая теория множеств, как это показывают исследования, - имеет своей логической основой системы классической формальной логики нулевого и первого порядков, существенно отличающиеся от аристотелевской традиционной логики.

Необходимо отметить, что теория множеств Кантора, как новый раздел математики, имела не только противников, но также сторонников и последователей в лице таких известных математиков того времени, как Готлоб Фреге, Давид Гильберт, Рихард Дедекинд, Феликс Хаусдорф, которое поддержали программу Георга Кантора по стандартизации математики на теоретико-множественной основе. В частности логико-аналитические методы, разработанные Георгом Кантором были применены Давидом Гильбертом при разработке его системы классического формального исчисления высказываний. Здесь речь идет о разработке так называемых «диагональных логических формул», которые позднее были применены Куртом Геделем в качестве «диагонального метода доказательства» в процессе обоснования известных «Теорем Геделя». В дальнейшем Эрнстом Цермело и Абрахамом Френкелем была разработана акиоматическая теория множеств **ZF**, которая при условии дополнения ее «Аксиомой выбора» преобразуется в систему **ZFC**.

Обобщая рассмотренные выше факты, можно выделить следующие основные причины генезиса явления логической трансценденции в основаниях классической теоретико-множественной математики, выражающиеся в регулярном образовании аристотелевских антиномий.

1. Логическая неоднородность аристотелевской традиционной логики и классической формальной логики нулевого порядка, проявляющееся в виде логического коллапса (тотального ослабления формальной истинности) вследствие смешения логических формул этих двух систем.

2. Наличие логически трансцендентных свойств у классической формальной логики нулевого порядка.

3. Принятие в основаниях теории множеств - «Аксиомы пустого множества», - идущей вразрез с онтологической установкой аристотелевской традиционной логики в отношении категории «небытия».

4. Логически недостаточно четкое определение понятия множества, приводящее к возникновению антиномий.

5. Генезис множественного логического коллапса, возникающий в результате сочетания «Аксиомы выбора» с классической формальной логикой нулевого порядка.

6. Неправомерная экстраполяция «Метода математической индукции» на актуальную бесконечность.

В связи с отмеченными выше обстоятельствами, естественным образом возникает вопрос о логико-аналитической природе тех математических теорий, которые основаны на современной классической формальной логике нулевого и первого порядка. По вполне понятным логико-аналитическим причинам степень непротиворечивости каждой аксиоматической математической теории, основанной на упомянутых выше системах, не может превзойти степень непротиворечивости логического базиса в виде современной классической формальной логики. Как это было показано в рамках проведенного нами исследования, современная классическая формальная логика в сильной степени отличается от аристотелевской традиционной логики в смысле обязательной выполнимости «Закона о непротиворечии» и «Закона об исключенном третьем». Этого же самого приходится ожидать и от тех математических теорий, логическим базисом которых является современная классическая формальная логика. В особенности это касается такой классической аксиоматической системы теории множеств, как система **ZFC**, которая включает в себя «Аксиому выбора».

Полученные нами в настоящей книге результаты свидетельствуют о том, что во многих случаях второй и третий основные законы аристотелевской традиционной логики практически теряют силу в проблемах, связанных с бесконечностью, особенно в тех случаях, когда имеет место существенная логическая неопределенность. С одной стороны это означает, что в таких случаях реализуется известное мнение основоположника математической теории множеств Георга Кантора: ***«Сущность математики заключается в ее свободе»***. В данном случае эта свобода выражается в существенном ослаблении второго и третьего законов аристотелевской традиционной логики.

С другой стороны в условиях ослабления двух основных законов аристотелевской традиционной логики становится возможным логический коллапс, который заключается в тотальном ослаблении формально-логической истинности и приводит к тому, что начинает реализовываться логический закон Дунса Скота, согласно которому в рассматриваемом случае логического коллапса может иметь место реализация любой содержательно, аналитически или логически выполнимой формулы. Это в свою очередь приводит к необходимости исследования в условиях логического коллапса всех $(2^N - 1)$ возможных случаев, где натуральное число N выражает собой N-арность рассматриваемой проблемы. Так в условиях полученной свободы возникает неизбежная необходимость познания всей полноты картины в связи с исследуемой проблемой. По меткому выражению выдающегося немецкого философа Георга Гегеля - ***«Свобода есть познанная необходимость».*** По всей видимости, именно в этом и состоит основной логико-философский смысл современной классической формальной логики нулевого и первого порядков, который по существу вопроса заключается в необходимости достижения должной логико-аналитической полноты исследуемой картины при решении тех или иных конкретных научных проблем.

О научной деятельности и творческом наследии

Нодара Валериановича Ахвледиани

Нодар Валерианович Ахвледиани (1924 – 1993 гг.) - известный ученый-механик и эксперт в области анализа причин коллапса сооружений промышленного и гражданского строительства. Являлся руководителем Отдела теории предельного равновесия Института строительной механики и сейсмостойкости АН Грузии. По инициативе и под руководством профессора Н.В. Ахвледиани была разработана «Теория свободы выбора возможных перемещений» в области теории прочности и устойчивости механических систем, выполненных из материалов, обладающих пластическими свойствами. Н.В. Ахвледиани является автором 150 научных работ в области строительной механики. В рамках «Теории свободы выбора возможных перемещений», проф. Н.В.Ахвледиани было создано новое научное направление в теории расчета и экспертизы строительных сооружений, позволившее эффективно выявлять опасность возможного коллапса строительных конструкций и своевременно принимать необходимые меры по предотвращению потери строительными конструкциями их несущей способности.

Проф. Н.В. Ахвледиани был одним из первых ученых, работающих в области теории предельного равновесия, который обратил внимание на проблему существенной логической неопределенности, вытекающей из основных теорем «Классической теории предельного равновесия». Еще в 1957 г. им было внесено существенное уточнение в «Теорему о совпадении границ несущей способности для пластических конструкций», согласно которому случай совпадения границ являлся только лишь частным случаем, выполнявшимся при соблюдении некоторых дополнительных условий, в число которых входило условие бесконечной малости необратимых пластических деформаций. В общем же случае конечных необратимых пластических деформаций, имела место существенная разница между статически возможной и кинематически возможной границами несущей способности железобетонных конструкций, причем кинематически возможная граница, фактически определяющая несущую способность и устойчивость конструкции, оказывалась существенно меньше статически возможной, определяемой в соответствии с «Классической теорией предельного равновесия», что создавало опасный дефицит несущей способности конструкции, который зачастую не мог быть полностью устранен за счет принятых в строительных нормах и правилах коэффициентов условия работ.

В результате аналитических и экспериментальных исследований, проведенных в Отделе теории предельного равновесия Института строительной механики и сейсмостойкости АН Грузии под руководством проф. Н.В. Ахвледиани, выяснилось, что с учетом повторно-переменного характера нагружения на железобетонные конструкции, реальная несущая способность железобетонных конструкций составляла всего лишь порядка 50% от верхней статической нагрузки, определяемой в соответствии с «Классической теорией предельного равновесия», что создавало реальную угрозу внезапного обрушения упомянутых конструкций в процессе их эксплуатации. Существующее положение усугублялось также и тем обстоятельством, что в строительных нормах и правилах периода СССР, имела место отчетливая тенденция экономии строительного материала, в особенности металла и арматуры. Нормативными документами того времени, стимулировались развитие и разработка таких методов расчета, которые приводили к значительной экономии материала. Вследствие этих обстоятельств, внедрение в реальную практику проектирования расчетных методов, выявляющих дефицит несущей способности конструкции, и тем самым требующих большего расхода дорогостоящих строительных материалов, являлось весьма проблематичным.

Значительный фактический разрыв между реальной устойчивостью и верхней границей несущей способности конструкций, выполненных из материалов, обладающих пластическими свойствами, предопределял существование самых различных методов расчета этих конструкций, дававших обширный спектр оценок несущей способности в весьма широком диапазоне, что естественным образом приводило к общей логической неопределенности в вопросе выбора расчетного значения несущей способности конструкций, и стимулировало развитие логико-аналитических методов исследования, позволяющих обосновывать то или иное принимаемое решение в отношении реальной несущей способности конкретных строительных сооружений и конструкций. Поэтому в рамках проводимых в Отделе теории предельного равновесия ИСМИС АН Грузии исследований, развитие аналитических расчетных методов экспертизы конструкций сопровождалось также и исследованием и развитием логико-аналитических методов обоснования достоверности предлагаемых экспертных методов, в процессе разработки которых значительное внимание было уделено изучению и применению известной теории выдающегося австрийского логика Курта Геделя о неполноте формальных и полуформальных аксиоматических систем, что в конечном итоге привело к формированию и обоснованию новой логико-аналитической и теоретико-множественной системы **INCOL&TAMLA**.

Система **INCOL&TAMLA** является строго формализованной в рамках классической формальной логики нулевого и первого порядков логико-аналитической системой, основной целью которой является выявление логико-аналитических особенностей современной классической формальной логики и теории множеств, отличающих формально-логические свойства упомянутых теорий от свойств аристотелевской традиционной логики, что в свою очередь позволяет адекватно и эффективно описывать те логические проблемы, которые возникают во многих логически формализованных логико-математических и механико-математических теориях первого порядка.

В процессе формирования и разработки системы **INCOL&TAMLA** стало очевидным, что логико-аналитические свойства современной классической формальной логики нулевого и первого порядков, в сильной степени отличаются от свойств аристотелевской традиционной логики в смысле обязательной выполнимости второго и третьего законов аристотелевской традиционной логики. Аналогичная проблема возникает также и в основаниях теории множеств в силу логико-аналитических особенностей тех аксиоматических принципов и основных понятий, которые приняты в классической теории множеств. По существу дела, в упомянутых системах имеет место феномен логической трансценденции, где под логической трансценденцией понимается выход за пределы аристотелевской традиционной логики, конструктивно наблюдаемый и логически доказуемый в рамках современной классической формальной логики нулевого и первого порядков.

Применение системы **INCOL&TAMLA** в вопросах анализа логико-аналитических особенностей формализованных теорий первого порядка показало ее высокую эффективность. По существу дела стало возможным с необходимой логико-аналитической строгостью и достоверностью исследовать феномен возникновения логической трансценденции и логического коллапса (формально-логического ослабления истинности) во многих формализованных теориях первого порядка. Приложение системы **INCOL&TAMLA** к анализу логико-аналитических свойств системы **ZFC** классической теории множеств позволило установить логически трансцендентную природу последней, а также принципиальную осуществимость формально-логического коллапса в основаниях классической теории множеств. Система **INCOL&TAMLA** также была успешно применена при исследовании логически трансцендентных логико-аналитических свойств «Классической теории предельного равновесия» в области расчета прочности и устойчивости пластических систем, которая в течении многих десятилетий являлась основой многих нормативных документов. В процессе упомянутого исследования было выявлено, что основные теоремы «Классической теории предельного равновесия» указывают на формально-логический коллапс, сопровождающий состояние предельного равновесия конструкций.

По результатам многолетних исследований в области анализа логико-аналитических особенностей различных формализованных аналитических теорий первого порядка, система **INCOL&TAMLA** может быть рекомендована для ее широкого применения в формальных и полуформальных теориях, основанных на современной классической формальной логике нулевого и первого порядков. Кроме этого система **INCOL&TAMLA** может быть применена в области аналитической философии при исследовании вопросов генезиса логико-аналитической трансценденции, а также в мультидисциплинарных и междисциплинарных исследованиях, где вследствии ожидаемой существенной логико-аналитической неоднородности составляющих теоретических и практических компонентов, приложение системы **INCOL&TAMLA** может способствовать адекватному логическому объяснению многих вопросов, логико-аналитическая природа которых выходит за пределы аристотелевской традиционной логики.

ЛИТЕРАТУРА

1. **П.Вопенка. Альтернативная теория множеств. Издательство Института Математики им. С.Л. Соболева СО РАН. Новосибирск. 2004 г.**

2. **Ф. Хаусдорф. Теория множеств. URSS. Москва. 2007 г.**

3. **Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика. МЦНМО. 2000.**

4. **П.Дж.Коэн.Теория множеств и «Континуум-гипотеза».URSS.Москва. 2009 г.**

5. **Г.М. Фихтенгольц. Основы математического анализа. Москва. 2002 г.**

6. **В.В. Шугаев. Инженерные методы в нелинейной теории предельного равновесия оболочек. «Готика». Москва. 2001 г.**

7. **А.Н. Ахвледиани. Исследование механизма возникновения феномена логического коллапса и логической неопределенности. Энциклопедический Фонд Russika. Санкт-Петербург. 2011 г.**

8. **А.Н. Ахвледиани. О проблеме логической трансценденции с позиций аналитической философии. Энциклопедический Фонд Russika. Санкт-Петербург. 2011 г.**

9. **А.Н. Ахвледиани. О логически сингулярном методе в аналитической философии. Энциклопедический Фонд Russika. Санкт-Петербург. 2012 г.**

10. **Н.В. Ахвледиани, А.Н. Ахвледиани. Статический классический и сингулярный предельный анализ идеально жестко-пластических механических систем в условиях не вполне достоверной информации о внешней нагрузке. «INCOL». Georgia-Israel. 2010.**

Книга

«Система INCOL&TAMLA и феномен логической трансценденции в аналитических теориях первого порядка»

подготовлена к изданию научным обществом

INCOL (Israel- Georgia)

Контактная информация - Phone: (972) 054 203 94 07.

E-mail: **alexandernodarakhvlediani@gmail.com**

«INCOL»

Israel - Georgia

2011 - 2012