ЧЕТВЕРТЫЙ ПРИНЦИП ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТРАНСЦЕНДЕНЦИИ СИСТЕМЫ INCOL&TAMLA

Александр Нодарович Ахвледиани

24 февраля 2012 г.

Информационный портал

Орифламма

Донецк, Украина

Международное

научное общество

«INCOL»

Кармиэль

Израиль

ЧЕТВЕРТЫЙ ПРИНЦИП ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТРАНСЦЕНДЕНЦИИ СИСТЕМЫ «INCOL&TAMLA»

А.Н. Ахвледиани

Научное общество «INCOL» (Israel – Georgia)

E-mail – alexanderakhvlediany@yandex.ru

Аннотация

В настоящей работе рассматривается четвертый принцип логико-математической трансценденции системы «INCOL&TAMLA». Показано, что справедливость упомянутого принципа, свидетельствует о логически трансцендентной природе свойства транзитивности эквивалентных множеств и классов в классической теории множеств.

Настоящая работа посвящена исследованию логико-аналитической природы одного их основных понятий классической теории множеств – понятия эквивалентности множеств. В работе /1/ понятие эквивалентности между двумя множествами A и B определяется следующим образом.

<u>Определение эквивалентности множеств</u>

Два множества A и B называются эквивалентными, если существует взаимно однозначное соответствие между ними, при котором каждому элементу a множества A соответствует единственный элемент b множества B, и каждому элементу b множества B, соответствует единственный элемент a множества A.

Понятие эквивалентности между двумя множествами является основой для установления отношения равенства между кардинальными числами (мощностями) множеств.

<u>Определение равенства кардинальных чисел</u>

Если два множества A и B являются эквивалентными, то их кардинальные числа равны:

$$(A \cong B) \Rightarrow [Card(A) = Card(B)] \qquad (1)$$

Соотношение (1) является формальным выражением достаточного условия равенства кардинальных чисел с точки зрения классической теории множеств.

Кардинальные числа бесконечных множеств являются бесконечно большими величинами, по терминологии классической теории множеств являются трансфинитными числами, а по терминологии классического математического анализа являются «несобственными числами». Например, кардинальное число всего множества натуральных чисел обозначается, как $\aleph_0$, и определяется следующим выражением:

$$Card(N_+) = \aleph_0 = 1+1+1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

Постольку поскольку кардинальные числа бесконечных множеств и классов являются бесконечно большими величинами, то они подлежат количественному сравнению по правилам, которые определены в классическом математическом анализе для бесконечно больших величин - /2/.

<u>Правила количественного сравнения кардинальных чисел</u>

1. ***Кардинальное число бесконечного класса A и кардинальное число бесконечного класса B являются кардинальными числами одного порядка, если для этих кардинальных чисел выполняется следующее соотношение***:

$$\lim \frac{Card(A)}{Card(B)} = d \qquad (3)$$

где d – конечное и отличное от нуля действительное число.

2. ***Кардинальное число бесконечного класса B является кардинальным числом большего порядка по сравнению с кардинальным числом бесконечного класса A, если для этих кардинальных чисел выполняется следующее соотношение:***

$$\lim \frac{Card(A)}{Card(B)} = 0 \qquad (4)$$

3. ***Если два кардинальных числа Card(A) и Card(B) равны друг другу, то они являются кардинальными числами одного порядка. По логическому закону контрапозиции это означает, что если кардинальные числа Card(A) и Card(B) являются бесконечно большими величинами разного порядка, то они не равны друг другу, или формально:***

$$\left[\left(\lim \frac{Card(A)}{Card(B)} = 0\right) \vee \left(\lim \frac{Card(B)}{Card(A)} = 0\right)\right] \Rightarrow (A \neq B) \qquad (5)$$

Рассмотрим разбиение всего множества Q_{0+} неотрицательных рациональных чисел на два класса Q_{01} и $Q_{1\infty}$ следующим образом. Число 0 отнесем к классу Q_{01}. Число 1 отнесем к классу $Q_{1\infty}$. В отношении любых других положительных рациональных чисел будем поступать следующим образом. Пусть $\frac{m}{n}$ - произвольное рациональное число. Если $\frac{m}{n}>1$, то число $\frac{m}{n}$ отнесем к классу $Q_{1\infty}$, а число $\frac{n}{m}$ - отнесем к классу Q_{01}. Если же $0<\frac{m}{n}<1$, то число $\frac{m}{n}$ отнесем к классу Q_{01}, а число $\frac{n}{m}$ отнесем к классу $Q_{1\infty}$. Нетрудно видеть, что при рассматриваемом разбиении, каждое неотрицательное рациональное число попадет в один и только один из классов, и кроме этого каждому рациональному числу $\frac{m}{n}$ одного класса соответствует одно и только одно рациональное число $\frac{n}{m}$ другого класса. Классы, полученные в результате рассмотренного разбиения, одновременно являются и множествами, поскольку однозначно можно определить, какое из неотрицательных рациональных чисел попадает в тот или иной класс. Построенное нами конструктивное разбиение позволяет сформулировать на основе приведенного выше прямого и непротиворечивого вывода следующую лемму, которая является справедливой, как с точки зрения теоретико-множественной эквиваленции множеств, так и с точки зрения равенства кардинальных чисел сооответствующих множеств, как бесконечно больших числовых величин.

Лемма 1

Кардинальные числа множеств Q_{01} и $Q_{1\infty}$ ***равны:***

$$Card(Q_{01}) = Card(Q_{1\infty}) \tag{6}$$

В соответствии с **Леммой 1,** рассмотренное нами выше разбиение определяет эквиваленцию $\Im Q1$ между двумя множествами рациональных чисел Q_{01} и $Q_{1\infty}$, при котором каждому рациональному числу $\frac{m}{n}$ одного множества, соответствует одно и только одно рациональное число $\frac{n}{m}$ другого множества.

Рассмотрим теперь соответствие $\Im Q2$, определенную следующим образом. Каждому рациональному числу множества Q_{01} поставим в соответствие рациональное число множества Q_{12} всех рациональных чисел, заключенных на полусегменте $[1,2)$ согласно выражениям:

$$Q_{12} = [1,2) \tag{7}$$

$$(r1 \in Q_{01}) \Leftrightarrow [(r1+1) \in Q_{12}] \tag{8}$$

Из формул (7) и (8) следует, что рассмотренное нами соответствие $\Im Q2$ является взаимно однозначным. Это обстоятельство означает справедливость следующего утверждения.

Лемма 2

Кардинальные числа множеств Q_{01} и Q_{12} ***равны:***

$$Card(Q_{01}) = Card(Q_{12}) \tag{9}$$

Из известного *свойства транзитивности отношения эквивалентности* и справедливости соотношений (6) и (9), следует справедливость следующего утверждения.

Лемма 3

Кардинальные числа множеств Q_{12} и $Q_{1\infty}$ ***равны:***

$$Card(Q_{12}) = Card(Q_{1\infty}) \tag{10}$$

Теперь рассмотрим вопрос количественного соотношения между кардинальными числами $Card(Q_{12})$ и $Card(Q_{1\infty})$ с точки зрения бесконечно больших количественных величин. Вследствие того обстоятельства, что мощности всех множеств всех рациональных чисел, расположенных в полусегментах $(n,n+1]$, где n - натуральное число, - равны, - то имеет место следующее соотношение:

$$\frac{Card(Q_{12})}{Card(Q_{1\infty})} = \frac{1}{n-1}, n \to \infty \tag{11}$$

Из соотношения (11) следует:

$$\lim\left[\frac{Card(Q_{12})}{Card(Q_{1\infty})}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n-1}\right)=0 \qquad (12)$$

Из справедливости соотношения (12) вытекает справедливость следующего утверждения:

Лемма 4

Кардинальные числа множеств Q_{12} и $Q_{1\infty}$ ***являются бесконечно большими величинами разного порядка.***

Сопоставление «Правил количественного сравнения кардинальных чисел» с **Леммой 4** позволяет придти к следующему утверждению.

Лемма 5

Кардинальные числа множеств Q_{12} и $Q_{1\infty}$ ***не являются равными.***

Нетрудно видеть, что **Лемма 5** и **Лемма 3** являются логически взаимно контрадикторными.

Полученный результат можно сформулировать в виде «Четвертого принципа логико-математической трансценденции».

Четвертый принцип логико-математической трансценденции

Каждая, достаточно богатая формальная или полуформальная математическая теория, содержащая классическую формальную логику нулевого и первого порядков, теорию рациональных чисел, определение бесконечно большой величины и определение взаимно однозначного соответствия классов или множеств (в том числе и бесконечных), содержит такие сильно трансцендентные логико-математические утверждения A и ⌐A, что по отдельности, формально логически и аналитически по непротиворечиво выводимо, как утверждение A, так и утверждение ⌐A.

Таким образом из представленного выше материала становится очевидным, что существуют случаи, когда понятие о взаимно-однозначном соответствии двух бесконечных множеств, и в частности свойство транзитивности отношения эквивалентности двух бесконечных множеств, приводит к генезису логической трансценденции на множестве рациональных чисел.

Используемые источники:

1. **Ф.Хаусдорф. Теория множеств. URSS. Москва. 2007.**
2. **Г.М. Фихтенгольц. Основы математического анализа. «Наука».Москва.1964.**