

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ДНР
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ВЫСШЕЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ
“ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ”**



МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

**к выполнению курсовой работы по курсу:
«Математические методы в решении
электротехнических задач на ЭВМ»
для студентов всех форм обучения**

Донецк – 2017

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ВЫСШЕЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ
“ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ”**

**Кафедра “Электроснабжение промышленных
предприятий и городов”**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

**к выполнению курсовой работы по курсу:
«Математические методы в решении
электротехнических задач на ЭВМ**

для студентов всех форм обучения

**утвержден
на заседании кафедры
“Электроснабжение
промышленных
предприятий и городов ”**

**Протокол № _____
от _____**

**утвержден
на заседании учебно-
издательского
совета ДонНТУ
Протокол № _____
от _____**

Донецк – 2016

УДК 681.332 (07)

Методические указания к лабораторным работам по курсу "Математические методы и модели" (для студентов специальности 7.090603 "Электротехнические системы электропотребления") / Состав.: Джура С.Г., Шлепнёв С.В., Якимишина В.В., Фёдоров А.Ю.

Изложены теоретические сведения по методам вычислительной математики, используемых при решении инженерных задач в области электротехники и энергетики. Приведены задачи и методические рекомендации к выполнению 16 лабораторных работ, предназначенных для обучения студентов методам решения на ЭВМ линейных и нелинейных уравнений и их систем, дифференциальных уравнений, методам численного интегрирования, аппроксимации функций, поиска экстремальных значений.

Составители: С.Г. Джура, доц.
С.В. Шлепнёв, доц.
В.В. Якимишина, доц.
А.Ю. Фёдоров, асс.

Рецензент: В.М.Павлыш, проф.

Нормоконтролер: В.И.Чурсинов, доц.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из главных направлений научно-технического прогресса в настоящее время является развитие методов и средств информатики и вычислительной техники.

Использование математических методов решения инженерных задач на ЭВМ позволяет значительно повысить эффективность процессов проектирования, расчета параметров, исследования, анализа и синтеза различных технических систем, в том числе и систем электроснабжения.

В математическом плане много задач электротехники и энергетики сводятся к решению алгебраических, трансцендентных и дифференциальных уравнений и их систем, операциям с матрицами, векторами и рядами, аппроксимации табличных функций, минимизации функционалов и др. Эти задачи не всегда могут быть решены аналитически и требуют применения численных методов.

В данном пособии приведены задачи и методические указания к лабораторным работам, выполнение которых позволит приобрести навыки алгоритмизации, программирования и решения на ЭВМ задач с использованием методов вычислительной математики.

По согласованию с преподавателем допускается замена задач, предусмотренных в лабораторных работах, задачами аналогичного содержания по дисциплинам, параллельно изучаются, или по тематике НИРС, а также выбор языка программирования, на котором будет выполняться задача.

Лабораторная работа 1

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ СТЕПЕННЫХ ПОЛИНОМОВ ПО СХЕМЕ ГОРНЕРА

Цель работы: научиться вычислять значения степенных многочленов наиболее экономичным образом, приобрести навыки программирования с использованием функций и подпрограмм пользователя.

1.1 Теоретические сведения

В практике анализа и синтеза систем автоматического управления и в теории электрических цепей часто возникает необходимость в исчислении функций, имеющих вид степенного полинома (многочлена):

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}, \quad (1.1)$$

где n - степень полинома;

$\vec{A} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ - вектор коэффициентов;

x - независимая переменная.

Многочлен (1.1) можно преобразовать к виду:

$$P_n(x) = (\dots((a_0x + a_1)x + a_2)x + a_3)x + \dots + a_n, \quad (1.2)$$

Алгоритм вычисления $P_n(x)$, составленный на основании выражения (1.2), называется схемой Горнера.

Согласно этой (схеме) многочлен i -го порядка выражают через многочлен $(i-1)$ -го порядка по формуле:

$$P_i = P_{i-1}x + a_i, \quad (1.3)$$

В математике доказано, что для многочленов общего вида нельзя построить алгоритм более экономичен в смысле числа операций (n добавлений и n умножений), чем схема Горнера.

1.2 Задание

Рассчитать значение переменной z при x изменяющейся от -1 до $+1$ с шагом $0,1$. Выражения для вычисления z приведены в таблице 1.1. В этих выражениях функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ представляют собой степенные

многочлены, отличающиеся друг от друга порядком и значениями коэффициентов.

Для нечетных вариантов:

$$f_1(x) = 1.07x^5 - 12x^4 - 2.8x^3 + 6.3x^2 + 3.7x + 4 ,$$

$$f_2(x) = 10.1x^7 + 37x^5 - 15x^4 + 8.2x + 5.4 ,$$

$$f_3(x) = -23x^3 + 13.6x^2 + 0.5x - 1.2 .$$

Для четных вариантов:

$$f_1(x) = 8.16x^4 + 14x^3 + 0.9x^2 + 3.8x - 2 ,$$

$$f_2(x) = 19.7x^6 + 11.4x^4 + 2.3x^3 - 1.8x + 0.9 ,$$

$$f_3(x) = 21.6x^5 - 17.4x^4 + 8.7x^3 + 11x .$$

Для ввода значений коэффициентов степенных многочленов составить подпрограмму (процедуру), а для вычисления этих многочленов - функцию пользователя.

Таблица 1.1 - Исходные данные к лабораторной работе №1

№ п/п	Выражение для вычисления переменной
1	2
1,2	$\frac{f_2(x)}{2(f_1(x) + f_3(x))}$
3,4	$\sin f_1^2(x) - f_2(x) + f_3(2x)$
5,6	$\sqrt{f_1^2(x) + f_2^2(x)} - 3f_3(x)$
7,8	$\frac{(f_1(\sin x) + f_3(\cos x))^2}{f_2(x)}$
9,10	$\sqrt{ f_1(x) - f_2(x) } + f_3\left(\frac{x}{2}\right)$
11,12	$\frac{f_1^2(3x) - f_2\left(\frac{x}{3}\right)}{3f_3(x)}$
13,14	$f_2(\sin x) - f_1(x) + \sin\left(f_3\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

15,16	$\frac{f_1(x) - 2\sqrt{ f_2(x) }}{5f_3(\frac{x}{5})}$
-------	---

Продолжение таблицы 1.1

1	2
17,18	$(f_1^3(x) - f_2(\frac{x}{2}))f_3(5x)$
19,20	$\frac{f_1(e^x) - f_2(e^x)}{2(f_2(x) + f_3(x))}$
21,22	$\frac{f_2(x)}{\sqrt{f_1^2(\sin x) + f_3^2(\cos x)}}$
23,24	$ f_1(\sin^2 x)f_3(e^x)f_2(2x) $
25,26	$e^{f_1(x)} - \frac{f_2(\frac{x}{2})}{f_3(2x) + 1}$

1.3 Методические рекомендации

Пусть дан массив $A(n)$, где n – номер порядкового элемента (рис 1.1). Положив $P = A(n)$ и выполняем операцию по формуле 1.3 n раз при $i = 1, 2, \dots, n$, получаем необходимое значение по схеме Горнера.

Реализация схемы Горнера на языке программирования C++ выглядит следующим образом:

```
float gorner(float k[], int n, float x)
{
    float P;

    P = k[n-1]*pow(x, n-1) + k[n-2]*pow(x, n-2) + k[n-3]*pow(x, n-3) + k[n-4]*pow(x, n-4) + k[n-5]*pow(x, n-5) + k[n-6]*pow(x, n-6) + k[n-7]*pow(x, n-7) + k[n-8]*pow(x, n-8) + k[n-9]*pow(x, n-9) + k[n-10]*pow(x, n-10);

    return P;
}
```

Лабораторная работа 2

ПРОСТЕЙШИЕ ОПЕРАЦИИ С МАТРИЦАМИ

Цель работы: научиться вычислять сумму, разницу и скалярное произведение матриц, транспонировать их и определять нормы матриц.

2.1 Теоретические сведения

В электротехнических расчетах часто используются матрицы и векторы (вектором называют матрицу - строку или матрицу - столбец). В данной лабораторной работе рассмотрены простейшие операции над матрицами: сумма, разность, умножение, транспонирование, вычисление некоторых норм. Более сложные операции будут рассмотрены позже.

2.1.1 Сумма и разность двух матриц

Суммой двух матриц одного и того же размера

$$A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}] \quad (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n)$$

называется матрица $C=[C_{ij}]$ того же размера, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B :

$$C_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \quad (2.1)$$

Разница матриц определяется аналогично сумме, только у элементов матрицы, вычитается, знак меняется на противоположный, то есть элементы матрицы $C = B - A$ вычисляются по формуле:

$$C_{ij}=b_{ij}-a_{ij} \quad (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n) \quad (2.2)$$

2.1.2 Скалярное произведение матриц и сведение их в степень

Скалярным произведением матрицы A размером $m \times k$ на матрицу B размером $k \times n$ называется матрица C размером $m \times n$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{i=1}^k a_{ij}b_{ij} \quad (2.3)$$

Отметим, что матрица $C=A \times B$ определена только тогда, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B .

Для скалярного произведения матриц несправедливый переместительный закон, то есть $AB \neq BA$.

Частные случаи умножения матриц является умножение матрицы A размером $m \times k$ на вектор - столбец \vec{B} , состоящий из k элементов, и вектора строки \vec{A} , состоящий из k элементов, на матрицу B размером $k \times n$.

В первом случае результатом будет вектор - столбец с элементами $(i=1, 2, \dots, m)$,

$$C_i = a_{i1}b_1 + a_{i2}b_2 + \dots + a_{ik}b_k = \sum_{j=1}^k a_{ij}b_j \quad (2.4)$$

а во втором случае - вектор - строка с элементами

$$C_j = a_1b_{1j} + a_2b_{2j} + \dots + a_kb_{kj} = \sum_{i=1}^k a_ib_{ij} \quad (2.5)$$

Согласно понятия о скалярном произведении матриц в целую положительную степень k можно возвести только квадратную матрицу

$$\underbrace{A^k = ((AA) \cdot A) \dots \cdot A)}_{k\text{- сомножителей}} \quad (2.6)$$

2.1.3 Транспонирование матриц

Если в матрице A размером $m \times n$ заменить строки соответствующими столбцами, то получим матрицу A^T размером $n \times m$, что называется транспонированной по отношению к матрице A .

Таким образом:

$$a_{ij}^T = a_{ji} \quad (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m).$$

2.1.4 Нормы матриц

Под нормой матрицы $A=[a_{ij}]$ разумеется действительное число $\|A\|$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\|A\| \geq 0 \quad (\text{причём } \|A=0\| \text{ только при } A=[0]),$$

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \text{ где } \alpha - \text{действительное число (причём } \|-A\| = \|A\|),$$

$$\|A\| + \|B\| \geq \|A+B\|,$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|,$$

$$\|A-B\| \geq \|B\| - \|A\|.$$

К наиболее легко вычислительных норм относятся следующие три нормы:

$$\|A\|_1 = \max_i \sum_j |a_{ij}| \quad (2.7)$$

максимальная сумма модулей элементов матрицы по строкам;

$$\|A\|_2 = \max_j \sum_i |a_{ij}| \quad (2.8)$$

максимальная сумма модулей элементов матрицы по столбцам;

$$\|A\|_3 = \sqrt{\sum_{ij} (|a_{ij}|)^2} \quad (2.9)$$

корень квадратный из суммы квадратов модулей всех элементов матрицы.

2.2 Задание

Выполнить операции над матрицами в соответствии с выражениями, которые приведены в таблице 2.1. Повторяющиеся действия оформить в виде отдельных процедур:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3.1 \\ 4.5 & 10.7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7.5 & 11 & 1.7 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 7.4 & 5 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Таблица 2.1- Исходные данные к лабораторной работе №2

№ п/п	Задание
1	2
	<i>проверить соотношение:</i>
1	$\ A+C\ _1 \leq \ A\ _1 + \ C\ _1$
2	$\ A*B\ _1 \leq \ A\ _1 * \ B\ _1$
3	$\ A-C\ _1 \geq \ C\ _1 - \ A\ _1$
4	$\ A+C\ _2 \leq \ A\ _2 + \ C\ _2$

1	2
5	$\ A*B\ _2 \leq \ A\ _2 * \ B\ _2$
6	$\ A-C\ _2 \geq \ C\ _2 - \ A\ _2$
7	$\ A+C\ _3 \leq \ A\ _3 + \ C\ _3$
8	$\ A*B\ _3 \leq \ A\ _3 * \ B\ _3$
9	$\ A-C\ _3 \geq \ C\ _3 - \ A\ _3$
<i>вычислить:</i>	
10	$K = A + C + B^T$
11	$K = B(A + C) + D$
12	$K = (A - C) * (D * B)$
13	$K = B^T - A - C$
14	$K = B * A * B$
15	$L = \ A + C\ _1 + \ B\ _1$
16	$L = \ A\ _1 + \ B\ _2 + \ C\ _1$
17	$K = C * D + A + C$
18	$K = B * C * D$
19	$\ A\ _1 \quad \ A^T\ _1 \quad \ B\ _1 \quad \ B^T\ _1$
20	$K = D * C^T * A$
21	$K = D - B * C - B * A$
22	$K = A^T + C^T + B$
23	$K = (A - C) * B$
24	$K = C * D - A - C$

1.3 Методические рекомендации

Чтобы вычислить сумму элементов массива дан массив X , состоящий из N элементов. Переменной S присваивается значение равное нулю, затем последовательно суммируются элементы массива X . Блок-схема алгоритма расчета суммы приведена на рис. 2.1.

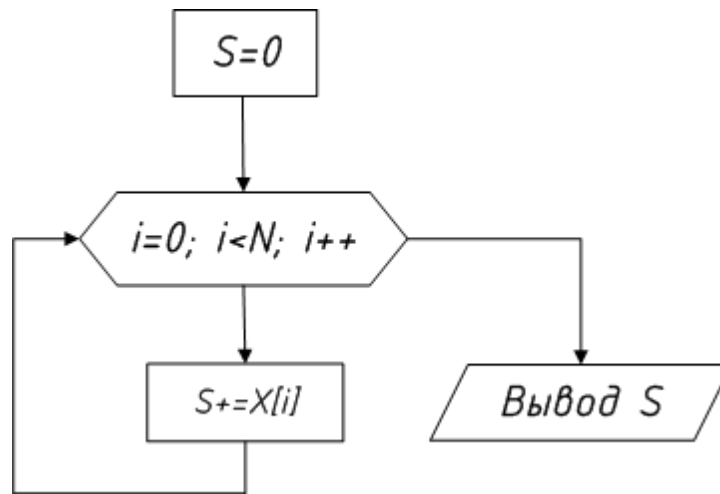


Рисунок 2.1 Алгоритм вычисления суммы элементов массива

Дан массив X , состоящий из N элементов. Найти произведение элементов этого массива. Решение этой задачи сводится к тому, что значение переменной P , в которую предварительно была записана единица, последовательно умножается на значение i -го элемента массива. Блок-схема алгоритма приведена на рис. 2.2.

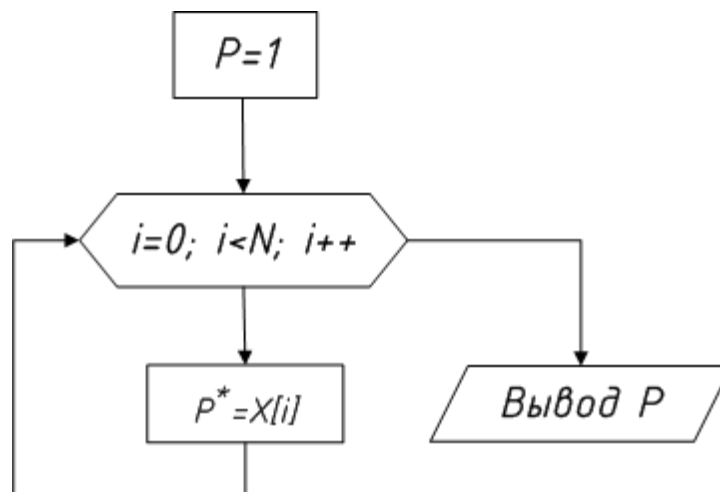


Рисунок 2.2 Вычисление произведения элементов массива

Для того, чтобы транспонировать заданную матрицу A_{ij} присвоим переменную N строкам матрицы, а M – столбцы. Матрицу B_{ji} используем в качестве выходного параметра, т. е. результата поставленной задачи. В итоге значения строк и столбцов меняются местами. Блок-схема транспонирования матрицы приведена на рис. 2.3.

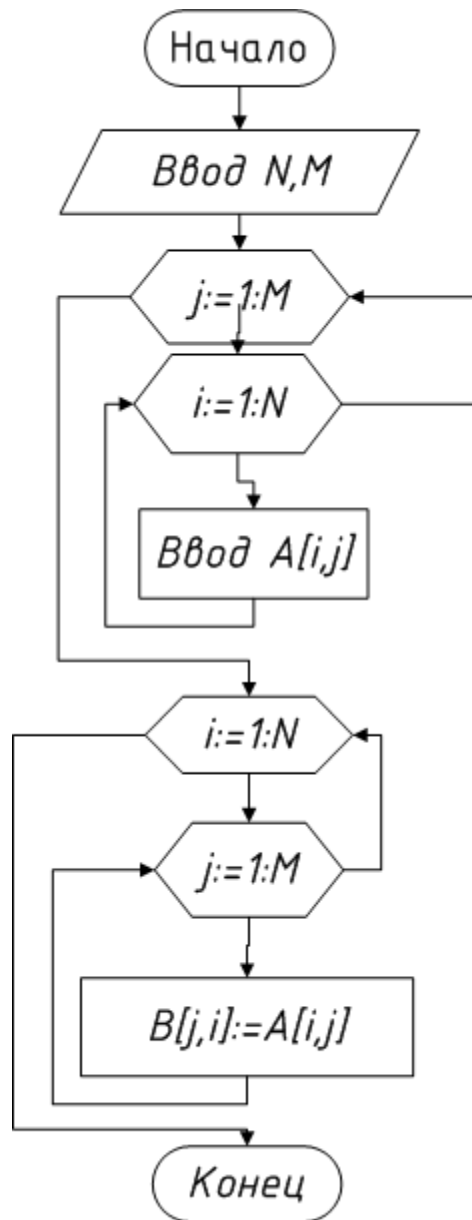


Рисунок 2.3 Блок-схема транспонированной матрицы

Дан массив X , состоящий из n элементов. Найти максимальный элемент массива и номер, под которым он хранится в массиве.

Алгоритм решения задачи следующий. Пусть в переменной с именем Max хранится значение максимального элемента массива, а в переменной с именем $Nmax$ – его номер. Предположим, что нулевой элемент массива является максимальным и запишем его в переменную Max , а в $Nmax$ – его номер (то есть ноль). Затем все элементы, начиная с первого, сравниваем в цикле с максимальным. Если текущий элемент массива оказывается больше максимального, то записываем его в переменную Max , а в переменную $Nmax$ – текущее значение индекса i . Процесс определения максимального элемента в массиве приведен в таблице 5.3 и изображен при помощи блок-схемы на рис. 2.4.

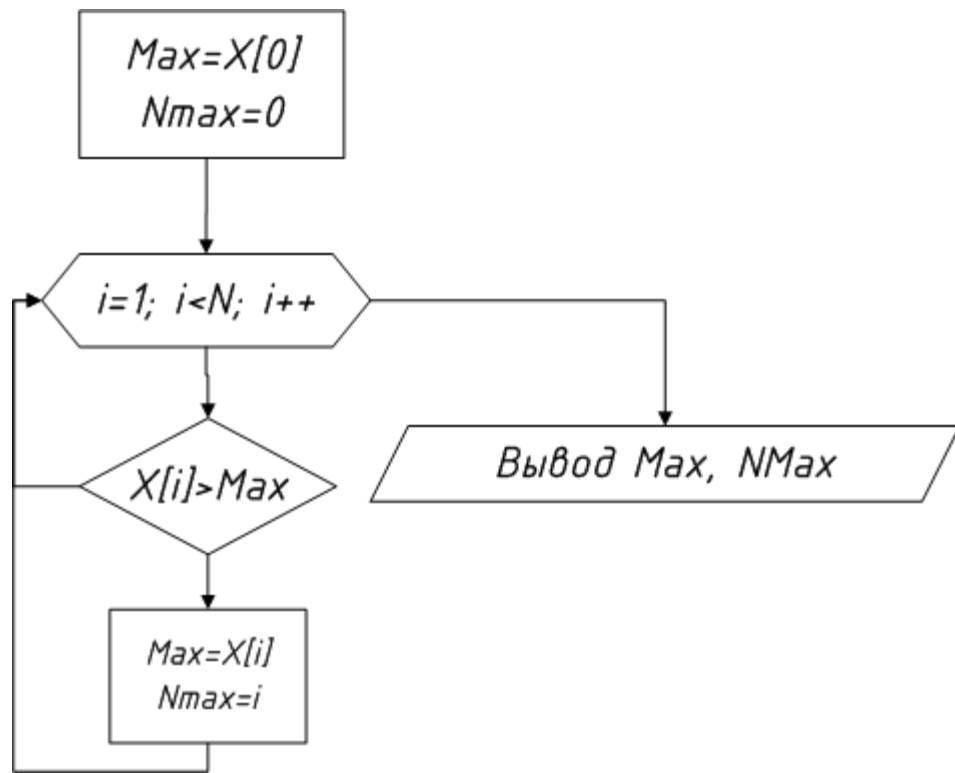


Рисунок 2.4 Поиск максимального элемента и его номера в массиве

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

3.1 Теоретические сведения

Система n линейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \text{\scriptsize} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (3.1)$$

$$A \times \vec{X} = \vec{B} \quad (3.2)$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – квадратная матрица коэффициентов;

$\vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ – вектор свободных членов;

$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – искомый вектор корней.

- Точные методы (метод обращения матрицы коэффициентов, правило Крамера, метод Гаусса и др.);
- Итерационные методы (Ньютона, Зейделя, простых итераций и др.).

Если матрица A неособенная, то есть ее определитель не равен нулю, то система имеет единственное решение:

$$\vec{X} = A^{-1} \times \vec{B} \quad (3.3)$$

где A^{-1} - матрица, обратная матрице A .

Вычисления корней по формуле (3.3) называется методом обратной матрицы коэффициентов.

Согласно правилу Крамера корни рассчитываются по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ - определитель матрицы A ;

Δ_i - определители матриц, полученных с матрицы A путем замены ее i -го столбца вектором свободных членов.

Оба из вышеперечисленных методов используют на практике только при решении "вручную" систем уравнений невысокого порядка. При $n > 3$ эти методы очень трудоемки и не экономические.

Наиболее распространенным из точных методов является метод Гаусса.

Метод Гаусса можно разбить на два этапа:

–Прямой ход, заключающийся в последовательном исключении корней с 1-го до n -го и преобразовании матрицы коэффициентов к треугольному виду;

–Обратный ход, заключающийся в последовательном определении корней с n -го до 1-го из преобразованной системы уравнений.

Исключение k -го корня ($k = 1, 2, \dots, n-1$) с i -го уравнения ($i = k + 1, k + 2, \dots, n$) выполняется путем замены всех коэффициентов i -го уравнения разницей между бывшими коэффициентами этого уравнения и соответствующими коэффициентами i -го уравнения, умноженного на мерительный множитель:

$$p = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \quad (3.4)$$

В результате коэффициенты i -го уравнения примут следующие значения:

$$a_{ik} = 0 \quad (3.5)$$

$$a_{ij} = a_{ij} - p a_{ki} \quad (j = k + 1, k + 2, \dots, n) \quad (3.6)$$

$$b_i = b_i - p b_k \quad (3.7)$$

При исключении корней минимальных погрешностей округления при пересчете коэффициентов можно достичь перестановкой уравнений таким образом, чтобы модули коэффициентов a_{kk} при корнях, что исключаются, x_k были максимально возможными. Этот этап метода Гаусса называют выбором главного элемента.

В результате прямого хода система уравнений (3.1) преобразуется к виду:

Коэффициенты a_{ij} и b_i системы (3.8) не совпадают с соответствующими коэффициентами исходной системы (3.1).

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j}{a_{ii}} \quad (i = n-1, n-2, \dots, 1). \quad (3.10)$$

Алгоритм прямого хода можно упростить, объединив квадратную матрицу коэффициентов $A_{nx(n)}$ и вектор - столбец свободных членов \vec{B} в единую матрицу $AR_{nx(n+1)}$, которая называется расширенной матрицей коэффициентов, в которой $(n+1)$ -и столбец составляют элементы вектора \vec{B} :

При этом из блок-схемы рис. 3.1 исчезнут блоки 9 и 13, а в блоках 7 и 14 параметр j (номер столбца) будет меняться не в n , а к $n+1$. В схеме рис. 3.2

в блоках 1 и 6 переменные b_n и b_i придется заменить переменными $a_{n,n+1}$ и $a_{i,n+1}$ соответственно.

3.2 Задание

Рассчитать токи и напряжения в ветвях электрических цепей, приведенных на рис. 3.4, методом законов Кирхгофа. Параметры схем приведены в таблице 3.1. Выполнить проверку результатов.

3.3 Методические рекомендации

Если используется язык программирования Паскаль: процесс определения корней системы уравнений удобно оформить в виде подпрограммы (процедуры) с формальными параметрами n , A , B и X , причем массив X должен быть обязательно описан как параметр-переменная (с ключевым словом *var*). При использовании расширенной матрицы коэффициентов формальными параметрами процедуры будут n , A и X .

Для описания типов массивов в разделе констант целесообразно определить максимально допустимые размеры массивов.

Для того, чтобы подпрограмма метода Гаусса была универсальной, она не должна содержать процессов ввода исходных данных и вывода результатов.

Основной модуль программы должен содержать ввод исходных данных, формирование фактических параметров для подпрограммы метода Гаусса, вызов этой подпрограммы, вывод результатов и проверку правильности решения.

Для проверки можно вычислить и вывести на экран значения функций

$$f_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - b_i \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.12)$$

При правильном решении эти значения должны быть близки к нулю.

Вывод матрицы и контроль результатов можно оформить в виде отдельных подпрограмм.

Таблица 3.1 - Параметры схем

№ п/п	E1, В	E2, В	E3, В	E4, В	E5, В	E6, В	r1, Ом	r2, Ом	r3, Ом	r4, Ом	r5, Ом	r6, Ом
1-6	130	500	120	240	170	380	21	14	13	16	9	20
7-12	360	190	210	130	450	170	8	9	16	13	21	12
13-18	120	220	340	80	510	160	5	18	12	14	7	28
19-24	280	540	310	160	90	360	12	6	24	10	14	18

25-31	340	110	280	210	130	260	27	30	4	6	22	11
-------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	----	----	---	---	----	----

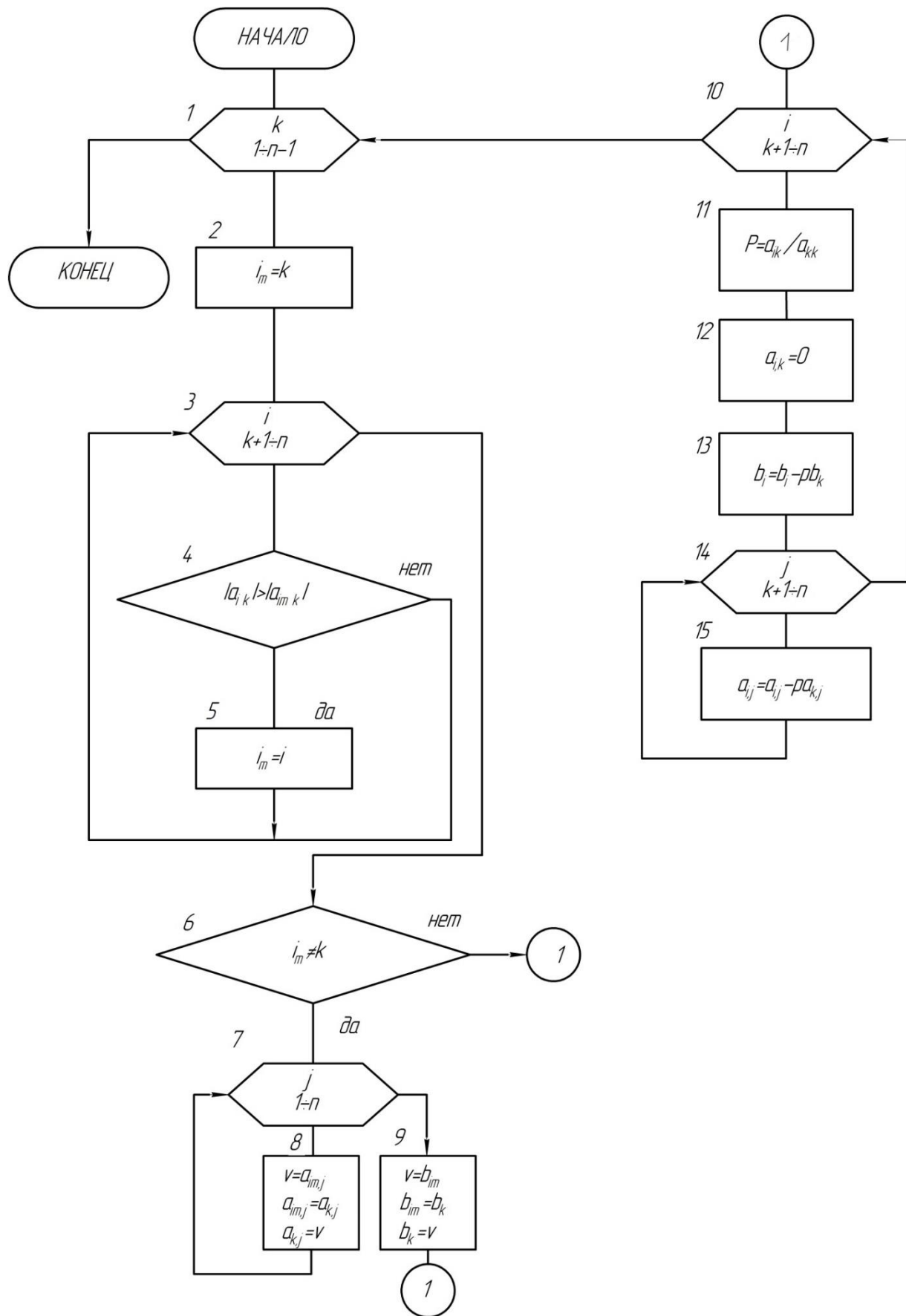


Рисунок 3.1 – Прямой ход метода Гаусса

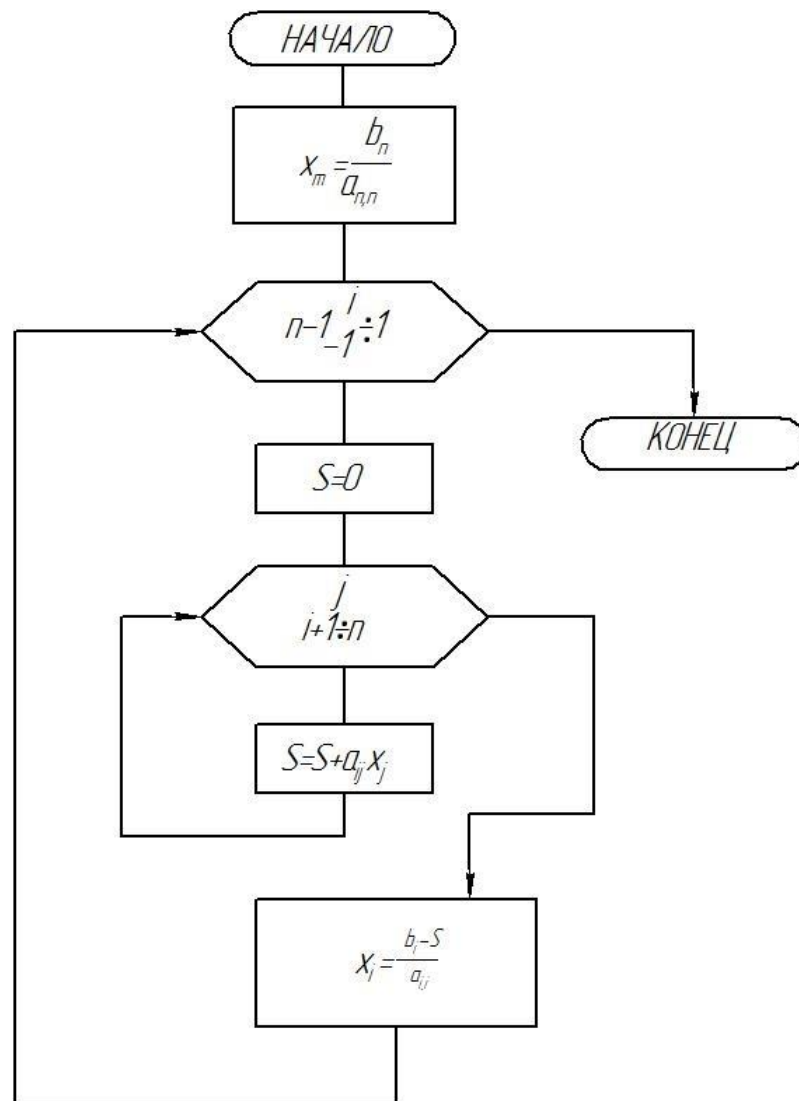


Рисунок 3.2 – Обратный ход метода Гаусса

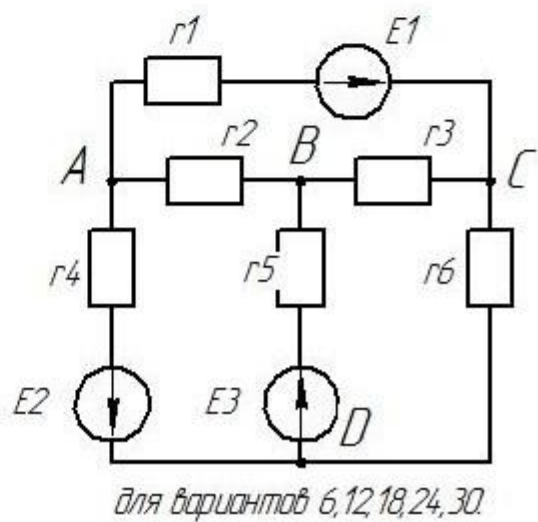
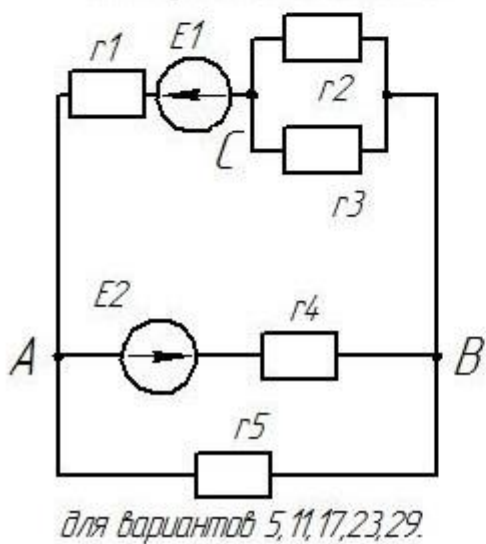
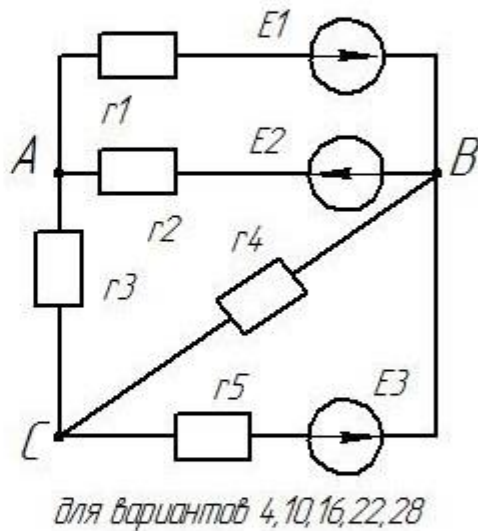
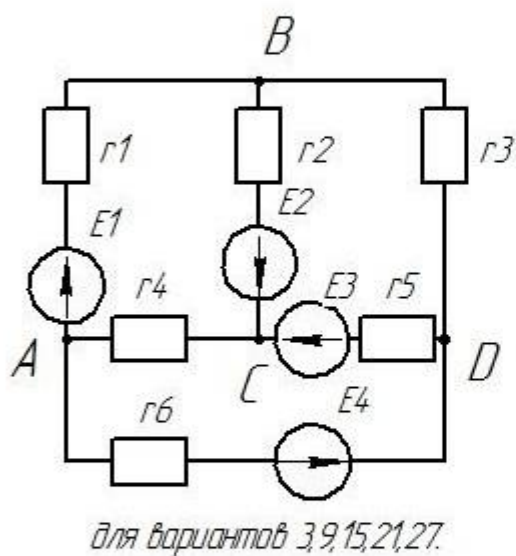
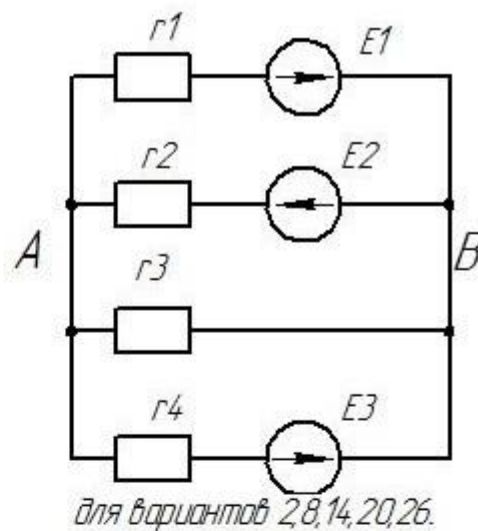
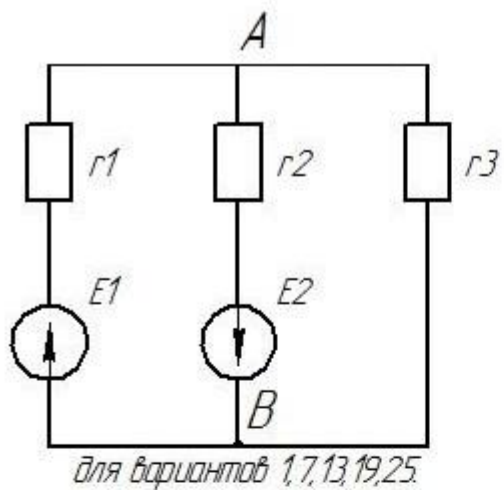


Рисунок 3.4 – Расчетные схемы к заданию 3.2

Лабораторная работа 4

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Цель работы: научиться рассчитывать статические режимы в разветвленных электрических цепях.

4.1 Теоретические ведомости

Если электрическая цепь содержит, кроме резисторов и источников постоянного тока, катушки индуктивности, конденсатора и источника переменного тока, то для расчета токов и напряжений в установившихся режимах необходимо решить систему уравнений с комплексными коэффициентами. Если при этом не учитывать нелинейность статических характеристик элементов, то получают линейную систему алгебраических уравнений, для решения которой годятся все методы, изложенные в предыдущей лабораторной работе, в том числе и метод Гаусса (см лаб. раб. 3).

Результаты работы программы: вещественные числа $x1$ и $x2$ – действительные корни квадратного уравнения либо $x1$ и $x2$ – действительная и мнимая части комплексного числа.

Комплексные числа записываются в виде $a+ib$, где a – действительная часть комплексного числа, b – мнимая часть комплексного числа, i – мнимая единица.

4.2 Задание

Таблица 4.1- Параметры схем

№ п/п	L, Гн	C, мкФ	E1, В	E2, В	r1, Ом	r2, Ом	r3, Ом
1-6	0,05	170	360	200	18	10	27
7-12	0,08	150	400	250	30	13	20
13-18	0,07	270	200	320	18	21	32
19-24	0,09	130	220	440	28	20	16
25-31	0,06	180	320	240	25	16	34

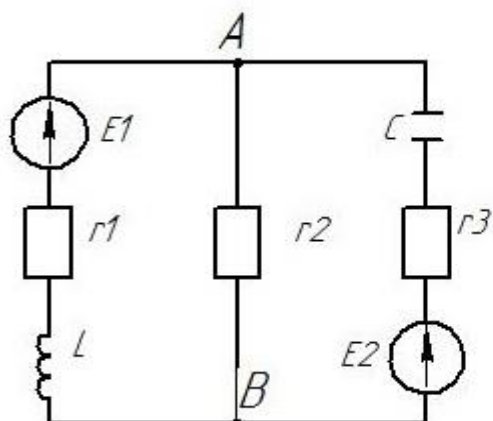
Рассчитать установившиеся токи в ветвях электрических цепей, приведенных на рисунке 4.1, составив систему уравнений с помощью законов Кирхгофа. Параметры схем приведены в таблице 4.1. Выполнить проверку результатов.

4.3 Методические рекомендации

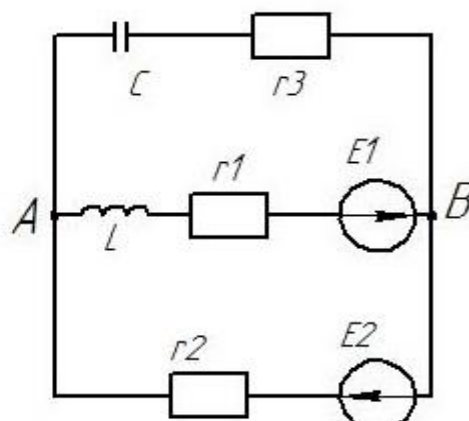
При выполнении работы воспользуйтесь рекомендациями и схемами алгоритмов, приведенным в предыдущей работе, заменив операции над комплексными коэффициентами вызовом соответствующих подпрограмм (процедур) и функций.

Программу дополнить следующими процедурами и функциями:

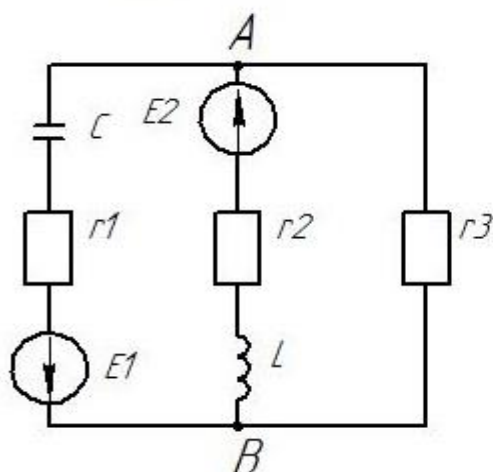
- процедурами ввода и вывода значений переменных или их массивов,
- процедурами умножения, деления и сложения двух комплексных чисел,
- процедурой изменению знака комплексного числа,
- функцией вычисления модуля комплексного числа.



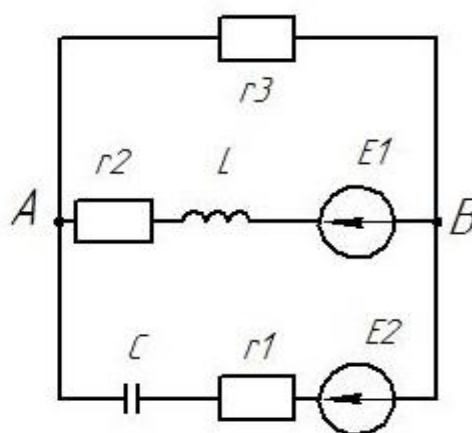
для вариантов 17,13,19,25.



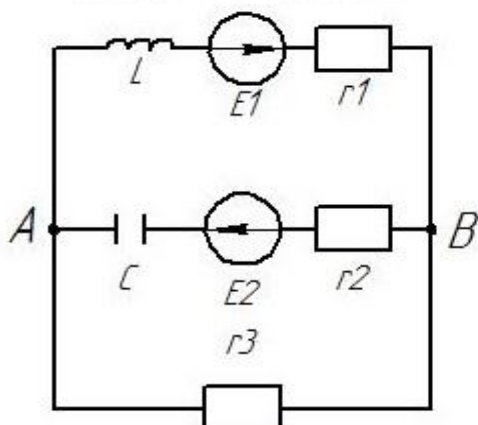
для вариантов 2,8,14,20,26.



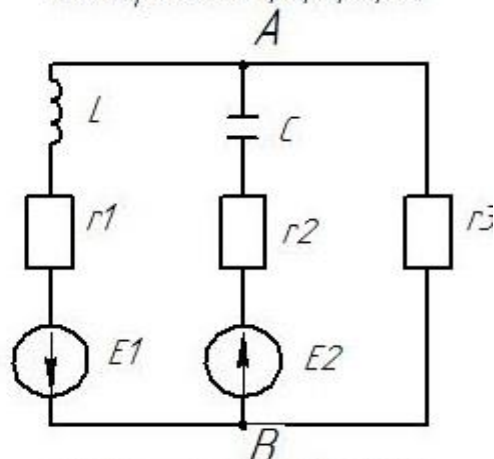
для вариантов 3,9,15,21,27.



для вариантов 4, 10, 16, 22, 28.



для вариантов 5,11,17,23,29.



для вариантов 6, 12, 18, 24, 30

Рисунок 4.1 – Расчетные схемы к заданию 4.2

Лабораторная работа 5

ОБРАЩЕНИЕ МАТРИЦ

Цель работы: научиться вычислять матрицу, обратную заданной с помощью ЭВМ.

5.1 Теоретические сведения

Обращения матриц широко применяется при расчете разветвленных электрических цепей различными методами в матричной форме.

Обратной по отношению к исходной квадратной матрице называется такая квадратная матрица

$$A_{n \times n} = A_{n \times n}^{-1} \quad (5.1)$$

которая, будучи умноженной на исходную дает единичную диагональную матрицу $E_{n \times n}$:

$$A_{n \times n} \times A_{n \times n}^{-1} = E_{n \times n} \quad (5.2)$$

или в развернутой форме:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Для матриц небольшого раз мера ($n \leq 3$) обращения чаще выполняют в ручную, используя формулу:

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{\Delta} \quad (5.4)$$

где A – союзная матрица (матрица, составленная из алгебраических дополнений);

Δ – определитель.

При $n > 3$ расчеты по формуле (5.4) становятся очень громоздкими.

Как видно из (5.3), элементы KC -го столбца обратной матрицы X можно определить решая систему n линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1, KC \\ x_2, KC \\ \dots \\ x_n, KC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1, KC \\ e_2, KC \\ \dots \\ e_n, KC \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

$$\text{где } e_{i,KC} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq KC, \\ 1 & \text{при } i = KC, \end{cases} \quad (5.6)$$

$KC=1, 2, \dots, n.$

Таким образом, для определения всех элементов обратной матрицы необходимо решить n систем уравнений.

Этот подход часто используют при машинных расчетах. Решать системы уравнений возможно любым из известных методов, например, методом Гаусса.

Если уже существует подпрограмма решения системы уравнений, то алгоритм обращения матрицы может быть представлен схемой (рис. 5.1)

Если подпрограмма решения систем уравнений отсутствует, то прямой ход метода Гаусса выполняют один раз над расширенной матрицей A , составленной из исходной матрицы AI и присоединенной к ней слева единичной квадратной матрицы E :

$$A = \begin{pmatrix} ai_{11} & ai_{12} & \dots & ai_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ ai_{21} & ai_{22} & \dots & ai_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ai_{n1} & ai_{n2} & \dots & ai_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

$$\text{или } a_{ij} = \begin{cases} ai_{ij} & \text{при } j \leq n, \\ 1 & \text{при } j = n + i, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (5.8)$$

$i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, 2n.$

В блок-схеме прямого хода (рис. 5.1) в сравнении с алгоритмом исчезнут блоки 9 и 13, а в блоках 7 и 14 конечное значение переменной j станет равным $2n$.

Обратный ход будет выполняться n раз (при $KC=1, 2, \dots, n$). При этом в схеме рисунка 3.2 элементы вектора корней x_n, x_j и x_i необходимо заменить элементами обратной матрицы $x_{n,KC}, x_{j,KC}$ и $x_{i,KC}$, а переменные b_n и b_i - переменными $a_{n,n+KC}$ и $a_{i,n+KC}$ соответственно.

5.2 Задание

Выполнить обращение произвольных квадратных матриц второго, третьего и четвертого порядков с контролем результата.

5.3 Методические рекомендации

Оформить в виде отдельных процедурных блоков ввод, вывод, обращение матрицы и контроль результата.

Для проверки правильности решения вычислите и выведите на экран скалярное произведение исходной матрицы на полученную обратную. Если в результате получите единичную диагональную матрицу (см. уравнение (5.3)), то результат верный.

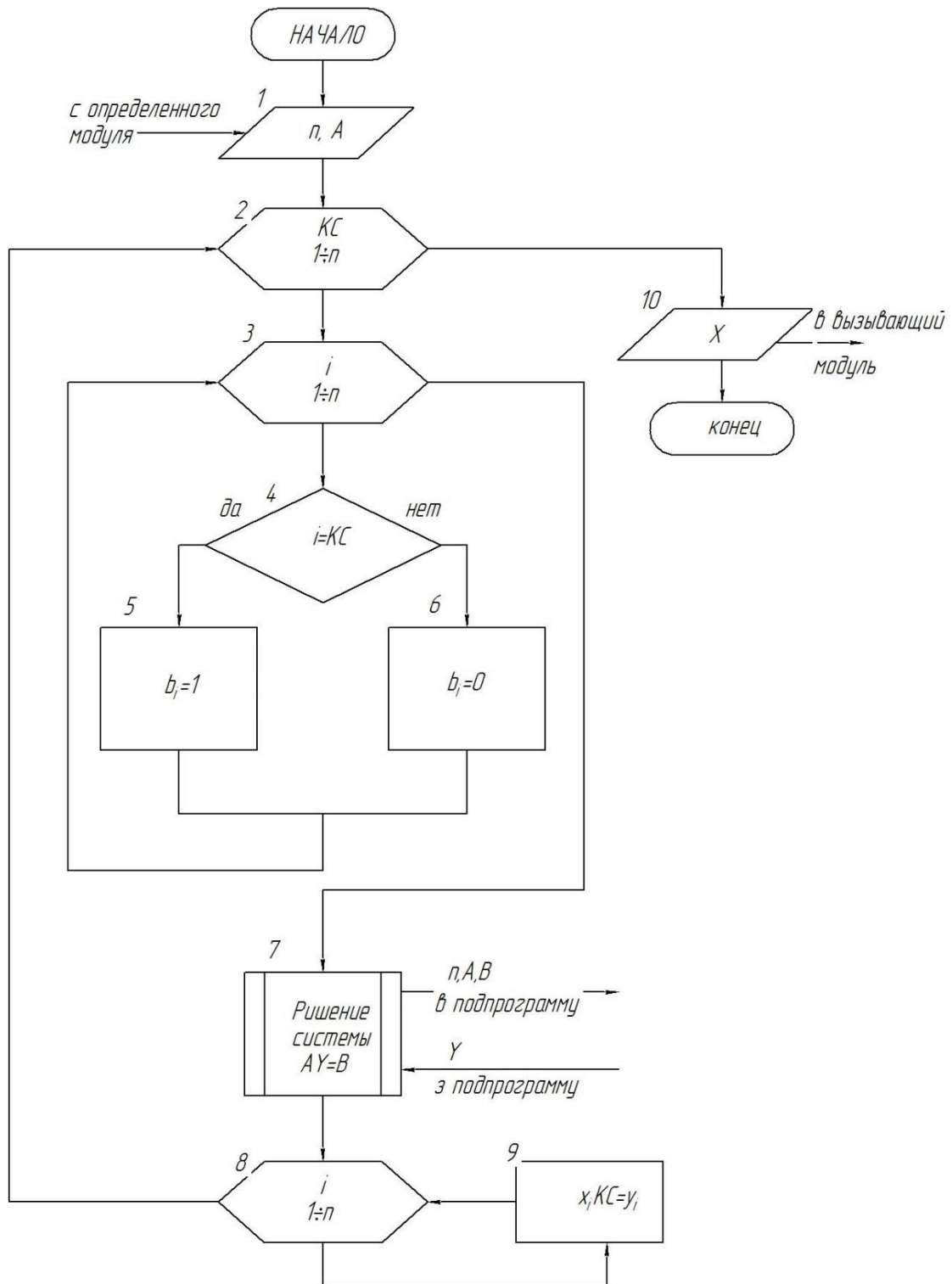


Рисунок 5.1 – Блок-схема обращения матрицы

Лабораторная работа 6

ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ МАТРИЦ

Цель работы: научиться вычислять определители матриц с помощью ЭВМ.

6.1 Теоретические сведения

Для вычисления определителя можно преобразовать исходную матрицу в треугольную форму с помощью прямого хода метода Гаусса и рассчитать произведение ее диагональных элементов.

Программу на C++, решающую системы линейных уравнений методом Крамера, удобно реализовать с функциями для вычисления определителя системы и определителя при неизвестных (рис 6.1). Тело каждой функции содержит и запись математических операций вычисления определителей.

Для вычисления определителей матриц методом Крамера (рис.6.1) в качестве исходных данных используем квадратную матрицу A_{ij} и вектор свободных коэффициентов B_{ij} . В вызове *Kramer* функций указываются уже фактические параметры - массивы, хранящие перечисленные данные, но уже состоящие из значений, введенных пользователем. В результате получим решение СЛАУ.

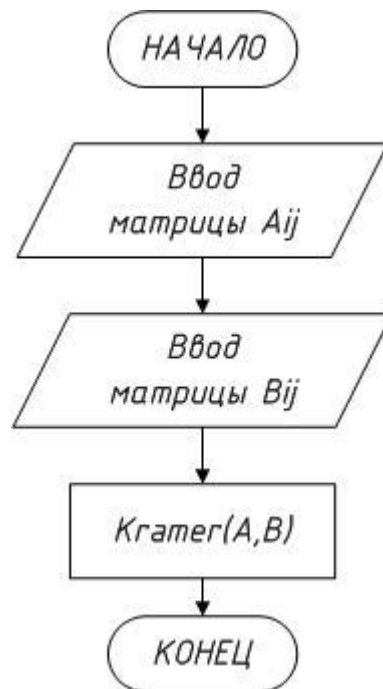


Рисунок 6.1 – Алгоритм выполнения программы

Если в схеме прямого хода используется перестановка строк, то необходимо учесть, что одна такая перестановка меняет знак определителя на противоположный.

6.2 Задание

Решить системы уравнений, приведенные в таблице 6.1, методом Крамера. Выполнить проверку результата.

Таблица 6.1 – Исходные данные

№ п/п	Система уравнений
1	2
1,2	$3.14 x_1 - 2.2x_2 + 1.17x_3 = 1.27$ $-2.12x_1 + 1.32x_2 - 2.45x_3 = 2.13$ $1.17x_1 - 2.45x_2 + 1.18x_3 = 3.14$
3,4	$2.45x_1 + 1.75x_2 - 3.24x_3 = 1.23$ $1.75x_1 - 1.16x_2 + 2.18x_3 = 3.43$ $-3.24x_1 + 2.18x_2 - 1.85x_3 = -0.16$
5,6	$1.65x_1 - 2.27x_2 + 0.18x_3 = 2.25$ $-2.27x_1 + 1.73x_2 - 0.46x_3 = 0.93$ $0.18 x_1 - 0.46x_2 + 2.16x_3 = 1.33$
7,8	$3.23x_1 + 1.62x_2 + 0.65x_3 = 1.28$ $1.62x_1 - 2.33x_2 - 1.43x_3 = 0.87$ $0.65x_1 - 1.43x_2 + 2.18x_3 = -2.87$
9,10	$0.93x_1 + 1.42x_2 - 2.55x_3 = 2.48$ $1.42x_1 - 2.87x_2 + 2.36x_3 = -0.75$ $-2.55x_1 + 2.36x_2 - 1.44x_3 = 1.83$
11,12	$1.42 x_1 - 2.15x_2 + 1.07x_3 = 2.48$ $-2.15x_1 + 0.76x_2 - 2.18x_3 = 1.15$ $1.07x_1 - 2.18x_2 + 1.23x_3 = 0.88$
13,14	$2.23x_1 - 0.71x_2 + 0.63x_3 = 1.28$ $-0.71x_1 + 1.45x_2 - 1.34x_3 = 0.64$ $0.63 x_1 - 1.34x_2 + 0.77x_3 = -0.87$
15,16	$1.63x_1 + 1.27x_2 - 0.84x_3 = 1.51$ $1.27x_1 + 0.65x_2 + 1.27x_3 = -0.63$ $-0.84x_1 + 1.27x_2 - 1.21x_3 = 2.15$
17,18	$0.78x_1 + 1.08x_2 - 1.35x_3 = 0.57$ $1.08x_1 - 1.28x_2 + 0.37x_3 = 1.27$ $-1.35x_1 + 0.37x_2 + 2.86x_3 = 0.47$
19,20	$0.83x_1 + 2.18x_2 - 1.73x_3 = 0.28$ $2.18 x_1 - 1.41x_2 + 1.03x_3 = -1.18$ $-1.73x_1 + 1.03x_2 + 2.27x_3 = 0.72$
21,22	$2.74x_1 - 1.18x_2 + 1.23x_3 = 0.16$ $-1.18x_1 + 1.71x_2 - 0.52x_3 = 1.81$ $1.23x_1 - 0.52x_2 + 0.62x_3 = -1.25$
23,24	$1.35x_1 - 0.72x_2 + 1.81x_3 = 0.88$ $-0.72x_1 + 1.45x_2 - 2.18x_3 = 1.72$ $1.38x_1 - 2.18x_2 + 0.93x_3 = -0.72$

Лабораторная работа 7

ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: повторить построение графиков функций и научиться отделять корни трансцендентных уравнений.

7.1 Теоретические сведения.

Уравнение:

$$f(x)=0 \quad (7.1)$$

называется трансцендентным, если оно содержит тригонометрические или другие специальные функции (экспоненциальные, логарифмические и др.) переменной x .

Трансцендентные уравнения имеют неопределенное число решений, могут иметь бесконечное число решений.

Если рассмотренные уравнения не имеют аналитического решения, то их решают итерационными методами. Первым этапом решения такой задачи является отделение корней, т. е. определение интервала существования корня и его начального приближения.

Для отделения действительных корней трансцендентных уравнений часто весьма приблизительно построить график функции $f(x)$ или, преобразовав исходное уравнение $f(x)=0$ к виду $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$, построить графики двух функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ и определить примерно область точки их пересечения. Искомый интервал существования корня $[a,b]$ должен удовлетворять условию

$$f(a) \times f(b) < 0. \quad (7.2)$$

7.2 Задание.

Отделить первый положительный корень трансцендентного уравнения, приведенного в таблице 7.1, графическим методом.

7.3 Методические рекомендации

Левую границу поиска x_n выберите равной нулю (если $f(0)$ существует) или близком к нему положительному значению, например, 0,01 или 0,1. Правая граница поиска x_k произвольная и зависит от функции $f(x)$. Для уравнений таблицы ее не следует принимать более 5. Первоначальное значение шага поиска Δx выберите таким, чтобы на интервале поиска рассчитывалось не более 20 значений функции. Выведите их на экран.

Если в области поиска не окажется изменение знака функции $f(x)$, уменьшите Δx и (или) увеличьте x_k и повторите вычисления.

Для графика определите (программно или визуально) максимальное и минимальное значение функции на основании этой информации определите пределы графика и постройте его.

Используйте график не только для отделения корня, но и для выбора наиболее удачного метода его уточнения.

Функцию $f(x)$ определите как функцию пользователя.

7.3.1 Метод касательных.

В одной из точек интервала $[a, b]$, пусть это будет точка c , проведем касательную (рис 7.1). Запишем уравнение этой прямой:

$$y = k * x + m$$

Так как эта прямая является касательной, и она проходит через точку $(c, f(c))$, то $k = f'(c)$.

Следовательно,

$$y = f'(x) * x + m, f(c) = f' * c + m, m = f(c) - c * f'(c),$$

$$y = f'(c) * x + f(c) - c * f'(c), y = f'(c) * (x - c) + f(c).$$

Найдем точку пересечения касательной с осью x :

$$f'(c) * (x - c) + f(c) = 0, x = c - \frac{f(c)}{f'(c)}$$

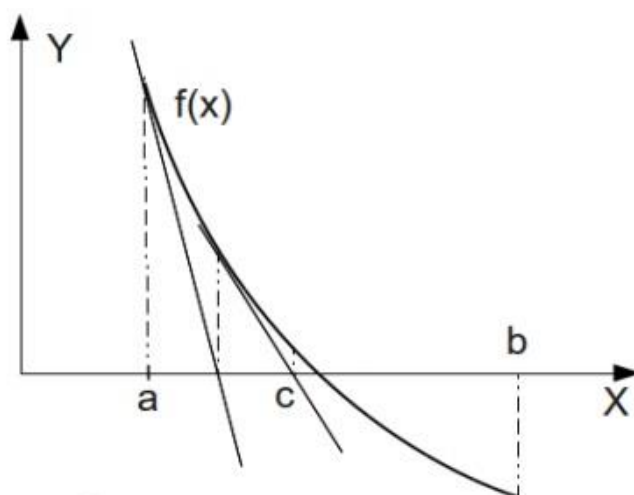


Рисунок 7.1 - Графическая интерпретация метода касательных

Если $|f(x)| < \varepsilon$, то точность достигнута, и точка x — решение (рис 7.2); иначе необходимо переменной c присвоить значение x и провести

касательную через новую точку c ; так продолжать до тех пор, пока $|f(x)|$ не станет меньше ε .

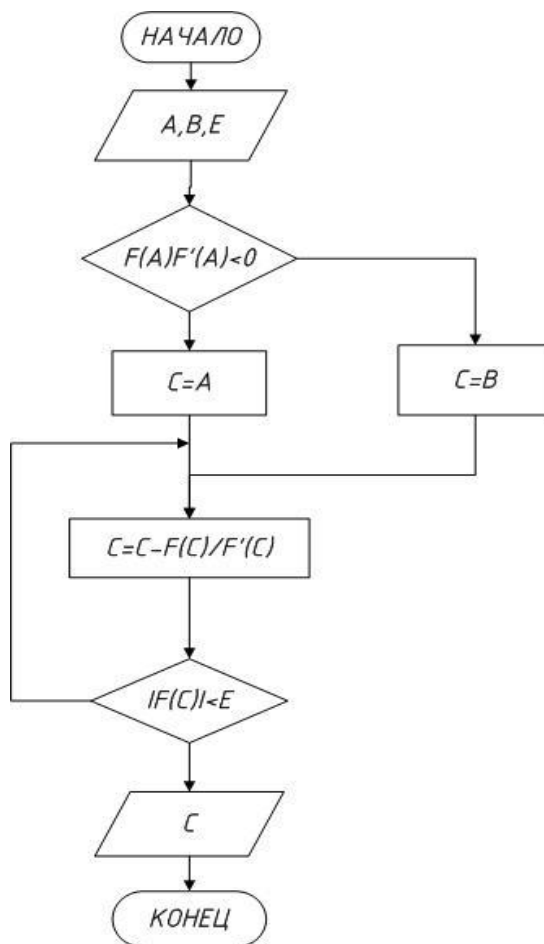


Рисунок 7.2 Алгоритм метода касательных

Осталось решить вопрос, что выбрать в качестве точки начального приближения c . В этой точке должны совпадать знаки функции и ее второй производной. А так как нами было сделано допущение, что вторая и первая производные не меняют знак, то можно проверить условие на обоих концах интервала и в качестве начального приближения взять ту точку, где это условие выполняется.

7.3.2 Метод хорд.

Этот заключается в том, что очередное приближение берем не в середине отрезка, а в точке пересечения с осью X (рис. 7.3) прямой, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Запишем уравнение прямой, проходящей через точки с координатами $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \quad y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a) \quad (7.3)$$

Прямая, заданная уравнением, пересекает ось X при условии $y=0$. Найдем точку пересечения хорды с осью X :

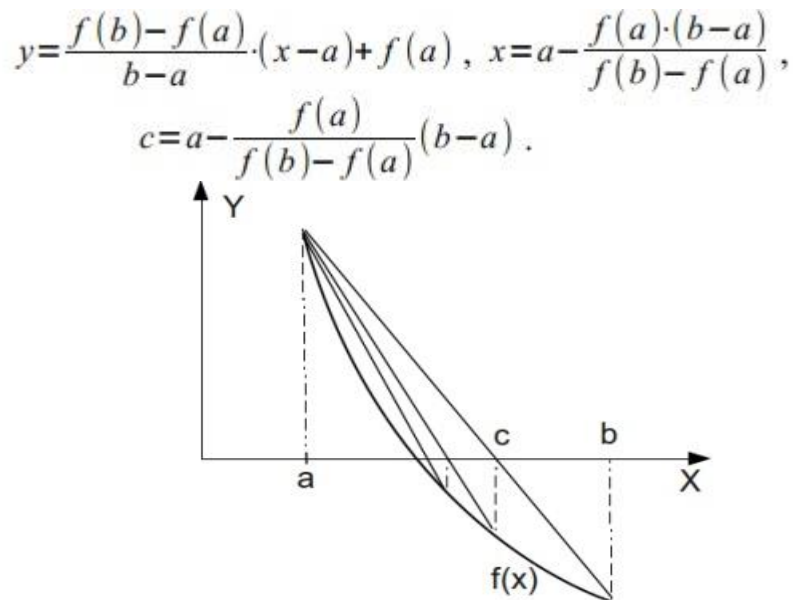


Рисунок 7.3 Графическая интерпретация метода хорд

Далее необходимо вычислить значение функции в точке c . Это и будет корень уравнения. Блок-схема метода представлена на рис. 7.4.

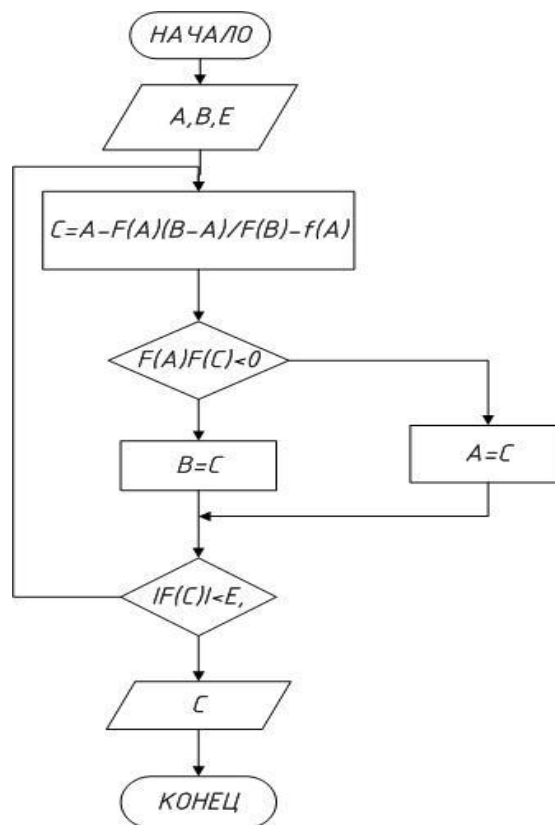


Рисунок 7.4 Алгоритм метода хорд

7.3.3 Метод бисекций.

Пусть был выбран интервал изоляции $[a, b]$ (рис.7.5). Примем за первое приближение корня точку c , которая является серединой отрезка $[a, b]$. Далее находим точку $c = (a + b) / 2$ и значение $f(c)$. Если $f(a) * f(c) < 0$, то корень лежит на

интервале $[a,c]$, иначе $[c,b]$. Если величина интервала меньше заданной точности, то ищем корень с более приближенной точностью.

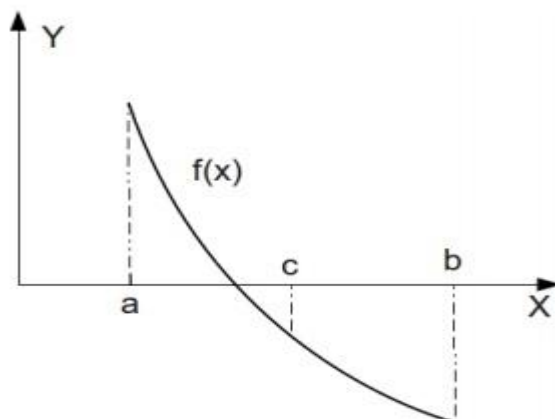


Рисунок 7.5 Графическая интерпретация метода бисекций.

Блок-схема алгоритма решения уравнения приведена на рис.7.6.

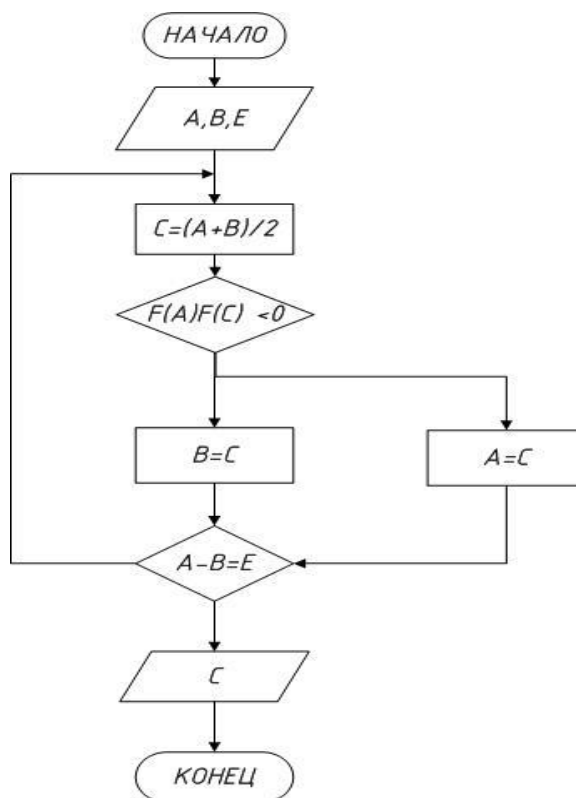


Рисунок 7.6 Алгоритм решения методом бисекций

Таблица 7.1 – Задания к лабораторной работе №7

№ п/п	Уравнение	Метод решения
1	2	3
1	$2\sin(x + \pi/3) - 0.5x^2 + 1 = 0$	Касательных

2	$\cos(x+0.3)-x^2=0$	Касательных
3	$\operatorname{tg}^3 x - x + 1 = 0$	Касательных

Продолжение таблицы 7.1

1	2	3
4	$2\arctg x - x + 3 = 0$	Касательных
5	$(x+3)\cos x - 1 = 0$	Касательных
6	$\operatorname{tg}(0.58x+0.1)-x^2=0$	Касательных
7	$\ln x - \frac{7}{2x+6} = 0$	Хорд
8	$\frac{1}{\operatorname{tg} 1.05x} - x^2 = 0$	Бисекций
9	$2\ln x - x/2 + 1 = 0$	Бисекций
10	$\ln x - 1/x^2 = 0$	Бисекций
11	$4.3\sin 4x - 3.5x = 0$	Хорд
12	$2x - 2(x-2) - 1 = 0$	Бисекций
13	$\cos(15.6x) + 0.5 = 0$	Бисекций
14	$0.5x + 1 - (x-2)^2 = 0$	Касательных
15	$3(x-1) - 2 - x = 0$	Хорд
16	$x^2 \cos 2x + 1 = 0$	Хорд
17	$x^2 - 2(x-1) = 0$	Касательных
18	$5\sin x - x = 0$	Бисекций
19	$\arctg(x-1) + 2x = 0$	Хорд
20	$(x-2)^2 - 2x = 0$	Касательных
22	$2e^x - 5x - 2 = 0$	Касательных
23	$\cos(x+0.5) - x^3 = 0$	Касательных
21	$x^2 - 20\sin x = 0$	Хорд
24	$2\arctg x - 1/2x^3 = 0$	Хорд
25	$e - x + x^2 - 2 = 0$	Хорд

Лабораторная работа 8

ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: научиться отделять корни алгебраических уравнений.

8.1 Теоретические сведения

Алгебраические уравнения n -ой степени вида имеют n корней

$$a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot x + a_n = 0 \quad (8.1)$$

При отделении корней алгебраических уравнений полезно иметь в виду следующие их свойства:

- 1) n корней алгебраического уравнения n -й степени могут быть действительными или комплексными;
- 2) если все коэффициенты a_i действительные, то все комплексные корни создадут комплексно соединенные пары;
- 3) число позитивных действительных корней равняется или меньше числа смены знаков в последовательности коэффициентов a_i многочлена $f(x)$;
- 4) число негативных действительных корней равняется или меньше числа смен знаков в последовательности коэффициентов многочлена $f(-x)$;
- 5) если $f(x)$ принимает значения разных знаков на концах отрезка $[a, b]$, то есть $f(a) \cdot f(b) < 0$, то в середине этого отрезка имеется хотя бы один корень, он будет единственным, если производная $f'(x)$ сохраняет в середине интервала $[a, b]$ постоянный знак;
- 6) используя теорему Лагранжа, можно рассчитать верхние R_+ и нижние R_- пределы позитивных R^+ и негативных R^- действительных корней:

$$R_+^+ = 1 + \sqrt[k]{B/a_0}, \quad (8.2)$$

где k - номер первого из негативных коэффициентов уравнения (8.1) при $a_0 > 0$;

B - наибольшая из абсолютных величин негативных коэффициентов:

$$R_H^+ = 1/R_1, \quad R_H^- = -R_2, \quad R_B^- = -1/R_3, \quad (8.3)$$

где R_1, R_2, R_3 - переменные, рассчитанные по формуле (8.2) для соответствующих вспомогательных уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x) = x^n f(1/x) = 0, \\ f_2(x) = f(-x) = 0, \\ f_3(x) = x^n f(-1/x) = 0. \end{cases} \quad (8.4)$$

8.2 Задание.

Отделить каждый действительный корень алгебраического уравнения $f(x)=0$ для $f(x)$ приведенных в таблице 8.1. Построить график функции $f(x)$ на интервале $[R_-, R_+]$.

8.3 Методические рекомендации.

Метод хорд и метод бисекций приведены соответственно в пунктах 7.3.2 и 7.3.3 методических рекомендаций к лабораторной работы №7.

Метод простых итераций применяется в случае когда последовательность приближений по указанному алгоритму сходится.

Для решения уравнения этим методом необходимо записать уравнение в виде $x=\phi(x)$, задать начальное приближение $x \in [a;b]$ и организовать следующий итерационный вычислительный процесс $x_{k+1}=\phi(x_k)$, $k=0,1,2, \dots$

Вычисление прекратить, если $|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon$ (ε - точность). Если неравенство $|\phi(x)|<1$ выполняется на всем интервале $[a;b]$, то последовательность $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ сводится к решению x^* (т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$).

Значение функции $\phi(x)$ должно удовлетворять условию $|\phi'(x)|<1$ для того, чтобы можно было применить метод простых итераций. Условие $|\phi'(x)|<1$ является достаточным условием сходимости метода простой итерации. Уравнение можно привести к виду $x=\phi(x)$ следующим образом. Умножить обе части уравнения $f(x)=0$ на число λ . К обеим частям уравнения $\lambda f(x)=0$ добавить число x . Получим $x = x + \lambda f(x)$.

Блок-схема метода простой итерации приведена на рис. 8.1.

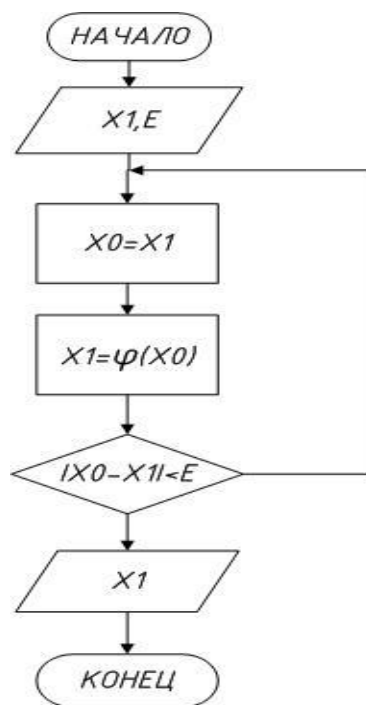


Рисунок 8.1 Алгоритм метода простой итерации

Таблица 8.1 – Задания к лабораторной работе №8

№ п/п	$f(x)$	Метод решения
1	2	3
1	$4.2x^3 - 31.92x^2 + 74.3x - 51.87$	Бисекций
2	$3.6x^3 - 172.8x^2 + 5.184x - 237.32$	Хорд
3	$5.8x^3 - 47.56x^2 + 121.2x - 97.02$	Бисекций
4	$6.1x^3 - 90.28x^2 + 388.2x - 506.2$	Хорд
5	$3.6x^3 - 39.96x^2 + 12.17x + 426.4$	Бисекций
6	$2.7x^3 - 37.26x^2 + 16.71x - 202.7$	Хорд
7	$1.3x^3 - 5.98x^2 - 1.09x + 13.76$	Простых итераций
8	$4.5x^3 - 26.1x^2 + 176.6x - 112.4$	Простых итераций
9	$5.1x^3 - 62.22x^2 + 142.7x + 109.2$	Простых итераций
10	$1.6x^3 - 3.04x^2 - 29.18x + 8.98$	Простых итераций
11	$-2.3x^3 + 0.23x^2 + 17.05x + 13.48$	Простых итераций
12	$1.6x^3 - 14.24x^2 + 38.13x - 29.02$	Простых итераций
13	$5.3x^3 - 36.04x^2 + 12.25x + 28.05$	Простых итераций
14	$-2.6x^3 + 4.68x^2 + 14.38x + 3.822$	Бисекций
15	$-1.5x^3 - 14.25x^2 - 37.98x - 22.03$	Простых итераций
16	$3.4x^3 - 46.58x^2 + 127.3x - 60.34$	Простых итераций
17	$2.8x^3 - 25.76x^2 + 6.18x + 107.4$	Бисекций
18	$-1.4x^3 - 10.78x^2 - 22.54x - 11.85$	Простых итераций
19	$3.1x^3 - 62.6x^2 + 414.7x - 898.9$	Простых итераций
20	$1.6x^3 - 12.48x^2 + 25.04x - 8.12$	Бисекций

21	$5.4x^3 - 54x^2 + 140.6x - 73.8$	Простых итераций
22	$2.7x^3 - 17.6x^2 - 45.4x + 123$	Бисекций
23	$-1.8x^3 - 5.58x^2 + 1.5x + 119$	Бисекций
24	$-2.5x^3 + 8.25x^2 + 61.9x - 117$	Простых итераций

Лабораторная работа 9

УТОЧНЕНИЕ КОРНЕЙ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ И АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: научиться решать трансцендентные и алгебраические уравнения

9.1 Теоретические сведения

Численное решение уравнений разделяется на 2 этапа: отделение корней и уточнение их начальных приближений итерационными методами.

$$f(x)=0 \quad (9.1)$$

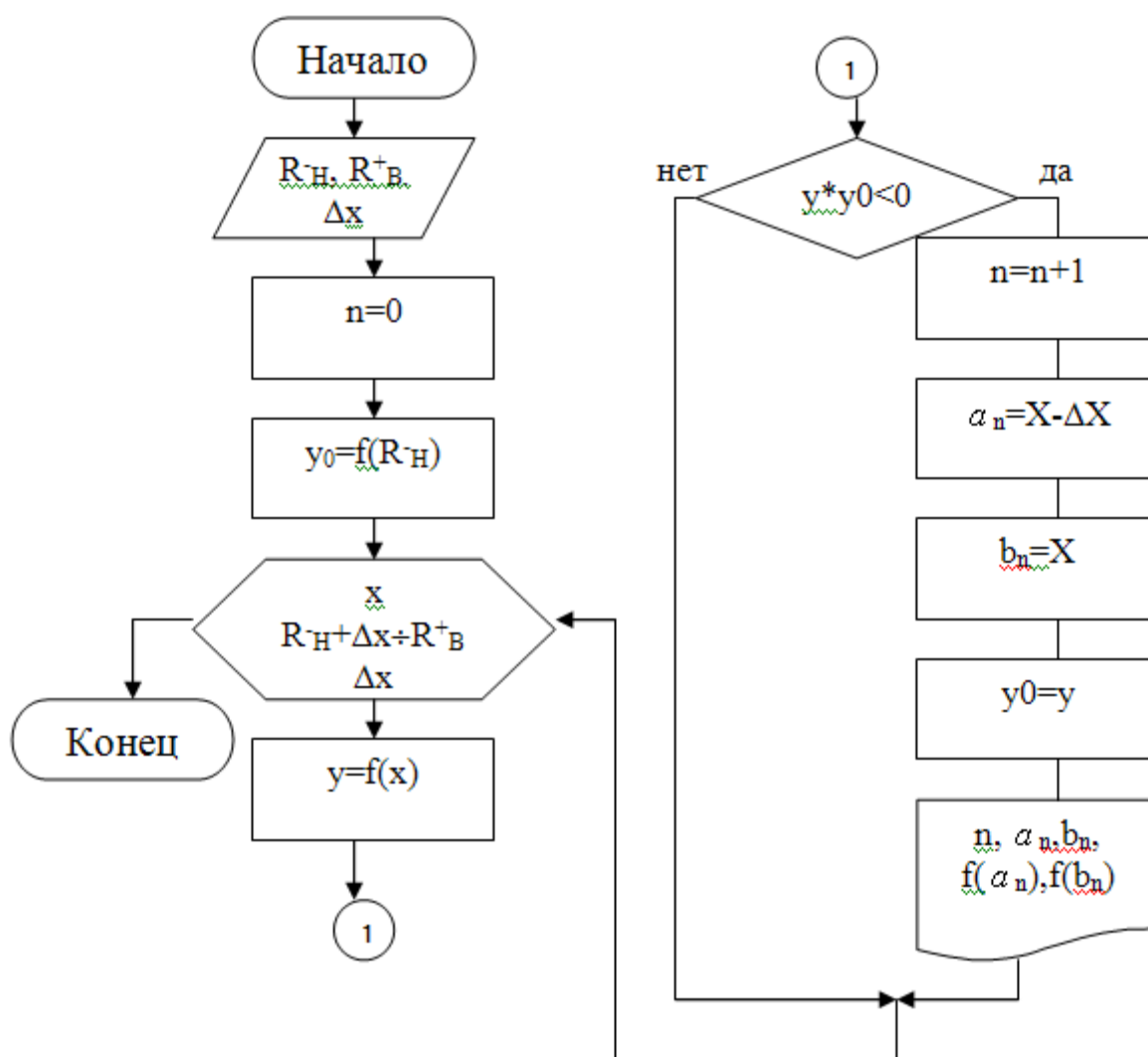


Рисунок 8.1 – Отделение корней алгебраических уравнений

Наиболее распространенными методами уточнения корней являются метод Бисекций, хорд, касательных и простой итерации.

9.1.1 Метод Бисекций.

Метод Бисекций, или метод половинного деления, состоит в последовательном делении отрезка, который содержит корень, пополам:

$$x = \frac{a + b}{2}, \quad (9.1)$$

где a и b - левая и правая границы корня, то есть

$$b > a, \quad (9.2)$$

$$f(a) * f(b) < 0. \quad (9.3)$$

Для каждого следующего деления выбирается та половина отрезка, на концах которой функция имеет противоположный знак. При этом интервал существования корня суживается за счет изменения одного из его границ: левой ($a = x$) или правой ($b = x$).

Итерационный процесс деления заканчивается при выполнении условия:

$$b - a \leq \varepsilon, \quad (9.4)$$

где ε - заданная точность вычисления корня. Иногда требуют, чтобы одновременно с (9.4) выполнялось условие:

$$|f(x)| \leq \varepsilon. \quad (9.5)$$

Метод половинного деления - простой и надежный способ поиска простых корней уравнения $f(x)=0$. Он совпадает для любых непрерывных функций $f(x)$, в том числе тех, что не дифференцируемые. Скорость совпадения небольшая. Для достижения точности необходимо избавиться от ε

$$N \approx \log_2((b-a)/\varepsilon) \quad (9.6)$$

итераций. Это означает, что для получения каждых 3 правильных десятичных знаков необходимо сделать около 10 итераций.

Если на отрезке $[a, b]$ находиться несколько корней, то процесс совпадает к одному из них. Метод не применяется для нахождения кратных корней парного порядка.

9.1.2 Метод хорд.

Метод хорд, или метод пропорциональных частей состоит в последовательном разделении отрезка $[a, b]$, что содержит корень, на частицы, пропорциональные значениям функции на концах отрезка:

$$\frac{f(a)}{f(b)} = \frac{a - x}{b - x}, \quad (9.7)$$

Откуда

$$x = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}. \quad (9.8)$$

Геометрически это эквивалентно замене графика функции $f(x)$ хордой, которая проходит через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Для завершения интеграционного процесса вместо условия (9.4) используют условие

$$|x_{i+1} - x_i| \leq \varepsilon, \quad (9.9)$$

где x_{i+1} , x_i - последнее вычисление и предыдущее ему приближение корня соответственно. Этот метод аналогичный методу Бисекций, но обеспечивает более быструю сходимость.

9.1.3 Метод касательных.

Метод касательных, или метод Ньютона, состоит в последовательной аппроксимации функции $f(x)$ касательными к кривой в точке предыдущего приближения $(x_i, f(x_i))$, которые пересекают ось абсцисс в точке следующего приближения x_{i+1} , определяем по формуле

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}. \quad (9.10)$$

Последовательность (9.9) сходиться к действительному значению корня уравнения $f(x)=0$, если начальное приближение корня принадлежит интервалу $[a, b]$ ($f(a) \cdot f(b) < 0$), на котором производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют свой знак и удовлетворено условие

$$f(x_0) \cdot f'(x_0) > 0. \quad (9.11)$$

Интеграции прекращают при выполнении условий (9.9) и (или) (9.5).

Метод Ньютона эффективен, если известно хорошее начальное приближение для корня, и в окрестности корня график функции имеет большую крутизну. В благоприятных случаях число верных десятичных знаков в

очередном приближении удваивается, то есть процесс сходиться очень быстро.

Недостатком метода касательных является необходимость рассчитать в каждой точке не только значения функции, но и значение производной.

9.1.4 Метод простой итерации.

Метод простых итераций состоит в замене исходного уравнения $f(x)=0$ эквивалентным ему уравнением:

$$x=\varphi(x) \quad (9.12)$$

и исчислении последовательности

$$x_{i+1}=\varphi(x_i) \quad (9.13)$$

($i=1, 2, 3, \dots$), который сходиться при $i \rightarrow \infty$ к точному решению .

Итерации прекращают при выполнении условия:

$$|x_{i+1}-x_i| \leq \varepsilon. \quad (9.14)$$

Достаточным и необходимым условием сходимости метода является:

$$|\varphi'(x)| < 1. \quad (9.15)$$

Скорость сходимости увеличивается с уменьшением $|\varphi'(x)|$.

9.2 Задание.

Вычислить первый позитивный корень трансцендентного уравнения из таблицы 7.1 и все действительные корни алгебраического уравнения из таблицы 8.1 указанными в таблицах методами с точностью 10^{-4} , 10^{-5} и 10^{-6} .

9.3 Методические рекомендации.

Интервалы $[a, b]$ для каждого корня или начальные приближения корней x_0 определите, воспользовавшись результатами работ 7 и 8.

Прежде, чем использовать методы касательных или простой итерации, проверьте их сходимость.

При отладке выводите на экран результаты вычислений в каждой итерации.

Для контроля правильности решения выводите на экран не только последовательные приближения корней, но и значения функции $f(x)$ в этих точках.

Оценить скорость сходимости разных методов.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

10.1 Теоритические ведомости

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (10.1)$$

10.1.1 Метод простых итераций

[illegible]
$$\vec{X}^{[0]} = (x_1^{[0]}, x_2^{[0]}, \dots, x_n^{[0]}), \quad (10.3)$$
[illegible]

где $k=1,2,3,\dots$, - номер итерации.

Итерации прекращают при достижении условия

$$\max_i |x_i^{[k]} - x_i^{[k-1]}| \leq \varepsilon, \quad (10.5)$$

где ε - допустимая ошибка результатов.

Достаточные условия сходимости итерационного процесса имеют вид:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_j(x_1^{[0]}, x_2^{[0]}, \dots, x_n^{[0]})}{\partial x_i} < 1, \quad (10.6)$$

или

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i(x_1^{[0]}, x_2^{[0]}, \dots, x_n^{[0]})}{\partial x_j} < 1.$$

Они должны выполняться для всех значений i ($i = 1, 2, \dots, n$).

10.1.2 Метод Зейделя

Метод Зейделя отличается от метода простых итераций только формулами уточнения корней:

$$\begin{cases} x_1^{[k]} = \phi_1(x_1^{[k-1]}, x_2^{[k-1]}, \dots, x_n^{[k-1]}) \\ x_2^{[k]} = \phi_2(x_1^{[k]}, x_2^{[k-1]}, \dots, x_n^{[k-1]}) \\ x_n^{[k]} = \phi_n(x_1^{[k]}, x_2^{[k]}, \dots, x_n^{[k-1]}) \end{cases} \quad (10.7)$$

В большинстве случаев он обеспечивает более быструю сходимость итерационного процесса.

10.1.3 Метод Ньютона

Метод Ньютона является производным от метода дотических для одного уравнения.

Вектор увеличения корней $\Delta \vec{X}$ на каждом шагу итерационного процесса определяется путем решения системы n линейных уравнений с n неизвестными:

$$W^{[k-1]} \cdot \Delta \vec{X} = -\vec{F}(\vec{X}^{[k-1]}), \quad (10.8)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \end{cases}$$

где:

$$W^{[k-1]} \cdot \Delta \vec{X} = -\vec{F}(\vec{X}^{[k-1]}), \quad (10.8)$$

$$W = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (10.9)$$

Матрица Якоби;

$\vec{F}(\vec{X})$ - вектор правых частей исходной системы уравнений (10.1).

Уточнение корней выполняют по формуле :

$$\vec{X}^{[k]} = \vec{X}^{[k-1]} + \Delta \vec{X}. \quad (10.10)$$

Итерации прекращают при выполнении условия (10.5). Для более жесткого контроля можно вместе с условием (10.5) проверять условие:

$$\max_i |f_i(x_1^{[k]}, x_2^{[k]}, \dots, x_n^{[k]})| \leq \varepsilon \quad (10.11)$$

10.2 Задание

Решить систему нелинейных уравнений с начальными приближениями из таблицы заданным методом.

10.3 Методические рекомендации

1. Отметьте в исходной схеме уравнений переменные одним именем с различными индексами.

2. Убедитесь, что выполняются условия сходимости при заданных начальных приближениях.

3. При решении системы нелинейных уравнений методом Ньютона удобно составить подпрограммы для вычисления матрицы Якоби, разрешения системы линейных уравнений, разрешения системы нелинейных уравнений. В основном модули организуйте ввода начальных приближений, обращение к подпрограмме разрешения системы нелинейных уравнений, вывода результатов расчета.

4. При решении системы методами Зейделя и простых итераций удобно составить подпрограмму для вычисления.

Таблица 10.1 – Задание к лабораторной работе №10

№ п/п	Система уравнений	Метод	Начальные приближения
1	2	3	4
1	$2x + \operatorname{tg} xy = 0$ $(y^2 - 7,5)^2 - 15x = 0$	Простых итераций	$x_0 = 3$ $y_0 = 0$
2	$\operatorname{tg} x - \cos 1,5y = 0$ $2y^3 - x^2 - 4x - 3 = 0$	Зейделя	$x_0 = 0$ $y_0 = 1$
3	$10x^2 + 9y^2 - 1 = 0$ $\sin(3,2x + 0,3y) + 3x = 0$	Ньютона	$x_0 = 0$ $y_0 = 0,5$
4	$\cos y + 2x = 0$ $0,24x + 3,5y + x^2y = 0$	Зейделя	$x_0 = 0$ $y_0 = 0$
5	$\sin(x + 0,4) + 3,5y - 1,5 = 0$ $\cos(y + 0,2) + 0,5x = 0$	Простых итераций	$x_0 = -1,3$ $y_0 = 0,5$
6	$\sin(3,3x - 0,4y) + 4x = 0$ $8x^2 + 25y^2 - 1 = 0$	Ньютона	$x_0 = 0$ $y_0 = 0,5$
7	$0,16x + 2,1y + x^2y = 0$ $\cos y + x = 0$	Зейделя	$x_0 = -1$ $y_0 = 0$
8	$2,1y^3 - x^2 - 4x - 3 = 0$ $\operatorname{tg} 2x - \cos 2y = 0$	Зейделя	$x_0 = 0$ $y_0 = 1$
9	$(y^2 - 7,5) - 15x = 0$ $\operatorname{tg} xy + 2x = 0$	Простых итераций	$x_0 = 3$ $y_0 = 0$
11	$\operatorname{tg} xy + 6x = 0$ $-120x + (y^2 - 20)^2 = 0$	Простых итераций	$x_0 = 3$ $y_0 = -0,5$
12	$0,9x + \cos(y + 1,6) = 0$ $0,1 - 2y + \sin(x + 1,8) = 0$	Простых итераций	$x_0 = 0,5$ $y_0 = 0,4$
13	$\cos(y + 0,6) + 0,6x = 0$ $\sin(x + 0,8) + 2y - 1 = 0$	Простых итераций	$x_0 = -0,8$ $y_0 = 0,5$
14	$\operatorname{tg} 4x - \cos 3y = 0$ $2,3y^3 - x^2 - 4x - 3 = 0$	Зейделя	$x_0 = 0$ $y_0 = 1$
15	$2,2y^3 - x^2 - 4x - 3 = 0$ $\operatorname{tg} 3x - \cos 2,5y = 0$	Зейделя	$x_0 = 0$ $y_0 = 1$
16	$5x + \operatorname{tg} xy = 0$ $(y^2 - 1,5)^2 - 7,5x = 0$	Ньютона	$x_0 = 0,6$ $y_0 = -2$
17	$0,5y - 0,5 + \sin(x + 1,2) = 0$ $0,7x + \cos(y + 0,8) = 0$	Ньютона	$x_0 = -1$ $y_0 = 0$
18	$\sin(x + 2,1) - 3y + 0,4 = 0$ $\cos(y + 1,8) + 1,2x = 0$	Простых итераций	$x_0 = 0,4$ $y_0 = 0,5$
19	$4,9y + 0,32x + x^2y = 0$ $\cos y + 3x = 0$	Простых итераций	$x_0 = 0$ $y_0 = 0$

Продолжение таблицы 10.1

1	2	3	4
20	$(y^2-5)^2-20x=0$ $tg\ xy+4x=0$	Ньютона	$x_0=0,3$ $y_0=-2,8$
21	$\sin(4x-0,5y)+5x=0$ $7x^2+30y^2-1=0$	Ньютона	$x_0=0$ $y_0=0,5$
22	$tg\ 6x-\cos\ 4y=0$ $2,5y^3-x^2-4x-3=0$	Простых итераций	$x_0=0$ $y_0=1$
23	$6x+tg\ xy=0$ $(y^2-2)^2-12x=0$	Ньютона	$x_0=0,5$ $y_0=-2$
24	$\sin(3,1x+0,2y)+2x=0$ $12x^2+5y^2-1=0$	Ньютона	$x_0=0$ $y_0=0,5$
25	$\cos y+5x=0$ $0,48x+6,7y+x^2y=0$	Зейделя	$x_0=0$ $y_0=0$
26	$tg\ 5x-\cos\ 3,5y=0$ $2,4y^3-x^2-3-4x=0$	Зейделя	$x_0=0$ $y_0=1$
27	$14x^2+3y^2-1=0$ $\sin(3x+0,1y)+x=0$	Ньютона	$x_0=0$ $y_0=0,5$
28	$0,6x+7,5y+x^2y=0$ $\cos y+6x=0$	Простых итераций	$x_0=0$ $y_0=0$
29	$\sin(x+1,6)-1=0$ $\cos(y+1,2)+0,8x=0$	Простых итераций	$x_0=0,5$ $y_0=0,8$
30	$4x^2+35y^2-1=0$ $\sin(4,2x-0,6y)+6x=0$	Ньютона	$x_0=0$ $y_0=0,5$

Лабораторная работа 11

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: научиться разрешения численными методами обычные линейные дифференциальные уравнения с начальными условиями и ИХ системы.

11.1 Теоретические сведения

Разрешения дифференциальных уравнений составляет фундамент математического моделирования различных устройств, процессов, систем.

В электротехники и производных от нее дисциплинах разрешения дифференциальных уравнений используется при расчете переходных процессов.

Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го типа порядка имеет вид:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (11.1)$$

где x - независимая переменная;

$y(x)$ - неизвестная функция независимой переменной,

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} - \text{ее производные.}$$

Для определения скрытого отдельного решения (11.1) должны быть известны n начальных условий:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}_0, \quad (11.2)$$

Численное решение дифференциального уравнения состоит в определении таблицы значений $y_i(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, k$) на некотором интервале $[x_0, x_k]$.

Разницу между двумя соседними табличными значениями аргумента называют шагом интегрирования:

$$h = x_{i+1} - x_i \quad (11.3)$$

К числу наиболее распространенных численных методов решения дифференциальных уравнений относятся методы Рунге-Кутты. Методы Рунге-Кутты согласуются с разложением функции $y(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_i до членов, содержащих h^p

$$y_{i+1} \approx y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2!} y''_i + \dots + \frac{h^p}{p!} y^{(p)}_i. \quad (11.4)$$

Показатель степени p при h в последнем члене, который был суммирован, в ряде Тейлора определяет порядок метода. Метод Рунге-Кутты первого порядка называют методом Эйлера второго порядка - модифицированным методом Эйлера, или методом Эйлера-Коши. Методы более высоких порядков не имеют специальных названий. Для использования методов Рунге-Кутты необходимо исходное дифференциальное уравнение (11.1) преобразовать в систему n дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме Коши:

[illegible]

$$y_1(x_0)=y_{10}, y_2(x_0)=y_{20}, \dots, y_n(x_0)=y_{n0} \quad (11.6)$$

Вспомогательные переменные y_1, y_2, \dots, y_n и их начальные условия в процессе преобразования однозначно связываются с неизвестной функцией y и ее производными. В соответствии с методом Эйлера один шаг решения системы дифференциальных уравнений (11.5) с начальными условиями (11.6) выполняется по формуле:

$$y_i(x+h) = y_i(x) + hf_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad \forall i=1, 2, \dots, n \quad (11.7)$$

Метод Эйлера-Коши требует вычисления вектора производных (правых частей дифференциальных уравнений) в двух точках: $\vec{F}(x, \vec{y})$ в двух точках:

$$\begin{cases} K1i = f_i(x, y1, y2, \dots, y_n) \\ K2i = f_i(x+h, y1+hK11, y2+h12, \dots, y_n+hK_{1n}) \end{cases} \quad (11.8)$$

$$y_i(x+h) = y_i(x) + \frac{h}{2}(K_{1i} + K_{2i}). \quad (11.9)$$

Соответственно при использовании метода Рунге-Кутты четвертого порядка вектор производных на каждом шагу численного интегрирования исчисляется четыре раза:

$$\begin{cases} \vec{K}_1 = \vec{F}(x, \vec{y}(x)), \\ \vec{K}_2 = \vec{F}(x + \frac{h}{2}, \vec{y}(x) + \frac{h}{2} \vec{K}_1), \\ \vec{K}_3 = \vec{F}(x + \frac{h}{2}, \vec{y}(x) + \frac{h}{2} \vec{K}_2), \\ \vec{K}_4 = \vec{F}(x + h, \vec{y}(x) + h \vec{K}_3); \end{cases} \quad (11.10)$$

$$\vec{y}(x+h) = \vec{y}(x) + \frac{h}{6} (\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + 2\vec{K}_3 + \vec{K}_4). \quad (11.11)$$

Вычисление по приведенным выше формулам продолжают до тех пор, пока не будет достигнут конец интервала $[x_0, x_k]$.

Погрешность методов Рунге-Кутты определяется выражением:

$$\varepsilon \approx K \cdot h^p \quad (11.12)$$

Величина коэффициента K зависит от системы, которая решается.

11.2 Задание

Решить систему дифференциальных уравнений с начальными условиями из таблицы 11.1 в заданном интервале с заданным шагом, используя метод Эйлера-Коши (нечетные варианты) или метод Рунге-Кутты четвертого порядка (четные варианты). Сравнить результаты.

11.3 Методические рекомендации

1. Отметьте в исходной системе уравнений зависимые переменные одним именем с различными индексами (например, $y = y1, z = y2$).
2. Выделить в отдельные подпрограммы вычисления вектора производных при заданных значениях x и \vec{y} и один шаг численного интегрирования системы дифференциальных уравнений с данным методом.
3. В основном модуле организовать ввод исходных данных (x_0, x_k, h, n , начальные условия) и итерационный цикл по независимой переменной x , внутри которого вызываете подпрограмму заданного метода и выводите результаты (в виде таблицы или графика).
4. Для контроля работы программы решить сначала тестовую систему дифференциальных уравнений второго порядка, для которых известно аналитическое решение. Сравните результаты численного и аналитического решений.

Таблица 11.1 – задание к лабораторной работе №11

№ п/п	Дифференциальные уравнения	Параметры	Интервал	Шаг	Начальные условия
1	2	3	4	5	6
1,2	$\begin{cases} x' = \cos(x + ay) + b \\ y' = \frac{a}{t + bx^2} + t + 1 \end{cases}$	$\begin{aligned} a &= 2,5 \\ b &= 3,0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} t_H &= 0 \\ t_K &= 0,3 \end{aligned}$	$\begin{aligned} h_t &= 0,0 \\ 2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x(0) &= 1 \\ y(0) &= 0,05 \end{aligned}$
3,4	$\begin{cases} x' = \sin(ax)^2 + t + y \\ y' = t - x - by^2 + 1 \end{cases}$	$\begin{aligned} a &= 2,0 \\ b &= 3,5 \end{aligned}$	$\begin{aligned} t_H &= 0 \\ t_K &= 0,3 \end{aligned}$	$\begin{aligned} h_t &= 0,0 \\ 2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x(0) &= 1 \\ y(0) &= 0,5 \end{aligned}$
5,6	$\begin{cases} x' = \sqrt{t^2 + ax^2} + y \\ y' = \cos(by) + x \end{cases}$	$\begin{aligned} a &= 2,5 \\ b &= 3,5 \end{aligned}$	$\begin{aligned} t_H &= 0 \\ t_K &= 0,15 \end{aligned}$	$\begin{aligned} h_t &= 0,0 \\ 1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x(0) &= 0,5 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$
7,8	$\begin{cases} x' = e^{-(x^2+y^2)} + at \\ y' = bx^2 + y \end{cases}$	$\begin{aligned} a &= 2,0 \\ b &= 4,5 \end{aligned}$	$\begin{aligned} t_H &= 0 \\ t_K &= 0,28 \end{aligned}$	$\begin{aligned} h_t &= 0,02 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x(0) &= 0,5 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$
9,10	$\begin{cases} x' = \ln(bt + \sqrt{a^2t^2 + y^2}) \\ y' = \sqrt{a^2t^2 + x^2} \end{cases}$	$\begin{aligned} a &= 3,0 \\ b &= 2,5 \end{aligned}$	$\begin{aligned} t_H &= 0 \\ t_K &= 0,18 \end{aligned}$	$\begin{aligned} h_t &= 0,01 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x(0) &= 1 \\ y(0) &= 0,5 \end{aligned}$
11,1 2	$\begin{cases} y' = -yz - \frac{\sin x}{x} \\ z' = -z^2 - \frac{\alpha x}{1 + x^2} \end{cases}$	$\begin{aligned} \alpha &= 2,5 + \frac{\beta}{40} \\ \beta &= 25 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x_H &= 0 \\ x_K &= 1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} h_x &= 0,1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ z(0) &= -0,4 \end{aligned}$
13,1 4	$\begin{cases} y' = z - (\alpha y - \beta z)y \\ z' = e^y - (y + \alpha z)y \end{cases}$	$\begin{aligned} \beta &= 0,25n \\ \alpha &= \beta + 2 \\ n &= 4 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x_H &= 0 \\ x_K &= 1,2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} h_x &= 0,1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ z(0) &= 0 \end{aligned}$
15,1 6	$\begin{cases} y' = \cos(y + az) + c \\ z' = \frac{a}{x + cy^2} + 1 + x \end{cases}$	$\begin{aligned} a &= 2,0 \\ c &= 4,5 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x_H &= 0 \\ x_K &= 0,3 \end{aligned}$	$\begin{aligned} h_x &= 0,0 \\ 2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ z(0) &= 0,05 \end{aligned}$
17,1 8	$\begin{cases} y' = z + \sin(\alpha y^2) + x \\ z' = x + y - \beta z^2 + 1 \end{cases}$	$\begin{aligned} \alpha &= 2,5 \\ \beta &= 3,0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x_H &= 0 \\ x_K &= 0,3 \end{aligned}$	$\begin{aligned} h_x &= 0,0 \\ 2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ z(0) &= 0,5 \end{aligned}$
19,2 0	$\begin{cases} y' = z + \sqrt{x^2 + ky^2} \\ z' = y + \cos(nz) \end{cases}$	$\begin{aligned} k &= 2 \\ n &= 4 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x_H &= 0 \\ x_K &= 0,28 \end{aligned}$	$\begin{aligned} h_x &= 0,0 \\ 2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} y(0) &= 0,5 \\ z(0) &= 1 \end{aligned}$
21,2 2	$\begin{cases} y' = cx + e^{-(y^2+z^2)} \\ z' = dy^2 + z \end{cases}$	$\begin{aligned} c &= 2 \\ d &= 4,5 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x_H &= 0 \\ x_K &= 0,18 \end{aligned}$	$\begin{aligned} h_x &= 0,0 \\ 1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ z(0) &= 0,5 \end{aligned}$
23,2 4	$\begin{cases} y' = \ln(\sqrt{k^2x^2 + z^2} + cx) \\ z' = \sqrt{(kx)^2 + y^2} \end{cases}$	$\begin{aligned} k &= 3 \\ c &= 2,5 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x_H &= 0 \\ x_K &= 0,3 \end{aligned}$	$\begin{aligned} h_x &= 0,0 \\ 2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} Y(0) &= 1 \\ z(0) &= 0,5 \end{aligned}$

Лабораторная работа 12

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Цель работы: научиться определять значения функций, которые заданы в виде таблицы, при любых значениях аргументов с помощью интерполяции функций ступенчатыми многочленами.

12.1 Теоретические сведения

В науке и технике много функциональных зависимостей задаются не аналитически, а в виде графиков или таблиц.

В ЭВМ информация о таких функциях вводится в виде массивов, например:

$$y_i = f(x_i), \quad (12.1)$$

$$i=0, 1, \dots, n \quad (12.2)$$

Задача интерполяции заключается в нахождения приближенного значения линейной функции y в точках, отличаются от узлов ($x \neq x_i$).

Эту задачу можно решить, если найти функцию $F(x)$, которая интерполирует, что принимает на некотором интервале $[x_j, x_j + k]$ значения, совпадающие со значениями табличной функции (12.1) в узловых точках:

$$F(x_j) = y_j, \dots, F(x_{j+1}) = y_{j+1}, \dots, F(x_{j+k}) = y_{j+k}. \quad (12.3)$$

Точку x_j называют начальным узлом интерполяции.

Очень часто в качестве функции, интерполирует, используют алгебраический полином:

$$P_k(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k, \quad (12.4)$$

$$k \leq n \quad (12.5)$$

При $k = n$ многочлен (12.4) становится глобальным интерполантом, так как в этом случае его значения совпадают со значениями исходной функции во всех узлах ($j = 0, j + k = n$).

Если табличная функция заданной в равномерно расположенных узлах, то есть:

$$x_{i+1} - x_i = h = \text{const} \quad (12.6)$$

то значение $y(x)$ можно определить по первой интерполиционной формуле Ньютона:

$$y(x) \approx P_k(x) = y_j + q\Delta y_j + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_j + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-k+1)}{k!}\Delta^k y_j, \quad (12.7)$$

где

$$q = \frac{x - x_j}{h} \quad (12.8)$$

$\Delta y_j, \Delta^2 y_j, \dots, \Delta^k y_j$ - прямые разницы соответствующих порядков в начальном узле.

Если узлы табличной функции расположены неравномерно ($x_{i+1} - x_i = \text{var}$), то значение $y(x)$ можно определить по интерполяционной формуле Лагранжа:

$$y(x) \approx L_k(x) = \sum_{m=j}^{j+k} y_m \frac{(x - x_j)(x - x_{j+1})\dots(x - x_{m-1})(x - x_{m+1})\dots(x - x_{j+k})}{(x_m - x_j)(x_m - x_{j+1})\dots(x_m - x_{m-1})(x_m - x_{m+1})\dots(x_m - x_{j+k})}. \quad (12.9)$$

Формулы (12.8), (12.9) можно применять для нахождения $y(x)$ на интервале $[x_j, x_{j+k}]$, однако наибольшую точность они обеспечивают вблизи начального узла интерполяции x_j :

$$x \in [x_j, x_{j+1}]$$

Поэтому прежде, чем применять интерполяционные формулы, необходимо определить номер начального узла интерполяции. Условие выбора можно выразить следующим образом:

$$\begin{cases} 0 & \text{при } x < x_0 \\ j = n - k & \text{при } x > x_{n-k} \\ i & \text{при } x_i < x < x_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n - k \end{cases}$$

В технических расчетах обычно применяют линейную или квадратичную интерполяцию. В этом случае формулы (12.7) и (12.9) приобретают следующий вид:

при $k = 1$:

$$y(x) \approx P_1(x) = y_j + q(y_{j+1} - y_j), \quad (12.10)$$

$$y(x) \approx L_1(x) = y_j \frac{(x - x_{j+1})}{(x_j - x_{j+1})} + y_{j+1} \frac{(x - x_j)}{(x_{j+1} - x_j)}; \quad (12.11)$$

при $k = 2$:

$$y(x) \approx P_2(x) = y_j + q(y_{j+1} - y_j) + \frac{q(q-1)}{2}(y_{j+2} - 2y_{j+1} + y_j), \quad (12.12)$$

$$y(x) \approx L_2(x) = y_j \frac{(x - x_{j+1})(x - x_{j+2})}{(x_j - x_{j+1})(x_j - x_{j+2})} + y_{j+1} \frac{(x - x_j)(x - x_{j+2})}{(x_{j+1} - x_j)(x_{j+1} - x_{j+2})} + y_{j+2} \frac{(x - x_j)(x - x_{j+1})}{(x_{j+2} - x_j)(x_{j+2} - x_{j+1})} \quad (12.13)$$

Формулы (12.10) и (12.11) представляют собой уравнение прямой, проходящей через точки (x_j, y_j) и (x_{j+1}, y_{j+1}) , а (12.12) и (12.13) – уравнение квадратичной параболы, проходящей через точки $(x_j, y_j), (x_{j+1}, y_{j+1}), (x_{j+2}, y_{j+2})$.

12.2 Задание

Вычислить приближенные значения табличных функций, приведенных в таблице 12.1, для аргументов, меняются по таким законам:
для нечетных вариантов:

$$x = 10 \sin t, \quad t = 0.5, 0.6, \dots, 1.5;$$

для четных:

$$x = 10 \cos t, \quad t = 0.1, 0.2, \dots, 1.$$

В зависимости от расположения узлов применить квадратичную интерполяцию Ньютона или линейную Лагранжа. Правильность решения проверить графически

12.3 Методические рекомендации

1. Массивы табличных значений аргумента $\vec{X} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ функции $\vec{Y} = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ и текущие их значения x в программе должны быть обозначены разными идентификаторами, например:

$$\vec{X} \rightarrow XT, \quad \vec{Y} \rightarrow YT, \quad x \rightarrow X, \quad y \rightarrow Y.$$

2. После поиска номера начального узла интерполяции проверьте условие $x = x_j$. При его выполнении не используйте интерполяционных формул, а определяйте значения непосредственно из таблицы: $y = y_j$.

3. Для графической проверки выведите на экран графическом режиме табличную функцию и ее интерполированные значения в разной форме или

разном цвете. Например, функцию выводите в виде "решетки" (отрезки с координатами концов $(x_i, 0)$, (x_i, y_i) , $i=0, 1, \dots, n$), а интерполированные значения - в виде точек (x, y) или функцию - посредством ломаной кривой, состоит из отрезков с координатами (x_{i-1}, y_{i-1}) (x_i, y_i) , а интерполированные значения - в виде решетки.

Таблица 12.1 – Задание к лабораторной работе №12

№ п/п	Табличные функции									
1	2									
1,2	x_i	-1	1	3	5	7	9	11	13	15
	z_i	8,71	109,8	124,4	122,5	112,1	96,6	80,2	6,3	57,9
3,4	x_i	2	3,2	4,4	6,2	7,8	9,5	10,9	11,5	12,7
	w_i	19,9	22	30	42,1	65	99,5	120	126,8	133,4
5,6	x_i	-3,5	-1,5	0,5	2,5	4,5	6,5	8,5	10,5	12,5
	h_i	0,45	-3,09	-4,01	-3,9	-3	-1,62	-0,18	0,99	1,72
7,8	x_i	1,25	2,59	4,4	6,54	8,5	11,5	13,5	14,9	15
	P_i	3,0	5,0	7,0	8,5	9,3	9,9	10,6	11,2	11,64
9,10	x_i	-2	0	2	4	6	8	10	12	14
	f_i	7,84	7,13	6,31	5,29	4,03	2,5	0,87	-0,68	-0,79
11,12	x_i	-1,5	1	2,7	5,5	6,5	8,3	9,6	11,2	12,75
	U_i	2,45	1,12	-1	-2,1	-2,3	-1,9	-1	2	3,5
13,14	x_i	0,67	1,5	2,5	3,5	5	6,5	10	12,4	14
	S_i	110	118,7	124,5	125,2	122,5	115,1	88,3	70	61,2
15,16	x_i	0,5	2,5	4,5	6,5	8,5	10,5	12,5	14,5	16,5
	p_i	23,7	20,1	27,8	45,3	79,2	115,4	132,9	141,1	147
17,18	x_i	-2,77	-0,5	1	2	3,5	7	10	11,5	12,5
	z_i	-1,5	-3,65	-4,03	-4,0	-3,54	-1,58	0,73	1,4	1,83
19,20	x_i	0,5	2,0	3,5	5,0	6,5	8,5	9,5	11,0	12,5
	W_i	1,23	0,92	0,78	0,68	0,6	0,53	0,49	0,47	0,45
21,22	x_i	-1	1	3	5	7	9	11	13	15
	h_i	1,02	2,57	5,51	7,52	8,69	9,38	9,79	10,35	1,64
23,24	x_i	-3	0,5	1,5	2,5	4,3	6,2	7,7	9,0	11
	f_i	9,4	7,52	6,75	5,8	3,6	0,53	-1,5	-2,94	-4,4
25,26	x_i	-4	-2	0	2	4	6	8	10	12
	U_i	3,1	2,66	1,74	0,35	-1,26	-2,28	-2,07	-0,54	2,53
27,28	x_i	0	0,4	1,5	3,0	4,6	7	9,2	11,5	13
	S_i	1,47	1,26	0,99	0,82	0,7	0,57	0,5	0,46	0,44

Лабораторная работа 13

АППРОКСИМАЦИЯ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Цель работы: научиться описывать табличные функции аналитическими выражениями.

13.1 Теоритические сведения

Аппроксимация – это приближенное выражение каких-либо величин через другие, более простые величины.

Задача заключается в нахождении коэффициентов линейной зависимости, при которых функция двух переменных x_i и y_i принимает наименьшее значение. То есть, при заданных данных сумма квадратов отклонений экспериментальных данных от найденной прямой будет наименьшей.

Для упрощения изложения рассмотрим сначала случай линейной функции одного аргумента (рис. 13.1). Пусть из опыта получены точки x_1 и y_1 , x_2 и y_2 , x_n и y_n .

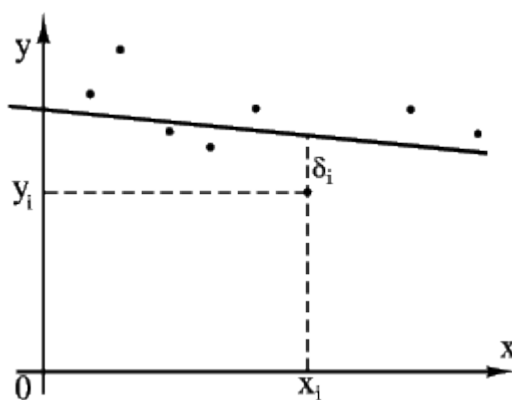


Рисунок 13.1 – Линейная функция одного аргумента

Чем меньше числа δ_i по абсолютной величине, тем лучше подобрана прямая. В качестве характеристики точности подбора прямой можно принять сумму квадратов.

Аппроксимация табличной функции:

$$y_i = f(x_i) \quad (13.1)$$

$$i=1, 2, \dots, n \quad (13.2)$$

Метод наименьших квадратов состоит в определении параметров некоторой аналитической функции $F(x)$, обеспечивающий минимизацию функционала (Φ):

$$\Phi = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - y_i)^2. \quad (13.3)$$

Чтобы при найденных x_i и y_i функция принимала наименьшее значение, необходимо чтобы в этой точке матрица квадратичной формы дифференциала второго порядка для функции была положительно определенной.

Таким образом, решение примера сводится к нахождению экстремума функции двух переменных.

Если в качестве аппроксимирующей функции выбран ступенчатый многочлен:

$$F(x) = P_k(x) = C_0 + C_1x + \dots + C_kx^k = \sum_{j=0}^k C_jx^j, \quad (13.4)$$

то задача сводится к определению вектора коэффициентов $\vec{C} = (C_0, C_1, \dots, C_k)$ путем решения системы линейных уравнений $(k+1)$ -го порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial C_0} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial C_1} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial C_k} = 0, \end{cases} \quad (13.5)$$

где:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^k C_j x_i^j - y_i \right)^2, \quad (13.6)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_m} = 2 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^k C_j x_i^j - y_i \right) x_i^m, \quad (13.7)$$

$$m=0, 1, \dots, k \quad (13.8)$$

После преобразований система (13.5) принимает вид:

$$\begin{cases} C_0 \cdot n + C_1 \sum_{i=1}^n x_i + \dots + C_k \sum_{i=1}^n x_i^k = \sum_{i=1}^n y_i, \\ C_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + C_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + C_k \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ C_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^k + C_1 \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} + \dots + C_k \sum_{i=1}^n x_i^{2k} = \sum_{i=1}^n x_i^k y_i. \end{cases} \quad (13.9)$$

Из системы (13.9) видно, что элементы матрицы коэффициентов A и вектора свободных членов \vec{B} можно описать формулами

$$\begin{cases} a_{mj} = \sum_{i=1}^n x_i^{m+j}, \\ b_m = \sum_{i=1}^n x_i^m y_i, \end{cases} \quad (13.10)$$

$$m = 0, 1, \dots, k,$$

$$j = 0, 1, \dots, k$$

После определения коэффициентов систему (13.9) можно решить любым из известных методов, например методом Гаусса и получаем формулы для нахождения коэффициентов по методу наименьших квадратов.

Аппроксимацию методом наименьших квадратов часто применяют для сглаживания табличных функций, полученных в результате эксперимента, а также для уменьшения объема информации о табличных функциях при невысоких требованиях к точности расчетов.

13.2 Задание.

Аппроксимировать табличную функцию, приведенную в табл. 12 ступенчатым многочленом k -го порядка методом наименьших квадратов. Для нечетных вариантов $k = 3$, для четных $k = 2$. Вычислить значение функционала, что минимизируется. Проиллюстрировать результаты графиками. Выполнить программу дважды при разном количестве табличных точек ($n=9$ и $n=5$). Оценить влияние количества точек на точность аппроксимации.

13.3 Методические рекомендации.

При использовании для решения системы уравнений (13.9) стандартных подпрограмм необходимо согласовать индексы стандартной системы уравнений (не содержит коэффициентов с нулевыми индексами) и системы (13.9). Согласование состоит в изменении формул. (13.10).

Лабораторная работа 14

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Цель работы: научиться вычислять на ЭВМ определенные интегралы от функций, заданных таблично и аналитически.

14.1 Теоретические сведения

Задачи, в которых нужно вычисления интегралов, возникают практически во всех областях прикладной математики.

Численные методы интегрирования основаны на том, что интервал $[a, b]$ разбивают на участки, на каждом из которых кривая, описываемая подинтегральной функцией $f(x)$, заменяется некоторой другой кривой, для которой вычисления интеграла выполняется достаточно простыми формулами, а затем все площади суммируются.

При замене подинтегральной функции полиномами, что интерполируют, получают так называемые. квадратурные формулы. Квадратурные формулы для равноудаленных узлов интерполяции называют формулами Ньютона-Котеса.

В зависимости от степени полинома интерполное, различают методы прямоугольников, трапеций и квадратичной трапеций, или метод Симпсона.

Основные формулы и показатели, характеризующие эти методы при разбивке интервала интегрирования на равные отрезки, приведены в табл. 14.1, где приняты следующие обозначения:

n - число участков разбивки,

$$h = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = \text{const} - \text{шаг интерггрирования},$$

$$y_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

$$x_0 = a, x_n = b, y_0 = f(a), y_n = f(b). \quad (14.1)$$

Погрешность методов определяется величиной интеграла от остаточного члена интерполяционного полинома. В формулах для оценки погрешности

M_i - максимальное значение n -й производной $\frac{d^i f(x)}{dx^i}$ на интервале $[a, b]$.

Таблица 14.1 – задание к лабораторной работе №14

Название метода	Степень полинома, который интерполирует	$z \approx \int_a^b f(x) dx$	Погрешность
-----------------	---	------------------------------	-------------

Прямоугольников	0	$h \cdot (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1})$	$\frac{M_1 h}{2} (b - a)$
-----------------	---	---	---------------------------

Продолжение таблицы 14.1

Трапеций	1	$h \cdot (\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})$	$\frac{M_2 h^2}{12} (b - a)$
Симпсона	2	$h \cdot (y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}))$	$\frac{M_4 h^4}{180} (b - a)$

При использовании метода Симпсона число участков разбивки обязательно должно быть четным ($n=2k$) и все участки должны быть одинаковыми ($h=const$). При неравномерной разбивке интервала интегрирования используют обычно методы прямоугольников и трапеций, для которых формулы численного интегрирования в этом случае приобретают вид:

- по методу прямоугольников,

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} y_i (x_{i+1} - x_i) \quad (14.2)$$

Метод прямоугольников – метод численного интегрирования функции одной переменной, заключающийся в замене подынтегральной функции на многочлен нулевой степени, то есть константу, на каждом элементарном отрезке. Если рассмотреть график подынтегральной функции, то метод будет заключаться в приближенном вычислении площади под графиком суммированием площадей конечного числа прямоугольников, ширина которых будет определяться расстоянием между соответствующими соседними узлами интегрирования, а высота – значением подынтегральной функции в этих узлах.

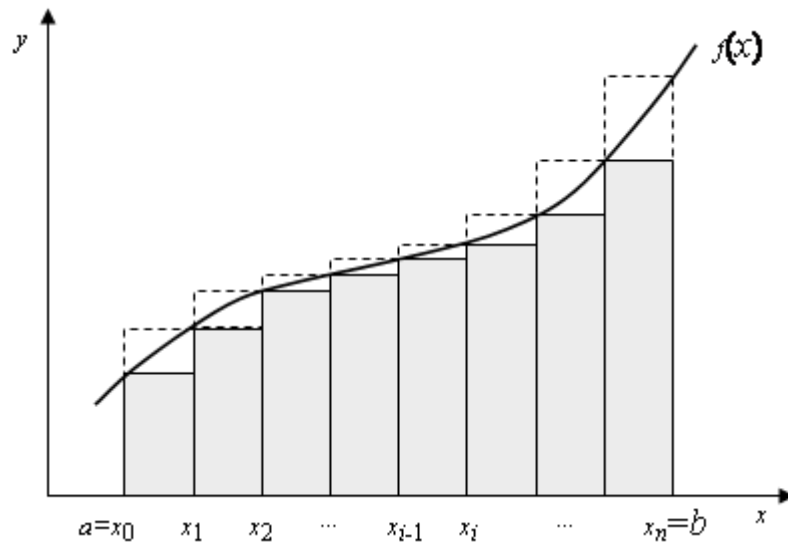


Рисунок 14.1 - Метод прямоугольников

- по методу трапеций,

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(y_{i+1} + y_i)}{2} (x_{i+1} - x_i) - \quad (14.3)$$

Метод трапеций – метод численного интегрирования функции одной переменной, заключающийся в замене на каждом элементарном отрезке подынтегральной функции на многочлен первой степени, то есть на линейную функцию. Площадь под графиком функции аппроксимируется прямоугольными трапециями

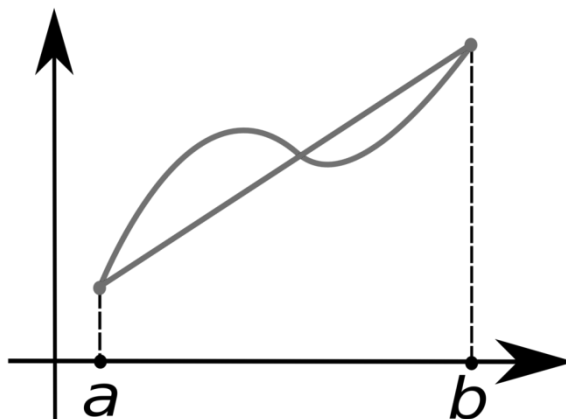


Рисунок 14.2 - Метод трапеций

Для обеспечения заданной точности интегрирования часто используют алгоритмы с автоматическим выбором шага (АВШ), в которых используют такой прием. Вычисляют значение интеграла одним из рассмотренных методов с некоторым начальным шагом h , а затем повторяют эти же вычисления с половинным шагом $\frac{h}{2}$. Если определится, что:

$$\left| z(h) - z\left(\frac{h}{2}\right) \right| \leq \varepsilon, \quad (14.4)$$

где \mathcal{E} - допустимая ошибка интегрирования, то вычислительный процесс прекращают, в противном случае подают к дальнейшему дроблению шага. Полученное таким методом приближенное значение интеграла можно уточнить, используя экстраполяционный переход к лимита, который был предложен Ричардсоном:

$$z \approx z\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{z\left(\frac{h}{2}\right) - z(h)}{2^k - 1} \quad (14.5)$$

где:

$$\begin{cases} 1 - \text{для метода прямоугольников} \\ k = 2 - \text{для метода трапеций} \\ 3 - \text{для метода Симпсона} \end{cases} \quad (14.1)$$

14.2 Задание

14.2.1 Интегрирование табличных функций

Рассчитать определенный интеграл от табличной функции, заданной в табл. 14.2. Непарные варианты используют метод трапеций при неравномерной разбивке интервала интегрирования и метод Симпсона - при равномерной, четные варианты в аналогичных ситуациях используют метод прямоугольников и метод трапеций соответственно.

14.2.2 Интегрирование функций, заданных аналитически

Вычислить определенный интеграл

$$z = \int_a^b f(x) dx$$

для функции, приведенной в табл. 14.2, на заданном интервале $[a, b]$ с заданной точностью \mathcal{E} , используя указанный в таблице метод с автоматическим выбором шага.

14.3 Методические рекомендации

Для визуального контроля результата постройте график подынтегральной функции и нанесите на него прямую, параллельную оси абсцисс, на уровне:

$$y_{cp} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$$

При правильном решении площадь, ограниченная подынтегральной кривой и прямыми $x=a$, $x=b$ и $y=0$, будет примерно равна площади прямоугольника, ограниченного отрезками прямых $y=y_{ср}$, $x=a$, $x=b$, $y=0$.

Таблица 14.2 – Исходные данные к лабораторной работе №14

№ п/п	Метод	ε	$f(x)$	a	b	Параметры
1	2	3	4	5	6	7
1	Прямоугольников	10^{-5}	$\frac{x}{1 + \sin x \cdot \cos \varphi}$	0	π	$\varphi = 0,182$
2	Симпсона	10^{-3}				
3	Трапечий	10^{-4}	$\frac{\cos^2 x}{c^2 \sin^2 x + d^2 \cos^2 x}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$c=0,953$ $d=2,295$
4	Прямоугольников	10^{-2}				

Продолжение таблицы 14.1

1	2	3	4	5	6	7
5	Трапечий	10^{-6}	$\frac{1}{c^2 + d^2 x}$	0	1	$c=3,18$ $d=-1,37$
6	Симпсона	10^{-3}				
7	Прямоугольников	10^{-2}	$\cos^m x \cdot \cos mx$	0	$\frac{\pi}{2}$	$m=3$
8	Трапечий	10^{-4}				
9	То же	10^{-5}	$\frac{x^5}{c^3 - x^3}$	0	1	$c=1,21$
10	Симпсона	10^{-3}				
11	Трапечий	10^{-2}	$\frac{1}{c \cdot \sin x + d \cdot \cos x}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$c=8,53$ $d=0,524$
12	Прямоугольников	10^{-4}				
13	Симпсона	10^{-5}	$\frac{x^2}{c^3 + x^3}$	0	1	$c=0,732$
14	Трапечий	10^{-3}				
15	Прямоугольников	10^{-4}	$\frac{1}{c^2 - 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos x + d^2}$	0	π	$c=3,76$ $d=8,39$
16	Трапечий	10^{-2}				
17	Симпсона	10^{-6}	$\frac{x \cdot e^{cx}}{(1 + cx)^2}$	0	1	$c=4,18$
18	Трапечий	10^{-3}				
19	То же	10^{-2}	$\frac{x}{c^2 + x^2}$	0	1	$c=0,874$
20	Прямоугольников	10^{-4}				
21	Симпсона	10^{-5}	$\frac{\ln(x + r)}{x^3}$	1	2	$r = \sqrt{x^2 + c^2}$ $c=2$
22	Трапечий	10^{-3}				

23	Прямоугольников	10^{-2}	$\sin \ln x$	1	5	
24	Симпсона	10^{-4}				
25	То же	10^{-5}	$\frac{1}{1 - c \sin x}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$c=0,5$
26	Трапечий	10^{-3}				

Лабораторная работа 15

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Цель работы: научиться определять гармоничный состав периодических функций.

15.1 Теоретические сведения

Функция времени $f(t)$ называется периодической, если к ней справедливо условие:

$$f(t) = f(t + m \cdot T), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (15.1)$$

где T - период.

Гармонический анализ периодических функций состоит в определении коэффициентов a_k и b_k , ряда Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos wkt + b_k \sin wkt), \quad (15.2)$$

где $w = \frac{2\pi}{T}$ – круговая частота первой гармоники;

k - порядковый номер гармоники.

Ограничившись в формуле (15.2) некоторой конечным количеством гармоник m , получают аппроксимирующий гармоничный многочлен $Q_m(t)$:

$$f(t) \approx Q_m(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k \cos wkt + b_k \sin wkt). \quad (15.3)$$

Коэффициенты Фурье определяются выражениями:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos wkt, \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin wkt. \end{aligned} \quad (15.4)$$

Используя для численного интегрирования в формулах (15.4) метод прямоугольников при разбивке интервала интегрирования $[0, T]$ на n равных отрезков, получим:

$$\begin{cases} a_0 \approx \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i, \\ a_k \approx \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cos \frac{2\pi ki}{n}, \\ b_k \approx \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \sin \frac{2\pi ki}{n}, \\ k=1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad (15.5)$$

$$y_i = f(t_i), \quad (15.6)$$

$$t_i = i\Delta t, \quad (15.7)$$

$$\Delta t = \frac{T}{n}. \quad (15.8)$$

При

$$n=2k \quad (15.10)$$

Гармоничным синтезом называется получения периодической функции путем суммирования ее гармонических составляющих по формуле (15.3).

15.2 Задание

Рассчитать коэффициенты интерполирующего тригонометрического многочлена, что аппроксимирующую табличную функцию из таблицы, заданную в точках

$$t_i = \frac{2\pi}{n} i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

при $n = 20$.

Построить график функции, которая интерполирует, и нанести на него исходную табличную функцию в виде решетки.

15.3 Методические рекомендации

Все вышеперечисленные функции являются периодическими функциями с периодом 2π . Каждый член тригонометрического ряда Фурье является периодической функцией с периодом 2π . Поэтому и любая частичная сумма ряда Фурье 2π - периодична.

Отсюда следует, что если ряд Фурье сходится на отрезке $[-\pi; \pi]$, то он сходится на всей числовой прямой и его сумма, будучи пределом последовательности периодических частичных сумм, является периодической функцией с периодом 2π .

Вышеупомянутое свойство видно на графике внизу (рис. 15.1): здесь график суммы ряда для функции $f(x) = x$. Вне отрезка $[-\pi; \pi]$ сумма ряда является периодическим продолжением данной функции, то есть график функции бесконечно повторяется справа и слева.

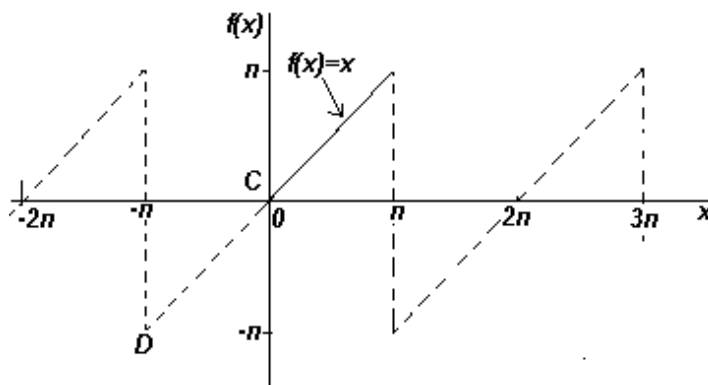


Рисунок 15.1 - Периодическая функция ряда Фурье

Для наглядности плотность точек на графике аппроксимирующей функции должна в 5-10 раз превышать плотность точек, разбивают период на отрезки для численного интегрирования.

Проследите, как влияет количество гармоник m при заданном количестве отрезков разбиения n на точность аппроксимации.

Таблица 15.1 – Исходные данные к лабораторной работе №15

№ п/п.	Табличные значения функции
1	2
1	1.00, 1.803, 3.085, 4.776, 6.434, 7.347, 7.027, 5.652, 3.897, 2.381, 1.347, 7.422, 0.419, 0.256, 0.176, 0.142, 0.136, 0.155, 0.209, 0.324, 0.554
2	7.38, 6.76, 5.22, 3.47, 2.07, 1.16, 0.64, 0.36, 0.23, 0.16, 0.13, 0.13, 0.16, 0.23, 0.37, 0.64, 1.16, 2.08, 3.48, 5.22, 6.76
3	-1.24, -1.17, -1.08, -0.96, -0.84, -0.79, -0.8, -0.9, -1.1, -1.21, -1.02, -1.28, -1.32, -1.34, -1.36, -1.37, -1.37, -1.36, -1.35, -1.33, -1.30
4	-3.0, -3.58, -4.12, -4.56, -4.86, -4.99, -4.94, -4.73, -4.36, -3.86, -3.30, -2.7, -2.13, -1.64, -1.26, -1.05, -1.00, -1.13, -1.43, -1.87, -2.43
5	1.0, 1.05, 90.6, 520.4, 1714.7, 2915.0, 2439.2, 1020.6, 230.7, 32.17, 3.29, 0.3, 0.03, 0.004, 0.001, 0.0003, 0.0006, 0.002, 0.01, 0.09, 0.9
6	2980.1, 2089.3, 742.4, 146.6, 18.6, 1.8, 0.16, 0.02, 0.003, 0.001, 0.001, 0.001, 0.002, 0.003, 0.018, 0.9, 1.22, 18.6, 146.6, 742.5, 2089.7
7	1.0, 1.34, 1.75, 2.18, 2.53, 2.71, 2.65, 2.37, 1.97, 1.54, 1.16, 0.86, 0.64, 0.5, 0.42, 0.37, 0.36, 0.39, 0.45, 0.56, 0.74
8	2.71, 2.6, 2.28, 1.86, 1.44, 1.07, 0.8, 0.46, 0.42, 0.4, 0.37, 0.37, 0.4, 0.48, 0.6, 0.8, 1.07, 1.44, 1.86, 2.28, 2.6
9	-1.32, -1.28, -1.26, -1.24, -1.25, -1.25, -1.25, -1.26, -1.27, -1.29, -1.29, -1.33, -1.34, -1.37, -1.37, -1.37, -1.37, -1.36, -1.36, -1.35, -1.34

Продолжение таблицы 15.1

10	-4.0, -4.2, -4.5, -4.7, -4.9, -5.0, -4.9, -4.8, -4.6, -4.4, -4.1, -3.8, -3.5, -3.1, -3.0, -3.0, -3.0, -3.1, -3.2, -3.4, -3.7
11	1.0, 2.4, 5.4, 10.4, 16.3, 19.9, 18.6, 13.4, 7.7, 3.6, 1.6, 0.64, 0.27, 0.13, 0.07, 0.05, 0.05, 0.06, 0.09, 0.18, 0.4
12	20.0, 17.5, 11.9, 6.4, 2.9, 1.2, 0.5, 0.2, 0.1, 0.06, 0.05, 0.05, 0.06, 0.1, 0.5, 1.0, 1.2, 2.9, 6.4, 11.9, 17.5
13	-1.1, -0.8, -0.3, 0.3, 0.7, 0.8, 0.7, 0.5, 0.04, -0.6, -0.9, 1.1, -1.27, -1.32, -1.35, -1.37, -1.37, -1.36, -1.34, -1.3, -1.2
14	-2.0, -2.8, -3.7, -4.3, -4.7, -4.9, -4.9, -4.5, -4.1, -3.3, -2.4, -1.5, -0.6, -0.04, 0.6, 0.02, 0.99, 0.79, 0.34, 0.3, -1.1
15	1.1, 3.2, 9.5, 22.8, 41.4, 53.9, 49.4, 31.9, 15.2, 5.7, 1.8, 0.55, 0.17, 0.06, 0.03, 0.02, 0.01, 0.02, 0.04, 0.1, 0.3
16	-0.78, -1.22, -1.34, -1.39, -1.42, -1.43, -1.42, -1.41, -1.37, -1.3, -1.1, -0.1, 1.1, 1.2, 1.33, 1.36, 1.37, 1.35, 1.3, 1.17, 0.65
17	54.5, 45.7, 27.2, 12.1, 4.3, 1.3, 0.4, 0.13, 0.05, 0.03, 0.02, 0.02, 0.03, 0.05, 0.13, 0.41, 1.3, 4.3, 12.1, 21.2, 45.7
18	-0.78, 0.18, 0.89, 1.13, 1.21, 1.24, 1.23, 1.18, 1.04, 0.63, -0.38, -1.01, -1.22, -1.3, -1.35, -1.36, -1.37, -1.36, -1.33, -1.27, -1.1
19	-1.0, -2.1, 3.2, -4.1, -4.7, -4.9, -4.8, -4.4, -3.7, -2.7, -1.6, -0.4, 0.7, 1.7, 2.4, 2.9, 3.0, 2.7, 2.1, 1.2, 0.2
20	1.0, 4.36, 16.7, 49.8, 105.0, 146.3, 130.9, 75.9, 30.0, 8.75, 2.1, 0.47, 0.11, 0.03, 0.01, 0.007, 0.006, 0.009, 0.02, 0.05, 0.2
21	148.4, 118.8, 62.6, 25.5, 6.21, 1.45, 0.33, 0.08, 0.02, 0.01, 0.007, 0.007, 0.01, 0.02, 0.08, 0.32, 1.45, 6.2, 22.6, 62.2, 119.0
22	0.0, 0.97, 1.23, 1.32, 1.36, 1.37, 1.36, 1.34, 1.28, 1.13, 0.64, -0.64, -1.13, -1.28, -1.34, -1.37, -1.36, -1.32, -1.23, -0.9, -0.2
23	-0.0001, -1.47, -2.8, -3.9, -4.65, -4.98, -4.87, -4.33, -3.4, -2.16, -0.74, 0.74, 2.17, 3.14, 4.33, 4.87, 4.98, 4.65, 3.9, 2.8, 1.4
24	1.0, 5.8, 29.3, 108.9, 266.4, 396.7, 347.1, 180.5, 59.2, 13.5, 2.4, 0.4, 0.07, 0.01, 0.005, 0.003, 0.002, 0.004, 0.009, 0.03, 0.1
25	403.4, 309.0, 142.2, 42.1, 8.9, 1.56, 0.26, 0.05, 0.01, 0.0044, 0.0026, 0.0026, 0.0044, 0.01, 0.05, 0.263, 1.56, 8.95, 42.1, 142.2, 309.9
26	0.78, 1.22, 1.34, 1.39, 1.42, 1.43, 1.42, 1.41, 1.37, 1.3, 1.1, 0.1, -1.1, -1.2, -1.33, -1.36, -1.37, -1.35, -1.3, 1.17, -0.65
27	1.0, -0.77, -2.3, -3.6, -4.6, -4.9, -4.8, -4.1, -3.1, -1.6, 0.1, 1.9, 3.6, 5.1, 6.2, 6.84, 6.98, 6.58, 5.69, 4.4, 2.7
28	1.0, 7.8, 51.5, 238.1, 675.9, 1075.4, 620.1, 429.3, 110.8, 20.8, 2.83, 0.35, 0.04, 0.01, 0.002, 0.001, 0.001, 0.001, 0.004, 0.02, 0.12
29	1.10, 1.32, 1.40, 1.43, 1.45, 1.46, 1.46, 1.44, 1.42, 1.37, 1.25, 0.76, -0.8, -1.22, -1.33, -1.36, -1.37, -1.35, -1.29, -1.1, -0.1
30	2.0, -0.06, -1.9, -3.4, -4.9, -4.8, 4.0, -2.7, -1.1, 0.95, 3.0, 5.0, 6.7, 8.1, 8.8, 8.9, 8.5, 7.47, 5.94, 4.06

Лабораторная работа 16

ПОИСК ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ

Цель работы: научиться определять максимальные и минимальные значения функции на заданном интервале.

16.1 Теоретические сведения

Поиск экстремумов функции одной переменной имеет не только самостоятельный интерес, а и является важным элементом процессов минимизации функций нескольких переменных (многомерного минимизации) при решении различных задач оптимизации.

Метод, который описывается ниже, позволяет найти точку экстремума функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$. Для уверенности поиска отрезок $[a, b]$ должен содержать один максимум или минимум исследуемой функции.

Золотым сечением отрезка называют длинные его на две части таким образом, что отношение длины всего отрезка к длине большей части равна отношению длины большей части к меньшей.

Нетрудно доказать, что золотой сечение отрезка $[a, b]$ выполняют две симметрично расположенные точки:

$$\begin{cases} x_1 = b - \tau(b - a), \\ x_2 = a + \tau(b - a), \end{cases} \quad (16.1)$$

$$\text{где } \tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,6180339, \quad x_1 < x_2. \quad (16.2)$$

Причем точка x_1 в свою очередь делает золотое сечение отрезка $[a, x_2]$, а точка x_2 - отрезка $[x_1, b]$.

16.2 Задание

Найти максимальное или минимальное значение функции на интервале $[a, b]$ с точностью ε . Исходные Данные приведены в таблице 16.1. Построить график функции и определить на нем точку экстремума.

16.3 Методические рекомендации

В соответствии с вышеизложенным, поиск минимального значения функции на заданном интервале $[a, b]$ может быть выполнен следующим образом:

- Отрезок $[a, b]$ делим точками x_1 и x_2 по правилу золотого сечения;
- Вычисляем значение функции, минимизируется, $f(x)$ в точках x_1 и x_2 ;

- При $f(x_1) > f(x_2)$ меняем левую границу интервала $a=x_1$, а в противном случае - правую $b=x_2$;
- Повторяем процесс сначала, учитывая, что одна из точек золотого сечения уже известна;
- Итерации продолжаем до тех пор, пока интервал неопределенности $[a, b]$ не станет меньше заданной погрешности;
- После завершения итераций точку минимума можно уточнить, разделив отрезок $[a, b]$ пополам:

$$x_{\min} = \frac{a+b}{2}$$

Аналогично можно найти максимум функции. Блок-схема метода представлена на рис. 16.1.

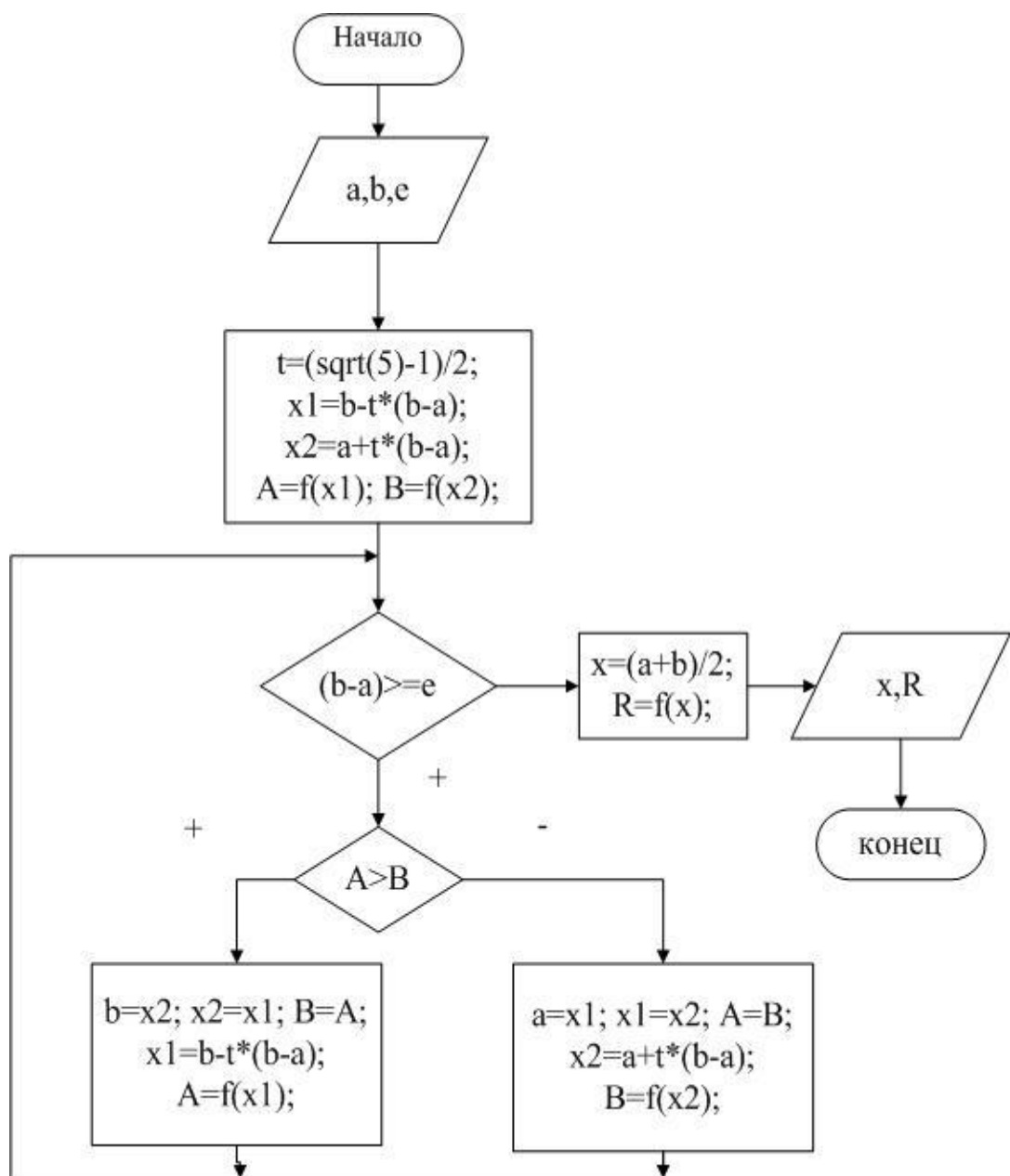


Рисунок 16.1 - Алгоритм функции вычисления методом золотого сечения

Таблица 16.1 – Задание к лабораторной работе №16

№ п/п	$f(x)$	a	b	ε	Вид экстремума
1	2	3	4	5	6
1	$e^{2\cos x} + 2\sin x$	4	5	10^{-5}	min
2	$\arctg(2,8\sin x - 1,3)$	0	2	10^{-4}	max
3	$x^2 + 4e^{-0,25x}$	-1	2	10^{-3}	min
4	$2,5\sin(x^2 - 0,5) - 0,67x$	1	2	10^{-5}	max
5	$x^4 + 1,2\arctg 6x$	-2	0	10^{-4}	min
6	$x^2 e^{-2x}$	0	2	10^{-3}	max
7	$\arctg(2,8\sin x - 1,3)$	-2	0	10^{-4}	min
8	$\sin 3x \cdot e^{\sin 2x}$	0	1	10^{-5}	max
9	$\frac{x}{8e^2} + x^2$	-2	0	10^{-3}	min
10	$2\sin x + e^{2\cos x}$	-1	1	10^{-3}	max
11	$-1,5\arctg 10x + x^4$	0	2	10^{-3}	min
12	$e^{5\sin x}$	$\pi/4$	$3\pi/4$	12^{-6}	max
13	$1,8^x + e^{ x-0,8 }$	1	3	10^{-4}	min
14	$\sin(x - \cos x)$	1	2	10^{-5}	max
15	$e^{\sin 2x} \cdot \sin 3x$	-1	0	10^{-4}	min
16	$\ln 0,85x - 0,96x + 2$	0,1	2	10^{-3}	max
17	$\lg 8x - 27,3x$	0,1	0,18	10^{-6}	min
18	$6,3\sin(5,2x) - 2,8x$	-0,1	0,6	10^{-5}	max
19	$2,5\sin(x^2 - 0,5) - 0,67x$	-1	1	10^{-4}	min
20	$3,4\cos(\frac{x}{2} - 0,28) - 0,1x^4$	-1	2	10^{-3}	max
21	$\cos 2x \cdot \ln \frac{x}{2} - \frac{x}{4}$	1,6	3	10^{-4}	min
22	$19,2x - 2 + \lg(-3x)$	0,2	0,5	10^{-6}	max
23	$0,2x^2 + 2,1\sin(0,2x - 0,18)$	-5	0	10^{-3}	min
24	$\ln \frac{x}{2} \cdot \cos 2x - \frac{x}{4}$	0,5	1,6	10^{-4}	max
25	$5,8x + \ln(0,2x)^{-1} - 1,5$	0,1	1	10^{-5}	min

ЛИТЕРАТУРА

1. Маликов В.Т., Кветный Р.Н. Вычислительные методы и применение ЭВМ. – К.: Вища школа, 1999.- 212 с.
2. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран, Паскаль.- Томск, 1991.- 272 с.
3. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование. – М.: Высшая школа. 1990.- 544 с.
4. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Высшая школа. 1972.- 366 с.
5. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978.- 512 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение		4
Лабораторная работа №1	Вычисление значений степенного полинома по схеме Горнера.....	5
Лабораторная работа №2	Простейшие операции над матрицами.....	8
Лабораторная работа №3	Решение систем линейных уравнений с действительными коэффициентами	15
Лабораторная работа №4	Решение систем линейных уравнений с комплексными коэффициентами.....	22
Лабораторная работа №5	Обращение матриц.....	24
Лабораторная работа №6	Вычисление определителей матриц.....	27
Лабораторная работа №7	Отделение корней трансцендентных уравнений.....	29
Лабораторная работа №8	Отделение корней алгебраических уравнений.....	35
Лабораторная работа №9	Уточнение корней трансцендентных и алгебраических уравнений.....	38
Лабораторная работа №10	Разрешения систем нелинейных уравнений.....	42
Лабораторная работа №11	Численное решение линейных дифференциальных уравнений.....	47
Лабораторная работа №12	Интерполяция.....	51
Лабораторная работа №13	Аппроксимация методом наименьших квадратов.....	55
Лабораторная работа №14	Численное интегрирование.....	58
Лабораторная работа №15	Гармонический анализ и синтез периодических функций.....	63
Лабораторная работа №16	Поиск экстремальных значений функций методом золотого сечения.....	67

Методические указания к лабораторным работам по курсу “Математические методы и модели” (для студентов специальности 7.090603)

Составили: Джура Сергей Георгиевич, к.т.н., доцент
Шлепнев Сергей Владимирович, к.т.н., доцент
Якимишина Виктория Викторовна, к.т.н., доцент
Фёдоров Анатолий Юрьевич, ассистент