

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ ДНР
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Кафедра “Электроснабжение промышленных
предприятий и городов”**

**Конспект лекций по курсу
«Математические методы в решении
электротехнических задач на ЭВМ»**

Автор: доц. к.т.н. Джура С.Г.

**Утверждено Решением Совета
ИМС ДонНТУ,
протокол №10 от 2.10.2015 г.**

Донецк - 2016

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ В КУРС "МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В РЕШЕНИИ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ЭВМ".	4
1.1. Математическое моделирование	4
1.2. Модели объектов и процессов	6
1.3. Особенности построения математической модели	7
1.4. Способы описания математических моделей	9
1.5. Детерминированные модели	9
1.6. Стохастические модели	10
1.7. Метод Монте-Карло	10
1.8. Основные типы задач в математическом моделировании в электротехнике и автоматике	11
2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ) С УЧЕТОМ ОСОБЕННОСТЕЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ	12
2.1. Постановка задачи для СЛАУ.	12
2.2. Методы решения СЛАУ	13
2.3. Метод Жордана	13
2.4. Метод Гаусса или метод главного элемента	16
2.4.1. Прямой ход метода Гаусса	17
2.4.2. Обратный ход метода Гаусса	18
2.4.3. Расчет примера по методу Гаусса	19
2.5. Метод обращения матриц	20
2.5.1. Метод обращения матриц путем перестановки элементов столбцов b и x	20
2.6. Оценка сравнительной вычислительной эффективности метода обращения матрицы при многократном решении СЛАУ	23
2.7. Метод треугольной факторизации матрицы коэффициентов	23
2.8. Особенности решения СЛАУ электрических систем	27
2.9. Учет симметричности матрицы узловых проводимостей	27
2.10. Учёт слабой заполненности матрицы узловых проводимостей	30
3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СНАУ) УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ РАБОТЫ	32
3.1 Метод простой итерации	34
3.2. Метод Зейделя	35
3.3. Метод полной релаксации	36
3.4. Решение на основе метода Гаусса	37

3.5.	Сравнительная оценка скорости сходимости метода Гаусса-Зейделя, метода Зейделя	38
3.6.	Метод Ньютона	39
3.7.	Ход итерационного процесса метода Ньютона	40
3.7.1	Ход итерационного процесса модернизированного метода Ньютона на основе уравнений баланса мощности	42
3.8.	Метод градиентов (скорейшего спуска)	42
3.9.	Метод скорейшего спуска (метод градиентов) для нелинейных уравнений	43
4.	ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	43
4.1.	Метод Эйлера	44
4.2.	Метод Эйлера-Коши	45
4.3.	Метод Рунге-Кутты четвертого порядка	45
4.4.	Метод Нюстрема	47
4.5.		48
4.7.	Метод Милна и Фельберга	49
4.8.	Метод Ингланда и Адамса-Башфота	50
	Метод Хэмлинга	
5.	ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ.	50
	КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ	
5.1.	Метод прямоугольников	52
5.2.	Метод трапеций	52
5.3.	Метод Симпсона	52
5.4.	Оценка погрешностей методов Ньютона-Котеса. Рекомендации по выбору шага интегрирования	53
5.5.	Метод Монте-Карло	54
6.	ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЗАВИСИМОСТЕЙ	55
6.1	Постановка задачи интерполяции	56
6.2.	Интерполяционная формула Лагранжа	57
6.3.	Интерполяционная формула Ньютона	58
6.4.	Гармонический анализ и синтез периодических функций	59
6.5.	Поиск экстремальных значений методом «Золотого сечения»	60
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	61

1. Введение в курс "МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В РЕШЕНИИ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ЭВМ".

Только развитие идей и методов высшей математики, дало возможность построить математическую теорию динамики и осветить таким образом многие методы, которые не могли быть открыты без этого математического построения. И, если мы захотим развить динамические теории других наук, мы должны вдохновить наш ум этими динамическими истинами так же, как и математическими методами.

Джордж Максвелл

Цель курса – связать абстрактное математическое описание с конкретной электротехнической задачей для ее решения.

Объектом приложения математической модели служат реальные объекты (например, схема снабжения предприятия и т.д.)

Сам процесс решения перечисленных выше задач называется математическим моделированием.

1.1. Математическое моделирование

Математическое моделирование процессов и явлений в различных областях науки и техники является одним из основных способов получения новых знаний и технологических решений.

Для осуществления математического моделирования исследователь независимо от его специальности должен знать определенный минимальный набор методов вычислительной математики, а также владеть способами и программной реализацией на ЭВМ.

Эти знания и навыки необходимы также при использовании готовых пакетов программ, иначе будет затруднено планирование вычислительного эксперимента и интерпретация его результатов.

Цель моделирования – получение и обработка, представление и использование информации об объектах, которые взаимодействуют между собой и внешней средой, а **Модель** (упрощенное представление о реальности) выступает как средство показания свойств и закономерностей поведения объекта.

Иерархия понятий:

Реальность -> Физическая модель -> Математическая модель -> Численная схема -> программная структура -> Программная модель -> Модель архитектуры компьютера

Модель представляет собой проекцию объективной реальности под определенным углом зрения. Иногда в зависимости от целей можно получить ряд проекций объективной реальности, вступающих в противоречие. Это характерно, как правило, для сложных систем, у которых каждая проекция выделяет существенное для определенной цели из множества несущественного.

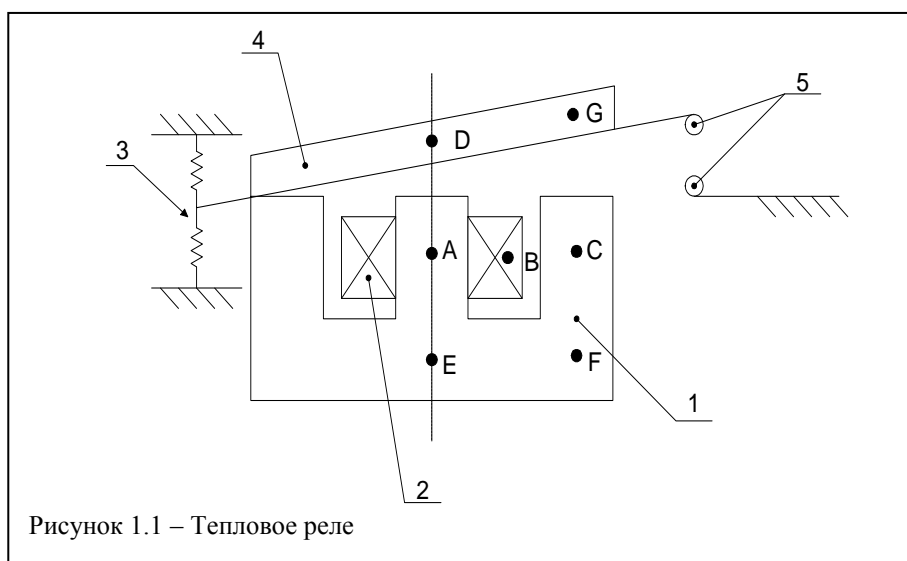
Особенность математического моделирования состоит в том, что абстрактным отражением существующего или создаваемого объекта является его математическая модель, количественный анализ которой позволяет получить новые знания об этом объекте.

Удобства, предоставляемые современными ППП для ЭВМ их пользователям часто приводят к стремлению обратиться при количественном анализе модели к существующим и постоянно совершенствуемым универсальным пакетам типа MathCAD, MathLAB и др. Более того, универсальность ММ позволяют создавать программные комплексы типа NASTRAN или ANSYS, в которые исходная информация вводится даже не в виде ММ, а в виде расчетной схемы технического объекта. Однако метод, который годится для решения многих стандартных задач,

часто не является наилучшим при решении конкретной задачи, особенно нестандартной, а нередко и вообще не применим. Но в инженерной практике решать приходится в основном нестандартные задачи, потому что стандартные все решены или могут быть решены без особых творческих усилий. При решении новых и сложных задач, не имеющих близких аналогов, путь формального обращения к универсальным пакетам и программным комплексам может привести к получению результатов, которые не удастся интерпретировать применительно к рассматриваемому техническому объекту. В таких случаях анализ ММ нужно строить на умелом сочетании качественных оценок, аналитических методов и применения ЭВМ, помня, что цель расчетов – не числа, а понимание. Все это говорит о том, что ЭВМ, освобождая нас от многих забот и обязанностей, не освобождает во всяком случае от двух из них – от необходимости владеть математикой и творчески мыслить.

ПРИМЕР РАСЧЕТА ТЕПЛОВОГО РЕЛЕ

1. Ш-образный магнитопровод.
2. Обмотка электромагнита.
3. Пружина.
4. Якорь.
5. Коммутируемые контакты.



В расчет электромагнитного реле входит:

1. Расчет электромагнита (ток, рабочее напряжение и т.д.)
2. Расчет магнитной системы (размеры, материал).
3. Расчет контактной системы (величина, материал).
4. Тепловой расчет (режим работы реле).

Одним из видов тепловых расчетов является метод «Эквивалентных тепловых схем замещения», основанный на аналогии тепловых и электрических процессов. В результате строится электрическая схема замещения теплового процесса. Аналогия: тепловому сопротивлению ставится $R_{эл}$

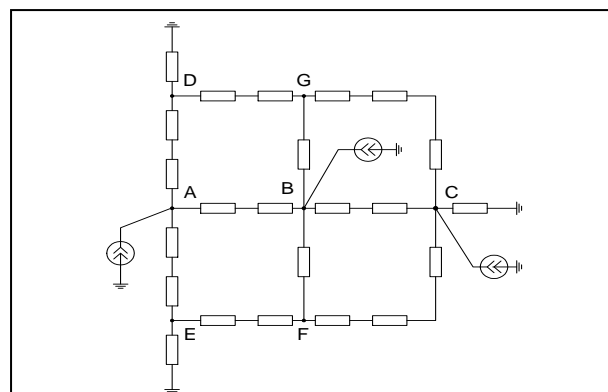
Тепловое	Электрическое
q_i	I
I_1-I_2	U
C_T	$C_{эл.}$

Разобьем реле на две части как показано на рисунке 2.

$$C \frac{dT}{dt} + GT = P$$

Уравнение (1) - теплового баланса

C – Матрица тепловых мощностей;



t – время;

T – температура;

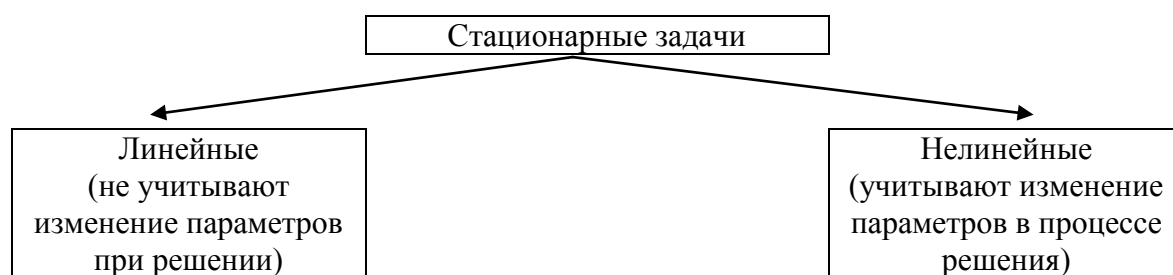
G – матрица проводимости веществ (расчет производится по закону Кирхгофа).

$\frac{dT}{dt}$ – матрица приращения температуры.

Задачи решения по данному уравнению могут быть двух видов:

1. Решение задачи в динамике (уравнение (1) используется в целом).
2. Стационарный режим (уравнение (1) принимает вид $G \cdot T = P$).

Математической моделью теплового процесса является система уравнений в матричном виде, приведенная к виду (1)



Теория моделирования является разделом науки, изучающим способы исследования свойств объектов оригиналов на основе замещения их другим объектом (моделью).

Многие явления и процессы разной природы описываются аналогичными соотношениями (пример выше), поэтому для анализа, решения и расчета математической модели необходимо владеть развитым математическим аппаратом, охватывающим все виды типовых задач по прикладной математике.

Априорные сведения – сведения известные до опыта.

Регрессионный анализ - $f(U) = I$ - анализ на реальные данные; корреляционный анализ – зависимость связанности двух процессов.

1.2. Модели объектов и процессов.

Модель – упрощенное представление о реальном объекте, процессе или явлении.

Моделирование – построение моделей для исследования и изучения объектов, процессов или явлений.

Рассмотрим наиболее распространенные признаки, по которым классифицируют модели:

- область использования;
- учет в модели временного фактора (динамики);
- отрасль знаний;
- способ представления моделей.

По области использования модели можно классифицировать следующим образом:

- **учебные модели** — наглядные пособия, различные тренажеры, обучающие программы;
- **научно-технические модели**; создают для исследования процессов и явлений;
- **игровые модели** — это военные, экономические, спортивные, деловые игры;
- **имитационные модели** не просто отражают реальность, а имитируют ее.

Эксперимент либо многократно повторяется, либо проводится одновременно со многими другими похожими объектами, но поставленными в разные условия.

Модели делят на две большие группы: материальные и информационные.

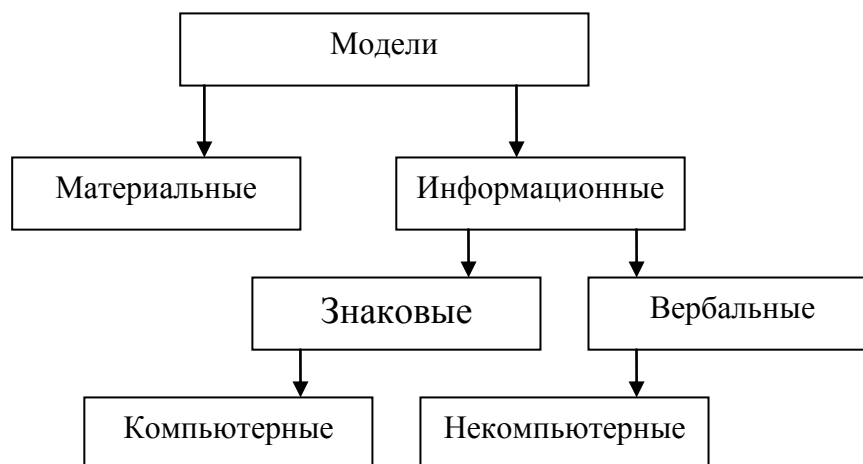


Рис. 3. Классификация моделей

Материальные модели иначе можно назвать предметными, физическими. Они воспроизводят геометрические и физические свойства оригинала и всегда имеют реальное воплощение.

В основе информационного метода моделирования лежит информационный подход к изучению окружающей действительности.

Информационная модель — совокупность информации, характеризующая свойства и состояние объекта, процесса, явления, а также взаимосвязь с внешним миром.

Информационные модели в свою очередь подразделяются на *знаковые* и *вербальные*.

Вербальная модель — информационная модель в мысленной или разговорной форме. (К таким моделям можно отнести и идею, возникшую у изобретателя, и музыкальную тему, и рифму, прозвучавшую пока еще в сознании автора.)

Знаковая модель — информационная модель, выраженная специальными знаками, т. е. средствами любого формального языка (это рисунки, тексты, графики, схемы). По форме представления можно выделить следующие виды информационных моделей:

- *геометрические* — графические формы и объемные конструкции;
- *словесные* — устные и письменные описания с использованием иллюстраций;
- *математические* — математические формулы, отображающие связь различных параметров объекта или процесса;
- *структурные* — схемы, графики, таблицы и т. п.;
- *логические* — модели, в которых представлены различные варианты выбора действий на основе умозаключений и анализа условий;
- *специальные* — ноты, химические формулы и т. п.;
- *компьютерные и некомпьютерные модели*.

1.3. Особенности построения математической модели

Математическое моделирование можно рассматривать как средство изучения реальной энергетической системы путем ее замены более удобной моделью, сохраняющей существенные черты оригинала.

Модель называется *изоморфной*, одинаковой по форме, если между нею и реальной системой существует полное поэлементное соответствия.

Модель называется *гомоморфной*, если существуют соответствия лишь между наиболее значительными составными частями объекта и модели.

Математическое моделирование включает в себя следующие **этапы**:

- 1) постановка задачи;
- 2) построение модели;
- 3) разработка алгоритма;
- 4) проверка правильности алгоритма т.е. проверка адекватности моделей и объекта;
- 5) реализация, т. е. программирование алгоритма;
- 6) анализ алгоритма и его сложности;

- 7) проверка (отладка) программы;
- 8) составление документации (отчет по л/р или к/р).
- 9) Использование модели.

Исследование объекта моделирования и составление его математического описания заключается в установлении связи между параметрами процесса. Выявление его начальных и граничных условий, формализация процесса в виде системы математических соотношений.

Математическое описание составляется на основе фундаментальных уравнений различных наук, которые характеризуют *динамику* и *статику* процессов в исследуемых объектах.

Наиболее распространенные:

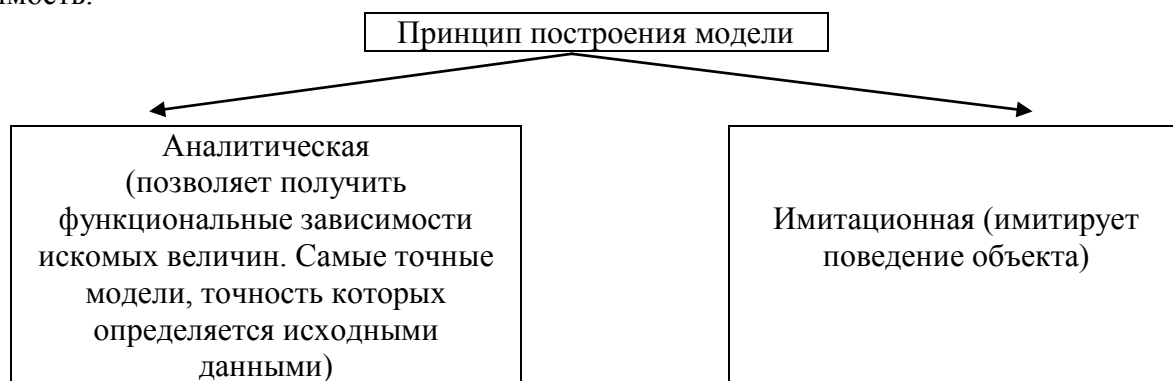
Детерминированные¹⁾ модели (включают в себя различные уравнения – дифференциальные и др.).

Стохастическое²⁾ моделирование (учитывает случайный характер процессов, а также методы теории вероятностей и математической статистики).

Если, *априорных*³⁾ сведений об объекте не достаточно, то вид математической модели уточняется с помощью методов многомерной статистики, а именно: регрессионного, корреляционного и других видов анализа, а также проведения инженерного эксперимента.

Регрессионный анализ (например, зависимость $f(U) = I$, получаем таблицу значений и производим математический анализ).

Корреляционный анализ (показывает зависимость на сколько связаны между собой два процесса. k – коэффициент корреляции, если $k = 1$ – прямая зависимость, $k = (-1)$ – обратная зависимость.



Однако по мере усложнения объекта моделирования построение математической модели превращается в трудноразрешимую проблему, поскольку аналитические модели разработанные только для тела классической конфигурации (шар, цилиндр, пластина), причем гомогенных¹⁾, т.е. состоящих из одного материала. Но поскольку инженерные модели или электротехнические объекты не укладываются в эти рамки, поэтому аналитическое моделирование практически не применимо в инженерных расчетах. Само понятие инженерного расчета предполагает определенную погрешность.

В тоже время широкое распространение получили имитационные модели, которые рассматриваются как проводимые на ЭВМ эксперименты с математической моделью, имитирующей поведение реальных объектов. Особенности функционирования объектов моделирования и вид используемого математического описания, определяется непрерывный или дискретный характер модели, а цели проектирования – детерминированный или стохастический подход к построению математической модели.

Методы математического моделирования позволяют:

- исключить необходимость изготовления громоздких физических объектов (моделей), связанную с материальными затратами;
- сократить время на определения характеристик (особенно при расчете математической модели на ЭВМ);

изучить поведение объектов моделирования при различных значениях параметров, проанализировать применимость различных элементов, получить характеристики показателей, которые можно снять экспериментально.

- 1) детерминированные - predetermined;
- 2) стохастическое моделирование - вероятностное;
- 3) априорные сведения – данные, известные до эксперимента.

Два основных преимущества перед физическим моделированием на объекте:

- скорость проведения экспериментов с использованием ЭВМ;
- встроенный анализ любых ситуаций математической модели в любых режимах не доступных для физической модели.

1.4. Способы описания математической модели

Математическая модель устройства системы или процессов в общем виде представляется в виде системы функционалов.

$$\Phi(x, y, z, t) = 0;$$

x, y – векторы входных и выходных координат;

z – векторы внешних воздействий;

t – координат времени.

Способ представления функционала зависит от цели моделирования, назначения объекта объема известной информации и характера исходных данных.

1. *Системы дифференциальных уравнений*, описывают динамические системы, а именно переходные процессы в системах электроснабжения (включение и выключение оборудования, режим коротких замыканий и т.д.) Традиционная задача определения величины и времени действия короткого замыкания К.З (переходной режим).
2. *Алгебраические уравнения* описывают установившиеся режимы работы оборудования. Типовая задача - нахождение токов в линиях для выбора сечений, токов подвода.
3. *Нелинейные уравнения* или система нелинейных уравнений могут быть как алгебраическими так и дифференциальными (отличие от предыдущих лишь в том, что при их решении учитываются изменяющиеся параметры самой энергосистемы, а именно: нелинейные сопротивления, насыщение магнитопроводов трансформаторов и др. оборудования, что позволяет найти точное значение параметров оборудования).

1.5. Детерминированные модели (предопределенные).

Поведение большинства технических систем можно охарактеризовать при помощи так называемых фазовых переменных, а именно физических величин типа: Φ - потока, φ - потенциала. При этом целесообразно выделить в объектах моделирования достаточно крупные элементы, рассматриваемые как неделимые единицы. Законы функционирования системы задаются компоновочными уравнениями, связывающими разнородные фазовые переменные. Общность описания процессов, происходящих в различных технических системах, позволяет выделить несколько типов элементов, а именно:

R - элемент рассеивания энергии;

C, L - элементы накопления энергии.

При сочетании этих простейших элементов получают эквивалентную схему технической системы любой сложности, а также ее математическую модель.

В приведенной ниже таблице 3.1 выражен конкретный смысл фазовых переменных в разных видах подсистем.

Математическая модель типа детерминированной – непрерывной, а также аналитической для технического объекта в общем случае является системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таблица 3.1

Подсистема	Фазовые переменные		Элементы		
	Тип потока	Потенциал	R	C	L
Электрическая	Ток (I)	Напряжение (U)	R активное	C емкость	L индуктивность
Тепловая	Тепловой поток	T температура	Тепловое сопротивление	C_T теплоемкость	нет
Механическая поступательная	Сила	V - скорость	F – сила трение	F - сила упругости	масса
Гидравлическая	Расход	P - давление	Гидравлическое сопротивление	Гидравлическая емкость	Гидравлическая индуктивность
Механическая вращательная	момент	Угловая скорость	Нет	Вращательная гибкость	Момент инерции

Матричный тип тепловой модели реле из 1-го раздела рисунок 1.1, уравнение теплового баланса для схемы замещения записывается в виде:

$$C(T) \frac{dT}{dt} + G(T) \cdot (T - T_0) - P(T) = 0$$

Подобную систему при большом количестве уравнений можно решать только численными методами, заменяя непрерывную независимую переменную ее дискретными¹⁾ аналогами.

Совокупность значений фазовых переменных на (k) -том шаге интегрирование получается путем решения системы n алгебраических уравнений (в общем случае нелинейных) с n неизвестными.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Существуют переопределенные, недоопределенные системы.

Решение такой системы возможно как прямыми, так и итерационными методами. Система уравнений $\Phi(x, y, z, t) = 0$ представляет собой объединение компонентных топологических и разностных уравнений в одной системе.

Топологическими уравнениями задаётся связью между однородными фазовыми переменными, относящимися к разным элементам системы. Такие уравнения в большинстве физических систем базируются на уравнениях равновесия и непрерывности (пример: на базе I и II законов Кирхгофа, лабораторная работа №3).

1.6. Стохастические модели

При описании объектов электротехники и автоматики можно выделить следующие виды стохастического (вероятностного) моделирования:

1. **Стохастическое моделирование** на основе метода *Монте-Карло* имеет приложения помимо задач математического моделирования к решению ряда частных задач численных методов, например, взятие интегралов, решение дифференциальных уравнений и т. д.
2. **Аналитическое вероятностное моделирование**, которое имеет приложение к построению моделей, оперирующих не с конкретными случайными числовыми последовательностями, а

непосредственно с их вероятностными (законы распределения вероятности) и спектральными (спектр плотности или корреляционные функции) характеристиками.

Корреляция выражает меру связи двух процессов.

В общем случае построение таких моделей представляет собой сложную вычислительную задачу, что не позволяет в полной мере использовать такие их преимущества, как возможность точного аналитического задания характеристик случайных процессов, отсутствие необходимости генерации и обработки больших выборок случайных чисел и приспособленность к оперативной оптимизации.

1.7. Метод Монте-Карло

В математике существует целое направление, связанное с методом Монте-Карло. Оно занимается использованием случайных чисел для решения различных математических задач: интерполяции, вычисления интегралов, решения дифференциальных и интегральных уравнений, решения систем линейных уравнений, поиска экстремума, моделирования процессов и т. д. Преимущества недетерминированных методов особенно ярко проявляются при решении задач большой размерности, когда применение традиционных детерминированных методов затруднительно или совсем невозможно. Границы между простым и трудным, возможным и невозможным с развитием вычислительной техники сдвигаются вдаль, но существуют всегда. Основной недостаток недетерминированных методов — их медленная сходимость, что вынуждает искать компромисс между невысокой точностью результатов и большим расходом машинного времени.

Вначале для получения случайных чисел использовались заранее составленные таблицы и физические датчики. Очевидным недостатком таблиц является их ограниченный объем, а использование физических датчиков наталкивается на сложность реализации, медлительность датчиков, их капризность и невоспроизводимость полученных результатов. Поэтому вместо *чисто случайных* чисел стали использовать *псевдослучайные числа*, генерируемые с помощью той или иной программы. Случайность при таком подходе заменяется непредсказуемостью для неосведомленного пользователя: наблюдая некоторое время "хорошую" последовательность псевдо-случайных чисел, он не в состоянии предсказать, каким будет следующий член этой последовательности, хотя на самом деле все они вычисляются по довольно простой формуле. Прежде чем использовать для решения задач тот или иной датчик случайных чисел (табличный, физический или программный), его подвергают разнообразным тестам: на равномерность (или согласие с другим предписанным законом распределения), на независимость и т. д.

Одно из преимуществ метода Монте-Карло заключается в его своеобразной "локальности": этим методом можно, например, искать одну составляющую решения системы линейных уравнений, не интересуясь другими компонентами, или искать значение функции, являющейся решением дифференциального уравнения, в одной точке и т. п. Если, например, трудоемкость прямых методов вычисления определенных интегралов с ростом размерности n пространства переменных возрастает как k^n (k — число шагов, на которое разбивается интервал интегрирования по каждой оси), то трудоемкость алгоритма Монте-Карло возрастает как $k^{n/2}$. Основной недостаток метода Монте-Карло — сравнительно медленная сходимость, для получения более или менее надежных результатов требуется большое число повторений.

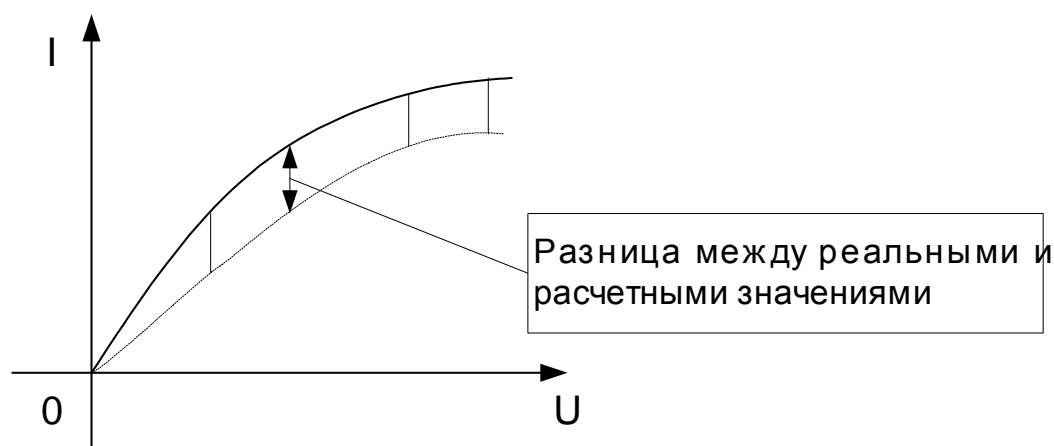
Процессы в системе могут протекать по-разному в зависимости от условий, в которых находится система. Следить за поведением реальной системы при различных условиях и исследовать всевозможные варианты бывает трудно, а иногда и невозможно. В таких случаях вырывают модели. Построив модель, можно многократно возвращаться к начальному состоянию и наблюдать за поведением модели. Такой метод исследования систем называется *имитационным моделированием*. Имитационное моделирование применяют в тех случаях, когда необходимо учесть возможно большее разнообразие исходных данных, изучить протекание процессов в различных условиях.

Само название метода «Монте-Карло» происходит от города Монте-Карло в княжестве Монако, знаменитого своими игорными домами. Дело в том, что одним из механических приборов для получения случайных величин является рулетка, используемая в игорных домах.

1.8. Основные типы задач в математическом моделировании в электротехнике и автоматике

1. Идентификация (уточнение модели) динамических характеристик линейных звеньев при использовании различных описаний сигналов на их входе и выходе.

2. Использование метода наименьших квадратов для описания передаточной характеристики по массивам данных на входе и выходе системы.



Рисунок

3. Исследование устойчивости линейных динамических систем на основе использования различных критериев (именных).
4. Анализ качества линейных систем автоматического управления. Определение оптимальных управляющих воздействий.
5. Исследование нелинейных автоматических и электроэнергетических систем на основе приближенных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений.
6. Статическое имитационное моделирование измерительных устройств и систем на ЭВМ (построение гистограммы, корреляционных функций и т. д.).
7. Аналитическое вероятностное моделирование измерительных информационных систем на основе взаимосвязанных вероятностных (закон распределения вероятности) и энергетических (спектральные плотности) мощностей модели.
8. Решение задачи определения значений измеряемой величины: скоростей, потока, звуковой волны или температур в замкнутой области.
9. Исследование устройств автоматики методом планирования эксперимента.
10. Анализ спектров распределения сигналов, с использованием преобразований Фурье в задачах распознавания образов и цифровой обработки сигналов. (OCR – программы).
11. Анализ и оценка погрешностей измерительных устройств и систем на основе методов интервального анализа (*интервальный анализ* – исходные данные берутся не как конкретные значения, а как интервал данных, задаются max и min значений электрических параметров).
12. Решение задач автоматизации проектированием (САПР – системы автоматического проектирования).

2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ) С УЧЕТОМ ОСОБЕННОСТЕЙ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В задачах расчета процессов и режимов энергетических систем в электроснабжении часто требуется решать СЛАУ, причем либо это полностью решает поставленную задачу, либо составляет ее значительную часть в вычислительном отношении. Поскольку порядок системы уравнений обычно высок и может потребовать ее многократного решения при изменяющихся правых частях, то очень важно применять наиболее эффективные методы решения с максимальным использованием специфики электроэнергетических задач.

2.1. Общая постановка для всех методов решения задач.

В общем случае задача формируется следующим образом: нужно найти значения $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, удовлетворяющие системе из n уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

где a – пассивные элементы цепи (R).
 b – активные элементы (E);
 x – неизвестный элемент;

$$Ax = B$$

Необходимым и достаточным условием существования решения является неравенство нулю определителя:

$$\det A = \Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

2.2. Методы решения СЛАУ

Методы решения СЛАУ:

- **прямые** – позволяют получить точное решение (к ним относятся методы определителей Крамера, Гаусса, прогонки, схемы Жордана, метод обращения матрицы, метод треугольной факторизации матрицы коэффициентов).
- **итерационные** (последовательного приближения) – основаны на получении и уточнении последовательных приближений к точному решению; эффективны в случае, когда много нулевых элементов (говорят, что матрица разреженная) или высок порядок системы.

1. Метод Гаусса - эффективен до порядка $n \leq 10^4$.
2. Итерационные методы - до порядка $n \leq 10^6$.
3. Метод Крамера менее эффективен для использования при решении задач на ЭВМ, поскольку требует максимального числа арифметических операций.
4. Метод Гаусса – Хотеллинга n – дополнительных шагов.

К итерационным методам решения СЛАУ относят: метод простых итераций, метод Зейделя, метод градиента (скорейшего спуска), метод Хотеллинг.

В результате эквивалентных преобразований получаем:

$$E \cdot x = b'$$

2.3. Метод Жордана

Этот метод очень близок к методу Гаусса, поэтому его иногда называют методом Гаусса-Жордана, однако он компактнее из-за n однотипных шагов матричных коэффициентов системы

уравнений. В результате значения неизвестных могут быть равны значениям правых частей соответствующих уравнений.

$$\boxed{A} \quad \boxed{X} = \boxed{B} \quad \Rightarrow \quad Ex = b'$$

Первый шаг метода Жордана полностью совпадает с методом Гаусса.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (1)$$

Первое уравнение делим на a_{11} (правую и левую часть). Получаем элементы с индексом 1:

$$\begin{aligned} a_{1j}^{(1)} &= \frac{a_{1j}}{a_{11}} & b_1^{(1)} &= \frac{b_1}{a_{11}} \\ a_{ij}^{(1)} &= a_{ij} - a_{i1}a_{1j}^{(1)} & b_i^{(1)} &= b_i - a_{i1}b_1^{(1)} \end{aligned}$$

В результате выполнения первого шага первый столбец матрицы коэффициентов приводится к нужному виду (первый столбец единичной матрицы)

$$\begin{aligned} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \dots\dots + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\dots\dots\dots \\ \dots\dots + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

На втором шаге, полученная после первого шага система преобразуется таким образом, чтобы и второй столбец матрицы коэффициентов принял вид второго столбца единичной матрицы.

$$\begin{aligned} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2j}^{(2)} &= \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & b_2^{(2)} &= \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & i &= 1, 3 \dots N \\ a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)}a_{2j}^{(2)} & b_i^{(2)} &= b_i^{(1)} - a_{i2}^{(1)}b_2^{(2)} & j &= 3 \dots N \end{aligned}$$

Вычисления для всех N шагов однотипны и для произвольного шага k могут быть записаны следующим образом.

$$\begin{array}{lll}
k = 1 \dots N & & \\
i = 1 \dots N & a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} & b_k^{(k)} = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \\
i \neq k & & \\
j = k + 1, \dots, N & a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)} & b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} b_k^{(k)}
\end{array}$$

Здесь, также как и в методе Гаусса, вычисления возможны при условии, что ведущий элемент (диагональный a_{kk} , где $k=1 \dots N$) отличен от нуля, что для неособенной матрицы коэффициентов всегда можно выполнить путем перестановки строк и столбцов.

Результирующий вид системы будет следующий

$$Ex = b^{(n)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(n)} \\ b_2^{(n)} \\ b_3^{(n)} \\ b_4^{(n)} \end{pmatrix}$$

Этот метод отличает компактная схема вычисления, однако, это сопровождается увеличением объема вычислений. Применение метода затруднительно, если какой-нибудь из ведущих элементов равен 0.

Трудности этой можно избежать, если изменить порядок уравнений системы, а это всегда возможно для неособенной матрицы коэффициентов. Максимальная точность достигается в случае, когда ведущий элемент имеет наибольшее значение. Строку с нулевым или малым ведущим элементом необходимо заменить на ту, из стоящих под ней строк, в которой в том же столбце стоит элемент, имеющий наибольшее значение.

Вычисление по схеме Жордана компактно программируется для расчета на ЭВМ следующим образом:

```

for (k=1;k<=n;k++)
{
    B[k]=B[k]/A[k][k];
    for (i=1;i<=n;i++)
    {
        if ((i-k)!=0)
            B[i]=A[i][k]*B[k];
        if ((k-n)<0)
            k++;
        else exit(0);
        for (j=k+1;j<=n;j++)
        {
            if((i-k)!=0)
                A[i][j]=A[i][j]-A[i][k]*A[k][j];
        }
    }
}

```

Ниже приведен конкретный пример решения системы уравнений.

$$\begin{cases} 20x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -20 \\ -5x_1 + 10x_2 \dots\dots\dots = -10 \\ -5x_1 \dots\dots\dots + 10x_3 \dots\dots = -30 \\ -5x_1 \dots\dots\dots + 5x_4 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = -1 \\ \dots\dots\dots \frac{35}{4}x_2 - \frac{5}{4}x_3 - \frac{5}{4}x_4 = -15 \\ \dots\dots\dots -\frac{5}{4}x_2 - \frac{35}{4}x_3 - \frac{5}{4}x_4 = -35 \\ \dots\dots\dots -\frac{5}{4}x_2 - \frac{5}{4}x_3 - \frac{15}{4}x_4 = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \dots\dots\dots - \frac{2}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_4 = -\frac{10}{7} \\ \dots\dots\dots x_2 - \frac{1}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4 = -\frac{12}{7} \\ \dots\dots\dots \frac{60}{7}x_3 - \frac{10}{7}x_4 = -\frac{260}{7} \\ \dots\dots\dots -\frac{10}{7}x_3 + \frac{25}{7}x_4 = -\frac{90}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \dots\dots\dots - \frac{1}{3}x_4 = -\frac{8}{3} \\ \dots\dots\dots x_2 \dots\dots\dots - \frac{1}{6}x_4 = -\frac{7}{3} \\ \dots\dots\dots x_3 - \frac{1}{6}x_4 = -\frac{13}{3} \\ \dots\dots\dots \frac{10}{3}x_4 = \frac{20}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = 2 \\ x_1 = -2 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = -4 \end{cases}$$

Сравнение трудоемкости метода Жордана с методом Гаусса

Оценку выполним по количеству операций умножения и деления, которое требуется для решения системы N линейных алгебраических уравнений.

$$\Delta M = M_{dg} - M_g = N^2 \frac{(N+1)}{2} - N \frac{(N^2 + 3N + 1)}{3} = N \frac{N^2 - 3N + 2}{6};$$

M_{dg} – Жордана ($M_{ж}$)

M_g – Гаусса ($M_{г}$)

Сведем в таблицу оценку трудоемкости

N	2	3	4	5	10	25	100
$M_{ж}$	6	18	40	75	550	8125	505' 000
$M_{г}$	6	17	36	65	430	5825	343' 000
ΔM	0	1	4	10	120	2300	162' 000

Как следует из полученного выражения и приведенной таблицы, метод Жордана, несмотря на большую компактность, организация вычислений требует большего объема вычислений, чем метод Гаусса. Причем эта разница становится более ощутимой по мере роста порядка системы уравнений. Поскольку в реальных электроэнергетических расчетах приходится иметь дело с системами из сотен уравнений, то применение метода Жордана явно нецелесообразно.

2.4. Метод Гаусса с выбором метод главного элемента.

Постановка задачи аналогична схеме Жордана.

Требуется решить систему $Ax = b$,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \dots\dots\dots x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \dots\dots\dots a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{array} \right. \quad b_n^{(N)} = x_n = \frac{b_n^{(N-1)}}{a_{nn}^{(N-1)}}$$

Общая формула для k -ого шага

$$a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}; \quad b_k^{(k)} = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}};$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}a_{kj}^{(k)}; \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}b_k^{(k)} \quad \begin{array}{l} i, j = k+1 \dots N \\ k = 1 \dots N-1 \end{array}$$

На C++ прямой ход описывается следующим образом:

```

n1=n-1;
for (k=1;k<=n;k++)
{
    B[k]=B[k]/A[k][k];
    k1=k+1;
    for(j=k1;j<=n;j++)
    {
        A[k][j]=A[k][j]/A[k][k];
        B[j]=B[j]-A[j][k]*B[k];
        for (i=k1;i<=n;i++)
            A[i][j]=A[i][j]-A[i][k]*A[k][j];
    }
}
B[n]=B[n]/A[n][n];

```

2.4.2. Обратный ход.

При вычислении обратного хода полученная после прямого хода система уравнений легко решается относительно неизвестных.

$$x_N = b_N^{(N)} \quad x_i = b_i - \sum_{j=i+1}^N a_{ij}x_j \quad i = N-1 \dots 1$$

На C++ обратный ход метода Гаусса описывается следующим образом

```

for (i2=2;i2<=n;i2++)
{
    i=n+1-i2;
    j1=i+1;
    for(i=j1;i<=n;i++)
        B[i]=B[i]-A[i][j]*B[j];
}

```

Суммарное количество операций умножения и деления, необходимое для решения системы из N уравнений, будет состоять из прямого и обратного хода.

$$M_{\Gamma} = M_{\Pi X} + M_{OX} = \frac{N(2N^2 + 3N + 1)}{6} + \frac{N(N-1)}{2} = \frac{N(N^2 + 3N - 1)}{3}$$

Таблица: Сравнения по методу Гаусса с системами уравнений разных порядков.

N	3	4	5	10	25	100
$M_{\Pi X}$	14	30	55	385	5'525	338'350
M_{OX}	3	6	10	45	300	4'950
M_{Σ}	17	36	65	430	5'825	343'300

2.4.3. Расчет примера по методу Гаусса

$$\begin{cases} 20x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -20 \\ -5x_1 + 10x_2 \dots\dots\dots = -10 \\ -5x \dots\dots\dots + 10x_3 \dots\dots = -30 \\ -5x_1 \dots\dots\dots + 5x_4 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = -1 \\ x_2 - \frac{1}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4 = -\frac{12}{7} \\ \frac{60}{7}x_3 - \frac{10}{7}x_4 = -\frac{260}{7} \\ -\frac{10}{7}x_3 + \frac{25}{7}x_4 = \frac{90}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = -1 \\ x_2 - \frac{1}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4 = -\frac{12}{7} \\ x_3 - \frac{1}{6}x_4 = -\frac{13}{3} \\ \frac{10}{3}x_4 = \frac{20}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = -\frac{10}{7} \\ x_2 - \frac{1}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4 = -\frac{12}{7} \\ x_3 - \frac{1}{6}x_4 = -\frac{13}{3} \\ x_4 = 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_4 = 2 \\ x_1 = -2 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = -4 \end{cases}$$

2.5. Метод обращения матриц.

Данный метод формально наиболее очевидный для решения систем СЛАУ.

В этом случае система вида $Ax = b$ приводится к виду $x = A^{-1}B$, т.е. для определения вектора x нужно умножить матрицу правых частей на обратную матрицу коэффициентов

Классический метод состоит в следующем:


```

for (k=1;k<=n;k++)
{
  A[k][k]=1/A[k][k];
  for (i=1;i<=n;i++)
  {
    if((i-k)!=0)
      A[i][k]=A[i][k]*A[k][k];
    else goto 1;
    for (j=1;j<=n;j++)
    {
      if((j-k)!=0)
        A[i][j]=A[i][j]-A[j][k]*A[k][j];
    }
  }
}
for (j=1;j<=n;j++)
{
  if ((j-k)!=0)
    A[k][j]=-A[k][j]*A[k][k];
}

```

Расчет примера по методу обращения матриц. Берем тот же пример и ведем вычисления прямо по полученным формулам:

$$A = \begin{pmatrix} 20 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & 10 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 10 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{35}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{35}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{35} & \frac{1}{35} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{35} & \frac{4}{35} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{35}{2} & \frac{35}{1} & \frac{7}{60} & \frac{7}{10} \\ -\frac{7}{7} & -\frac{7}{7} & \frac{7}{7} & -\frac{7}{25} \end{pmatrix} \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{30} & \frac{7}{60} & \frac{1}{60} & \frac{1}{6} \\ \frac{30}{1} & \frac{60}{1} & \frac{60}{7} & \frac{6}{1} \\ \frac{30}{1} & \frac{60}{1} & \frac{60}{6} & \frac{6}{10} \end{pmatrix}$$

$$A^{(4)} = A^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{20} & \frac{8}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{20} \\ \frac{20}{1} & \frac{40}{1} & \frac{8}{1} & \frac{20}{3} \\ \frac{10}{10} & \frac{20}{20} & \frac{20}{20} & \frac{10}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ -30 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.6. Оценка сравнительной вычислительной эффективности метода обращения матрицы при многократном решении СЛАУ

В электротехнических расчетах часто приходится решать СЛАУ, в которых матрица коэффициентов одинакова, а изменяется столбец правых частей. В этом случае метод обращения матрицы имеет то явное преимущество, что наиболее трудоемкая часть расчетов, а именно вычисление обратной матрицы выполняется только один раз и для каждого столбца правых частей выполняется только умножение матрицы на столбец.

Поэтому если необходимо решить V таких уравнений, то метод обращения матрицы для этого случая определяется

$$M_{0(V)} = N^3 + VN^2 \quad \text{операций деления и умножения.}$$

Метод Гаусса в этом случае должен применяться в полном объеме для каждой операции левых частей и будет иметь

$$M_{\Gamma(V)} = VN(N^2 + 3N - 1)/3 \quad \text{операций деления и умножения.}$$

Из сопоставления этих выражений следует, что когда

$$V > 3N^2 / (N^2 - 1) \quad \text{т.е. } V > 3, \text{ а } N \geq 3.$$

метод обращения матрицы требует меньшего объема вычислений, чем метод Гаусса. Однако, сделать окончательный вывод о рациональности метода обращения матрицы было бы преждевременным, до рассмотрения эффективных методов решения, основанных на факторизации элементов матрицы, т.е. представления ее в виде матрицы сомножителей специального вида.

2.7. Многократное решение СЛАУ.

Метод треугольной факторизации матрицы коэффициентов.

Существо указанного метода заключается в том, что матрица коэффициентов A , СЛАУ вида

$$Ax = b$$

представляется в вид произведения нижней и верхней Δ -матрицы. Известно, что такое представление всегда возможно для неособенной матрицы A и при задании диагональных элементов одной из матриц сомножителей, а также оно единственное.

Представим $Ax = b$ в виде $LHx = b$

L, H – соответственно, нижняя и верхняя треугольные матрицы.

$$L = \begin{array}{|c|} \hline \diagup 0 \\ \hline \end{array} \quad H = \begin{array}{|c|} \hline 0 \diagdown \\ \hline \end{array}$$

и при таком представлении эта система может быть представлена в виде двух систем,

$$\begin{cases} Ly = b \\ Hx = y \end{cases}$$

из которых первая решается прямой подстановкой относительно (y) , а 2-ая – относительно (x) – обратной подстановкой.

Разбиение матрицы на матрицы L и H называется **треугольной факторизацией**.

Для определения факторизованных матриц L и H , произведение которых равно A , воспользуемся матричной записью прямого хода метода Гаусса, в результате которого матрица A приводится в верхний треугольник.

Пояснения существа преобразований будем вести на основе матрицы четвертого порядка, делая по мере необходимости обобщения, на случай порядка N .

На первом шаге исходная матрица коэффициентов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad \text{приводится к виду} \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} \\ 0 & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$a_{1j}^{(0)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}; \quad a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}a_{1j}^{(1)};$$

Это преобразование можно выполнить путем умножения матрицы А слева на матрицу:

$$T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_{41}}{a_{11}} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{(1)} = T_1 A$$

На втором шаге получаем матрицу $A^{(2)}$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} \end{pmatrix} \quad A^{(2)} = T_2 A^{(1)} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}^{(1)}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

На третьем шаге:

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(3)} \end{pmatrix} \quad A^{(3)} = T_3 A^{(2)}, \quad \text{где} \quad T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a_{33}^{(2)}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} & 1 \end{pmatrix}$$

На четвертом шаге:

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T_4 A^{(3)} \quad T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{44}^{(3)}} \end{pmatrix}$$

Т.е. матрица А приведется к верхней треугольной матрице $A^{(4)}$ с единичными диагональными элементами:

$$A^{(1)} = T_1 A; \quad A^{(2)} = T_2 A^{(1)}; \quad A^{(3)} = T_3 A^{(2)}; \quad A^{(4)} = T_4 A^{(3)};$$

$$H = A^{(4)} = T_4 A^{(3)} = T_4 T_3 A^{(2)} = T_4 T_3 T_2 A^{(1)} = T_4 T_3 T_2 T_1 A = TA$$

где $T = T_4 T_3 T_2 T_1$

Очевидно, что для системы порядка N:

$$H = A^{(N)} = \left(\prod_{i=1}^N T_i \right) A = TA$$

Отсюда следует, что

$$A = T^{-1}H = T_1^{-1}T_2^{-1}T_3^{-1}T_4^{-1}H$$

Рассмотрим, что такое T_1, T_2, T_3, T_4 ,

$$T_1^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 1 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32}^{(1)} & 1 & 0 \\ 0 & a_{42}^{(1)} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43}^{(2)} & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(3)} \end{pmatrix} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(2)} & 0 \\ a_{41} & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(3)} \end{pmatrix} = L$$

Если выполнить вычисления прямого хода метода Гаусса, т.е. расчеты по приведенным в начале лекции выражениям для $N = 4$ и $K = 1, 2, 3, 4$, то вместо матрицы A получим следующее:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ a_{21} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ a_{31} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(3)} \\ a_{41} & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(3)} \end{pmatrix} \quad \text{то есть элементы матриц } L \text{ и } H, \text{ записанные}$$

без нулей и единиц (на диагонали матрицы H).

Итак, разложение $A = LH$ получаем в результате выполнения прямого хода метода Гаусса по приведенным в начале темы выражениям. В литературе имеется доказательство того, что этот вывод справедлив для матрицы A любого порядка.

После разложения матрицы A на L и H прямой подстановкой решаем систему $Ly = b$, находя y . и обратной подстановкой решаем уравнение $Hx = y$.

Решение системы N линейных уравнений по методу треугольной факторизации матрицы коэффициентов требует столько же операций умножения и деления, что и метод Гаусса. Однако представление матрицы коэффициентов в факторизованном виде $A = LH$ делает этот метод более эффективным, чем метод Гаусса при решении V систем уравнений, отличающихся столбцами правых частей.

Действительно, в этом случае факторизация матрицы коэффициентов выполняется N раз, а V раз повторяется вычисление только y , x . Объем вычислений здесь меньше, чем в методе обращения матрицы коэффициентов путем перестановки столбцов и строк.

Таким образом, метод факторизации матрицы коэффициентов, основанный на вычислительной схеме прямого хода метода Гаусса, представляется наиболее предпочтительный для решения нескольких СЛАУ, отличающихся ее столбцами правой части. Это метод по объему вычислений не уступает методу Гаусса и при однократном решении СЛАУ. Однако здесь несколько меньшая компактность вычислительной схемы может привести к упрощению метода Гаусса. В общем случае для многократного решения СЛАУ с постоянной матрицей A и разными правыми частями (что часто бывает в электроэнергетических расчетах) наиболее предпочтителен метод треугольной факторизации.

На C++ метод треугольной факторизации программируется следующим образом:

```

n1=n-1;
for (k=1;k<=n1;k++)
{
    k1=k+1;
    for (j=k1;j<=n;j++)
    {
        A[k][j]=A[k][j]/A[k][k];
        for (i=k1;i<=n;i++)
            A[i][j]=A[i][j]-A[i][k]*A[k][j];
    }
}

B[1]=B[1]/A[1][1];
for (i=2;i<=n;i++)
{
    n1=i-1;
    for (j=1;j<=n1;j++)
    {
        B[i]=B[i]-A[i][j]*B[j];
        B[i]=B[i]/A[i][i];
    }
}
for(i1=2;i1<=n;i1++)
{
    i=n+1-i1;
    j=i+1;
    for (j=j1;j<=n;j++)
        B[i]=B[i]-A[i][j]*B[j];
}

```

Пример на рассматриваемый метод

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & 10 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 10 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 20 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -5 & \frac{35}{4} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -5 & -\frac{5}{4} & \frac{60}{7} & -\frac{1}{6} \\ -5 & -\frac{5}{4} & -\frac{10}{7} & \frac{10}{3} \end{pmatrix} \quad \text{- после первого и второго}$$

шагов

$$\begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & \frac{35}{4} & 0 & 0 \\ -5 & -\frac{5}{4} & \frac{60}{7} & 0 \\ -5 & -\frac{5}{4} & -\frac{10}{7} & \frac{10}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ -30 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \text{это система } Ly=b$$

$$\begin{aligned} y_1 &= -1 & x_1 &= 2 \\ y_2 &= -\frac{12}{7} & x_2 &= -4 \\ y_3 &= -\frac{13}{3} & x_3 &= -2 \\ y_4 &= 2 & x_4 &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{12}{7} \\ -\frac{13}{3} \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{это } Hx = b$$

2.8. Особенности решения СЛАУ электрических систем

Решение СЛАУ для электрических систем имеет следующие особенности:

1. Высокий порядок системы.
2. Симметричность матрицы коэффициентов.
3. Слабая заполненность этой матрицы.
4. Автоматически выполняет условие неравенства нулю диагонального элемента.

Использование метода узловых потенциалов.

$$Y_y \dot{U}_\Delta = \dot{J}$$

где Y_y - матрица узловых проводимостей порядка $(n-1)$;

\dot{U}_Δ - столбец $(n-1)$ напряжений (комплексных), узлов относительно базисного;

n - число узлов схемы замещения;

\dot{J} - столбец размера $(n-1)$, задающий токов узлов.

Причинами широкого использования указанных уравнений является простота формирования матрицы узловых проводимостей, простая вычислительная схема расчёта падений напряжений и токов ветвей при известных \dot{U}_Δ , а также использование 4 пункта, описанного выше.

Матрица узловых проводимостей обладает такими свойствами как симметричность, слабая заполненность, учет которых позволяет значительно уменьшить объем вычислений при решении узловых уравнений.

2.9. Учет симметричности матрицы узловых проводимостей

Это свойство матрицы узловых проводимостей нарушается только при учёте в схеме замещения электрической системы трансформаторов с комплексными коэффициентами трансформации.

В большом числе исследований установившихся режимов трансформаторы учитываются в схеме замещения электрической системы либо элементами, включающими сопротивление и идеальные трансформаторы с вещественными коэффициентами трансформации, либо только сопротивлениями приведения схемы замещения к одной ступени напряжения.

В этом случае матрица узловых проводимостей является симметричной.

При решении СЛАУ $ax = b$ симметричной матрицы (коэффициенты $a_{ij} = a_{ji}$) в процессе вычисления прямого хода метода Гаусса сохраняется симметричность прямого хода диагонального блока, расположенного правее и ниже ведущего элемента:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)}$$

Это следует из расчётных выражений.

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad i, j = k+1, \dots, N$$

$$\text{Если } a_{ij}^{(k-1)} = a_{ji}^{(k-1)}$$

После нескольких шагов это выражение приводится к виду

$$a_{ji}^{(k)} = a_{ji} - a_{jk}^{(k-1)} a_{ki}^{(k)} = a_{ji}^{(k-1)} - \frac{a_{jk}^{(k-1)} a_{ki}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} = a_{ij}^{(k)}.$$

То есть если исходная матрица симметрична, то и соответствующий диагональный блок $a_{ij}^{(k)}$ при $i, j = k+1, \dots, N$ будет симметричным на каждом шаге прямого хода метода Гаусса с шагом $k = 1, \dots, N-1$.

Этот факт наглядно виден на примере метода Гаусса.

Указанное свойство сохранения симметрии позволяет более рационально организовать вычислительный процесс прямого хода метода Гаусса. Например, можно оперировать только нижней Δ подматрицы A (включая главную диагональ), заполняя в процессе вычисления верхнюю Δ -подматрицу элементами ведущей строки для каждого шага при $i \neq j$.

Рассмотрим схему построение такого вычислительного процесса на примере системы 4-го порядка, вводя в расчет только нижнюю Δ подматрицу симметричной матрицы коэффициентов.

Обозначим остальные неиспользуемые элементы в вычислениях x . В этом случае система уравнений примет следующий вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & x & x & x \\ a_{21} & a_{22} & x & x \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & x \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

На первом шаге пересчитывается диагональный блок нижней треугольной подматрицы для $i, j > 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & x & x \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & x \\ 0 & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ b_4^{(1)} \end{pmatrix}$$

Пересчитываются по следующим выражениям

$$b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}} \quad b_i^{(1)} = b_i - a_{i1} b_1^{(1)} \quad a_{1i}^{(1)} = \frac{a_{i1}}{a_{11}} \quad a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1} a_j^{(1)}$$

На втором шаге вычисления выполняются аналогично

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & x \\ 0 & 0 & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(2)} \\ b_4^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$b_2^{(2)} = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - a_{i2}^{(1)} b_2^{(2)} \quad a_{2j}^{(2)} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} a_{2j}^{(2)}$$

На третьем шаге вычисления аналогичны.

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(3)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ b_4^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$b_3^{(3)} = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \quad b_4^{(3)} = b_4^{(2)} - a_{43}^{(2)} b_3^{(3)} \quad a_{34}^{(3)} = \frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \quad a_{44}^{(3)} = a_{44}^{(2)} - a_{43}^{(2)} a_{34}^{(2)}$$

На четвертом шаге:

$$b_4^{(4)} = \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ b_4^{(4)} \end{pmatrix}$$

Вычисление обратного хода выполняется так же, как и ранее. (см. метод Гаусса).

Вычислительная схема прямого хода метода Гаусса с учётом симметричности матрицы коэффициентов легко обращается на общий случай N уравнений. В этом случае от $k = 1..N$. Это представляется следующим образом

$$b_k^{(k)} = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad i = k+1, \dots, N$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} b_k^{(k)} \quad j = k+1, \dots, i$$

$$a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad b_N^{(N)} = \frac{b_N^{(N-1)}}{a_{NN}^{(N-1)}}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)}$$

Программа реализации расчетных формул прямого хода метода Гаусса с учётом симметричности практически та же, что и в обычном методе Гаусса. Отличается только порядком следования индексов в выражениях для $a_{kj}^{(k)}$ на k -ом шаге и конечным значением параметра цикла j .

На C++ указанные особенности метода реализуются следующим образом:

```
n1=n-1;
for (k=1;k<=n1;k++)
{
    B[k]=B[k]/A[k][k];
    k1=k+1;
    for (i=k1;i<=n;i++)
    {
        A[k][i]=A[i][k]/A[k][k];
        B[i]=B[i]-A[i][k]*B[k];
        for (j=k1;j<=i;j++)
            A[i][j]=A[i][j]-A[i][k]*A[k][j];
    }
}
B[n]=B[n]/A[n][n];
```

Очевидно, что в результате выполнения расчётов по приведенным формулам на месте элементов матрицы A получим элементы матриц L и H факторизованной матрицы A , записанных без нулей и единиц. Это позволяет записать алгоритм Δ факторизации матрицы A .

$$a_{ki}^{(k)} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}$$

$$k = 1, \dots, N-1 \quad i = k+1, \dots, N-1 \quad j = k+1, \dots, i$$

В С++ указанные выражения для нахождения факторизованной матрицы с учётом симметрии исходных выглядит следующим образом:

```

n1=n-1;
for (k=1;k<=n1;k++)
{
    k1=k+1;
    for (i=k1;i<=n;i++)
    {
        A[k][i]=A[i][k]/A[k][k];
        for (j=k1;j<=i;j++)
            A[i][j]=A[i][j]-A[i][k]*A[k][j];
    }
}

```

Существенная экономия в объёме вычислений при учёте симметричности матрицы коэффициентов достигается для относительно больших порядков N систем уравнений. Последнее характерно для задач и расчётов сложных электрических схем и, следовательно, учёт симметрии при этом весьма важен.

2.10. Учёт слабой заполненности матрицы узловых проводимостей

Как известно, матрица узловых проводимостей формируется следующим образом: каждый диагональный элемент Y_{ii} равен сумме проводимостей ветвей, связанных с соответствующим узлом (i) схемы замещения электрической системы, а каждый недиагональный элемент Y_{ij} равен проводимостям ветвей, связывающей соответствующие узлы i, j , взятым с обратным знаком. Отсюда следует, что для матрицы узловых проводимостей, составленной для всех узлов схемы замещения, из общего числа элементов N^2 будет $N + 2m$ ненулевых, где m - число ветвей. А остальные $N^2 - (N + 2m)$ элементов будут нулевыми.

Для схемы замещения сложных электрических систем обычно выполняется соотношение $m \approx 1,5n$. Число нулевых элементов матрицы узловых проводимостей составляет примерно $4n$. Для больших n матрица узловых проводимостей содержит большое количество нулей, то есть является слабо заполненной, и вычислительные алгоритмы с узловыми проводимостями целесообразно организовать так, чтобы оперировать только с ненулевыми элементами.

При решении узловых уравнений методом Гаусса матрица узловых проводимостей пересчитывается в процессе прямого хода, в результате чего в ней появляются новые ненулевые элементы, то есть её заполненность возрастает. Очевидно, что степень такого возрастания на каждом шаге k будет тем больше, чем больше ненулевых элементов в строке k матрицы $A^{(k-1)}$. Поскольку разные строки матрицы A содержат в общем случае разное число элементов (к разным узлам подключено разное число ветвей), то выбор нумерации узлов, то есть порядка следования узловых напряжений, определяет изменение степени заполненности матрицы в процессе вычисления прямого хода метода Гаусса. Оптимальной здесь будет такая нумерация, которая приводит к минимальному увеличению степени заполненности матрицы A .

Определение оптимальной схемы нумерации является весьма сложной задачей, и на практике применяют простые методы, дающие решения, близкие к оптимальному.

Метод узловых потенциалов более выгоден для составления квадратной матрицы коэффициентов:

- слабая заполненность;
- симметричность;
- $\Delta \neq 0$.

Один из таких способов нумерации состоит в том, что узлы нумеруются в порядке возрастания числа связанных с ним ветвей. Таким образом, уравнения располагаются в порядке возрастания числа ненулевых элементов. При этом для сохранения симметричности матрицы перестановка уравнений должна сопровождаться соответствующей перестановкой неизвестных.

Рассмотрим эффект такой нумерации на примере системы четырёх уравнений:

$$\begin{aligned} 20x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 &= -20 \\ -5x_1 + 10x_2 &= -10 \\ -5x_1 + 10x_3 &= -30 \\ -5x_1 + 5x_4 &= 20 \end{aligned}$$

В матрице коэффициентов этой системы 6 элементов из 16-ти равны нулю. Однако порядок следования этих уравнений крайне нерационален, поскольку первым идёт уравнение с максимальным числом ненулевых элементов (число связей первого узла равно трём), а далее следуют уравнения, каждое из которых содержит два ненулевых коэффициента.

В результате этого после выполнения первого шага прямого хода метода Гаусса матрица третьего порядка, которая должна пересчитываться на следующем шаге, становится полностью заполненной, и, следовательно, экономии вычислений за счёт нулей исходной матрицы не будет (см. метод Гаусса).

В соответствии с указанным выше способом нумерации для учёта слабой заполненности матрицы коэффициентов достаточно первое уравнение сделать последним и соответственно изменить порядок следования неизвестных, то есть записать исходную систему в следующем виде:

$$\begin{cases} 10x_2 & -5x_1 & = -10 \\ & 10x_3 & -5x_1 & = -30 \\ & & 5x_4 & -5x_1 & = 20 \\ -5x_2 & -5x_3 & -5x_4 & +20x_1 & = -20 \end{cases}$$

$k = 1$

$$\begin{cases} x_2 & -\frac{1}{2}x_1 & = -1 \\ & 10x_3 & -5x_1 & = -30 \\ & & 5x_4 & -5x_1 & = 20 \\ & -5x_3 & -5x_4 & +\frac{35}{2}x_1 & = -25 \end{cases}$$

$k = 2$

$$\begin{cases} x_2 & -\frac{1}{2}x_1 & = -1 \\ & x_3 & -\frac{1}{2}x_1 & = -3 \\ & & 5x_4 & -5x_1 & = 20 \\ & & -5x_4 & 15x_1 & = -40 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_2 & -\frac{1}{2}x_1 & = -1 \\ x_3 & -\frac{1}{2}x_1 & = -3 \\ x_4 & -x_1 & = 4 \\ & 10x_1 & = -20 \end{array} \right. \quad k=3$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_2 & -\frac{1}{2}x_1 & = -1 \\ x_3 & -\frac{1}{2}x_1 & = -3 \\ x_4 & -x_1 & = 4 \\ & x_1 & = -2 \end{array} \right. \quad k=4 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -2 \\ x_3 = -4 \\ x_4 = 2 \\ x_2 = -2 \end{array} \right.$$

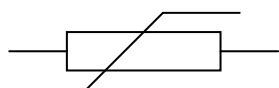
Такой порядок вычислений потребовал 16 операций умножения и деления вместо 36-ти при исходной нумерации уравнений, то есть объём вычислений сократился более чем в 2 раза.

Для узловых уравнений высокого порядка эффект ещё более значителен, поэтому алгоритмы и программы расчёта установившихся режимов электрических систем составляются с обязательным учётом слабой заполненности.

Ещё раз отметим основные свойства матрицы узловых проводимостей:

- 1) диагональный элемент всегда не равен нулю, т. е. $a_{ii} \neq 0$;
- 2) a_{ii} - максимальный в данной строке;
- 3) матрица симметрична в большинстве расчётных случаев;
- 4) матрицы разреженные.

3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (НСАУ) УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ РАБОТЫ



НЭ

(тр-тр, ЛН, Дуговые печи, магн. эл-ты)

Нелинейность уравнений установившегося режима обусловлена тем, что в качестве исходных данных задаются не токи, а мощности источников и потребителей электрической энергии. Обычно активные и реактивные мощности потребителей (нагрузок) и активные модули (напряжений) источников.

Для простоты изложения ниже будем рассматривать частный случай, когда заданы активные и реактивные мощности как потребителей, так и источников электроэнергии. В этом случае для энергосистемы произвольной конфигурации, схема замещения которой содержит n узлов, задача расчёта установившегося режима формулируется следующим образом: для заданных параметров схемы замещения моделируемой системы напряжение базисного узла (балансирующего) и мощность остальных $n-1$ узлов определить комплексные значения напряжений этих узлов.

Уравнение установившегося режима обычно записывается для линейных (междуфазных) значений напряжений и имеет следующий вид:

1) уравнение мощностей независимых (то есть всех, кроме балансирующего) узлов:

$$\dot{S} = \sqrt{3} \dot{U}_\delta \hat{J} \quad (1)$$

2) узловые уравнения:

$$Y_y \dot{U}_\Delta = \sqrt{3} \hat{J}; \quad \dot{U}_\Delta = \dot{U} - n \dot{U}_\delta. \quad (2)$$

Здесь:

$S = P + jQ$ - вектор размера $n - 1$ комплексных значений заданных мощностей узлов;

\dot{U}_δ - диагональная матрица порядка $n - 1$ комплексных значений напряжений узлов;

$\dot{U}_\Delta = \dot{U} - n \dot{U}_\delta$ - вектор напряжений узлов относительно балансирующего;

n - единичный столбец;

\dot{U}_δ - напряжение балансирующего узла, значение которого общепринято задавать вещественным числом;

Y_y - квадратная матрица $n - 1$ комплексных значений узловых проводимостей;

\hat{J} - вектор комплексных значений задающих токов узлов;

Δ - комплексно сопряжённое значение.

Определим из уравнения (1) \hat{J} :

$$\hat{J} = \frac{\hat{S} \hat{U}_\delta^{-1}}{\sqrt{3}} \quad (3)$$

и подставим в уравнение (2); получим:

$$Y_y \dot{U}_\Delta = \hat{S} \hat{U}_\delta^{-1},$$

где

$\dot{U}_{\Delta\delta}$ - диагональная матрица напряжений узлов относительно балансирующего;

E - единичная матрица.

Получим окончательное уравнение установившегося режима относительно самих переменных U_Δ :

$$Y_y \dot{U}_\Delta = (\dot{U}_{\Delta\delta} - E \dot{U}_\delta)^{-1} \hat{S},$$

или в развёрнутой форме:

$$\sum_{i=1}^{n-1} Y_{ij} \dot{U}_{\Delta j} = \frac{\hat{S}_i}{U_{\Delta i} + U_\delta}.$$

Полученная система нелинейных уравнений может быть решена только итерационными методами. Общая схема решения состоит в том, что задаётся некоторое начальное приближение $\dot{U}_\Delta^{(0)}$, и по расчётным выражениям системы уравнений определяется следующее приближение $\dot{U}_\Delta^{(1)}$. Процесс вычислений продолжается до тех пор, пока на некотором приближении (итерации) не будет достигнута заданная точность решения, которая оценивается по расхождению значений \dot{U}_Δ двух последних итераций:

$$\max_i |\dot{U}_{\Delta i}^{(k)} - \dot{U}_{\Delta i}^{(k-1)}| \leq \varepsilon,$$

либо по вектору невязок $\dot{r} = Y_{ij} \dot{U}_{\Delta j} - \frac{\hat{S}_i}{U_{\Delta i} + U_\delta} :$

$$\max_i |\dot{r}_i^{(k)}| \leq \varepsilon.$$

Для рассмотрения различных итерационных методов расчёта различных электрических систем можно упростить задачу, полагая, что величины, входящие в уравнения системы, вещественны:

$$\sum_{j=1}^{n-1} Y_{ij} U_{\Delta j} = \frac{P_i}{U_{\Delta i} + U_{\delta}} \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Такое уравнение соответствует рассмотрению цепи постоянного тока.

Внесённые упрощения позволяют значительно уменьшить сложность вычислений и тем самым дают большую наглядность для оценки сравнительных достоинств и недостатков в различных методах, качественные характеристики которых при данных упрощениях не изменяются.

Перейдём к более простым обозначениям, которые использовались при рассмотрении методов решения СЛАУ. При этом последнее уравнение переписывается в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} x_j = b_j = \frac{C_i}{x_i + x_0}, \quad i = 1, \dots, N, \quad N = n-1,$$

где C_i - значение мощности, x_0 - значение базисного узла.

Конкретные расчёты будем выполнять для системы из четырёх уравнений, которая рассматривалась в предыдущем разделе с введением нелинейности, которая, согласно последней записи, будет иметь вид:

$$\begin{cases} 10x_1 & & -5x_4 & = \frac{480}{50 + x_1} \\ & 10x_2 & -5x_4 & = -\frac{1380}{50 + x_2} \\ & & 5x_3 & -5x_4 & = \frac{1040}{50 + x_3} \\ -5x_1 & -5x_2 & -5x_3 & +20x_4 & = -\frac{960}{50 + x_4} \end{cases}$$

3.1. Метод простой итерации

Итерационный процесс решения описанной выше системы выполняется следующим образом:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(\frac{C_i}{x_0 + x_i^{(k)}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} x_j^{(k)} \right).$$

Для конкретно рассматриваемой системы уравнений это отвечает расчётным выражениям:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -\frac{48}{50 + x_1^{(k)}} + 0,5x_4^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= -\frac{138}{50 + x_2^{(k)}} + 0,5x_4^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{208}{50 + x_3^{(k)}} + x_4^{(k)} \\ x_4^{(k+1)} &= -\frac{48}{50 + x_4^{(k)}} + 0,25x_1^{(k)} + 0,25x_2^{(k)} + 0,25x_3^{(k)} \end{aligned}$$

Выполним расчёты по этим выражениям, выбрав в качестве начального приближения $x_i^{(0)} = 0$, что отвечает в практике расчётов установившихся режимов, в которых обычно принимают $U_{\Delta i}^{(0)} = 0 = \dot{U}_{\delta}$. Результаты вычислений для данной системы уравнений представим в

виде таблицы. Вычисления прекращаются по условию $\Delta_{\max}^{(k)} < \varepsilon$, где $\Delta_{\max}^{(k)}$ - максимальное значение в столбце на разнице модулей левой части уравнения, то есть $\Delta_{\max} = \max_i |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$.

k	0	1	2	3	4	...	14	...	23
$x_1^{(k)}$	0	-0,96	-1,439	-1,423	-1,724	...	-1,991	...	-2
$x_2^{(k)}$	0	-2,76	-3,401	-3,396	-3,697	...	-3,99	...	-4
$x_3^{(k)}$	0	4,16	2,88	3,065	2,448	...	2,015	...	2
$x_4^{(k)}$	0	-0,96	-0,869	1,472	-1,428	...	1,981	...	-2
$\Delta_{\max}^{(k)}$	-	4,16	1,28	0,603	0,617	...	0,02	...	0,000

Итерационный процесс решения системы нелинейных уравнений сошёлся к решению с точностью $\Delta_{\max} \leq \varepsilon = 10^{-3}$ за 23 итерации. При этом $x_1 < x_0$, что характерно для расчётов нормальных режимов электрических систем, то в правой части уравнений рассматриваемой системы в процессе расчёта изменились несущественно, что говорит о том, что нелинейность уравнений не проявилась сколько либо значительно. Это было подтверждено сравнительными расчётами, выполненными для СЛАУ, полученной для СЛАУ данной системы путём фиксации правых частей на значениях, соответствующих решениям системы.

Результаты расчёта в виде зависимости числа итераций, необходимых для получения решения системы нелинейных k уравнений, от заданной точности приведены в следующей таблице:

ε	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
k	23	29	37	43
$k_{\text{л}}$	21	29	35	41

Результаты свидетельствуют о том, что нелинейность незначительно влияет на скорость сходимости итерационного процесса к решению. Объём вычислений в методе простой итерации, оцениваемый по числу операций умножения и деления, для приведенной системы уравнений вполне определяется следующими составляющими:

1. Приведение исходной системы уравнений к расчётному виду требует N^2 операций умножения и деления.
2. Расчёт последующего приближения на каждой итерации требует также N^2 операций умножения и деления.

Таким образом, при достижении решения за k итераций методом простых итераций будет выполнено $M_{\text{ит}} = N^2 + kN^2 = N^2(1 + k)$.

К достоинствам метода следует отнести практически абсолютную сходимость независимо от того, какие начальные приближения выбираются.

К недостаткам можно отнести медленную по сравнению с другими методами сходимость.

3.2. Метод Зейделя

Итерационный процесс решения систем нелинейных уравнений по методу Зейделя описывается с помощью следующей вычислительной схемы:

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(\frac{C_i}{x_0 + x_i^{(k)}} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Для конкретно рассматриваемой системы это соответствует следующим расчётным выражениям:

$$\begin{aligned}
x_i^{(k+1)} &= -\frac{48}{50 + x_i^{(k)}} + 0,5x_4^{(k)} \\
x_2^{(k+1)} &= -\frac{138}{50 + x_2^{(k)}} + 0,5x_4^{(k)} \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{208}{50 + x_3^{(k)}} + x_4^{(k)} \\
x_4^{(k+1)} &= -\frac{48}{50 + x_4^{(k)}} + 0,25x_1^{(k+1)} + 0,25x_2^{(k+1)} + 0,25x_3^{(k+1)} + 0,25x_4^{(k+1)}
\end{aligned}$$

$x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$, $x_3^{(k+1)}$, найденные на $(k+1)$ -м шаге, подставляются в $x_4^{(k+1)}$.

Отличие метода простой итерации проявляется для определения расчётного выражения x_4 на $(k+1)$ -м шаге. Результаты расчётов по приведенной системе сведём в таблицу, приведенную ниже.

k	0	1	2	3	4	...	10	...	14
$x_1^{(k)}$	0	-0,96	-1,404	-1,696	-1,844	...	-1,997	...	-2
$x_2^{(k)}$	0	-2,76	-3,346	-3,666	-3,829	...	-3,997	...	-4
$x_3^{(k)}$	0	4,16	2,99	2,509	2,29	...	2,005	...	2
$x_4^{(k)}$	0	-0,85	-1,416	-1,701	-1,847	...	-1,997	...	-2
Δ_{\max}	-	4,16	1,17	0,482	0,249	...	0,004	...	0,000

Скорость сходимости итерационного процесса метода Зейделя в данном случае заметно выше, чем в методе простой итерации (14 вместо 23 итераций). При этом, как и в методе простой итерации, нелинейность уравнений сказывается на ходе итерационного процесса незначительно, что видно из приведенной ниже таблицы.

ε	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
k	14	16	20	23
$k_{\text{л}}$	12	16	19	22

Поскольку объём вычислений на итерации, определяемый количеством операций умножения и деления, в методе Зейделя и простой итерации одинаковы, то в расчётах установившихся режимах предпочтение отдаётся методу Зейделя, обеспечивающему обычно более быструю сходимость.

Одним из путей дальнейшего повышения скорости сходимости является переход к более общей формулировке метода Зейделя, при которой порядок пересчёта и порядок пересчитываемых переменных в ходе итерационного процесса определяется не порядком записи уравнений, а следующим условием: каждый раз пересчитывается x_i , для которого $\Delta_i = |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$ максимально. Такой метод называется *методом полной релаксации*.

3.3. Метод полной релаксации

Результаты расчётов этим методом для системы уравнений, приведенной выше, приведём в таблице, где N - порядок пересчёта на итерациях:

k	0	1	2	3	4	10	...	14
$x_1^{(k)}$	0	-0,96	-1,852	-1,632	-1,863	-1,998	...	-2

$x_2^{(k)}$	0	-2,7	-3,346	-3,746	-3,854	-3,997	...	-4
$x_3^{(k)}$	0	4,16	2,94	2,378	2,23	2,004	...	2
$x_4^{(k)}$	0	-0,85	-1,306	-1,575	-1,741	-1,995	...	-2
Δ_{\max}	-	4,16	1,17	0,399	0,231	0,004	...	0
N	-	3214	3241	3421	4132	4321	...	4321

Нелинейность исходных уравнений, как и ранее, практически не влияет на скорость сходимости, что видно из следующей таблицы:

ε	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
k	13	16	20	23
$k_{\text{л}}$	12	16	19	22

Как следует из сопоставления результатов расчёта для исходной системы уравнений по методу Зейделя и методу полной релаксации скорость сходимости в обоих случаях практически одинакова.

Метод полной релаксации рационально применять только в том случае, если он обеспечивает заметно более быструю сходимость, чем метод Зейделя. Действительно, хотя число операций умножения и деления при решении системы уравнений порядка N по методу полной релаксации на шаге итерации, то есть при пересчёте N переменных, будет для исходной системы той же, что и для метода Зейделя. И сама реализация последовательности по $\max \Delta_i$ приводит к усложнению и соответственно замедлению действия алгоритма.

Другим путём увеличения скорости сходимости метода Зейделя является введение коэффициента ускорения q , в соответствии с которым в качестве следующего приближения принимается следующее значение x :

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - q(x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})$$

$$q = 0 \quad x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} \quad (\text{переход к методу Зейделя})$$

Расчёты для исходной системы при $\varepsilon = 10^{-3}$ и разных значениях q приведены в таблице:

q	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
k	13	10	7	8	10	11
$k_{\text{л}}$	12	9	7	7	11	11

Отсюда следует, что выбором коэффициента q можно добиться заметного ускорения метода Зейделя ценой увеличения на N числа операций умножения на каждой итерации, что лишь незначительно сказывается на объёме вычислений. Однако общих методов выбора целесообразного значения коэффициента q не существует. Известно лишь, что для СЛАУ с положительно определённой матрицей коэффициентов q находится в интервале от 0 до 2. Опыт расчётов показывает, что целесообразное значение q может заметно отличаться от 1 в ту или другую сторону.

Введение коэффициента ускорения считается целесообразным только при проведении массовых расчётов режимов заданной энергосистемы, для которой уравнения отличаются только правой частью и, возможно, незначительными изменениями a_{ij} значений. Тогда вариантными расчётами одного режима определяются значения q , обеспечивающие наиболее быструю сходимость, и расчёты остальных режимов проводятся при этом значении q .

3.4. Решение НАСУ на основе метода Гаусса

Анализ решения нелинейных алгебраических систем уравнений (НАСУ) на основе метода простой итерации и на основе метода Зейделя показывает, что нелинейность уравнений

незначительно сказывается на скорости сходимости итерационных процессов. Поэтому выбор итерационного метода решения, который при неучёте нелинейности трансформируется в прямой метод (или решает СЛАУ за одну итерацию), позволяет значительно ускорить сходимость по сравнению с методом Зейделя.

Рассматриваемый метод является таким методом, сущность которого состоит в том, что x_i накапливаются определяется путём решения прямого метода для СЛАУ, которая получается из исходной системы путём подстановки b_i (значений столбца), которые вычисляются при $x_i^{(k)}$ на k -м шаге, что, в свою очередь, соответствует итерационному процессу, описывается:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j^{(k+1)} = \frac{C_i}{x_0 + x_i^{(k)}}$$

Для решения на каждой итерации СЛАУ рационально использовать метод треугольной факторизации матрицы A . Так как в процессе итерации эта матрица изменяется, то наиболее ёмкая в вычислительном отношении процедура факторизации выполняется один раз, а на каждой итерации прямой и обратной подстановкой решаются СЛАУ с треугольными L и H . Число операций умножения и деления в данном методе (назовём его условно методом Гаусса-Зейделя) можно определить следующим образом:

$$M_{ГЗ} = \frac{N(N^2 - 1)}{3} + kN(N + 1),$$

где $\frac{N(N^2 - 1)}{3}$ - приведение к факторизованному виду; $kN(N + 1)$ - выполнение на каждой итерации метода Зейделя.

Сравнивая с количеством операций, требуемых в методе Зейделя, видим, что метод Гаусса-Зейделя более эффективен в отношении, если

$$K_{ГЗ} < \frac{N \left(K_3 - \frac{N}{3} + 1 \right)}{N + 1}.$$

Для оценки скорости сходимости метода Гаусса-Зейделя рассмотрим итерационный процесс решения системы из четырёх уравнений.

Факторизованная матрица имеет вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & -0,5 & & \\ 0 & 10 & 0 & -0,5 & & \\ 0 & 0 & 5 & -1 & & \\ -5 & -5 & -5 & 10 & & \end{array} \right)$$

Результаты расчётов по итерациям отображены в следующей таблице:

k	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(k)}$	0	-1,81	-1,991	-1,999	-2,000	-2
$x_2^{(k)}$	0	-3,61	-3,97	-3,997	-4,000	-4
$x_3^{(k)}$	0	2,46	1,974	2,004	2,000	2
$x_4^{(k)}$	0	-1,7	-1,991	-1,996	-2,000	-2
Δ_{\max}	-	3,6	0,486	0,03	0,004	0,000

Как и следовало ожидать, скорость сходимости здесь значительно выше, чем в методе Зейделя, что наглядно следует из приведенных в таблице данных.

3.5. Сравнительная оценка скорости сходимости метода Гаусса-Зейделя, метода Зейделя

ε	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
$k_{ГЗ}$	5	6	7	8
k_3	14	16	20	23

В соответствии с результатами, приведенными в таблице, можно сделать вывод, что метод Гаусса-Зейделя для рассмотренного примера гораздо эффективнее в вычислительном отношении, чем метод Зейделя (≈ 3 раза).

3.6. Метод Ньютона

Самый эффективный, но и самый сложный в вычислительном отношении метод решения СНАУ – итерационный процесс решения системы нелинейных уравнений вида $W(x) = 0$, где x – вектор N искомых переменных, а W – это вектор-функция. Для метода Ньютона имеет следующий вид:

$$W(x) = 0$$

$$\left. \frac{\partial W(x)}{\partial x} \right|_{x=x^{(k)}} \Delta x^{(k+1)} = -W(x^{(k)})$$

Величина $\frac{\partial W(x)}{\partial x}$ – частных производных, матрица Якоби; $\Delta x^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ – разница приближений.

Для рассматриваемой системы компонентами являются:

$$W_i(x^{(k)}) = \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j - \frac{C_i}{x_0 + x_i^{(k)}}.$$

При дифференцировании Якобиан $\left(\frac{\partial W(x)}{\partial x} \right)_{ij}$ будет следующим:

$$\left(\frac{\partial W(x)}{\partial x} \right)_{ij} = \begin{cases} i = j, & a_{ii} + \frac{C_i}{(x_0 + x_i^{(k)})^2} \\ i \neq j, & a_{ij} \end{cases}.$$

Для конкретно рассматриваемой системы исходная итерационная формула с учётом последней записи будет следующей:

$$\begin{pmatrix} 10 - \frac{480}{(50 + x_1^{(k)})^2} & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 10 - \frac{1380}{(50 + x_2^{(k)})^2} & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 5 + \frac{1040}{(50 + x_3^{(k)})^2} & 0 \\ 5 & -5 & -5 & 20 - \frac{960}{(50 + x_4^{(k)})^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Delta x_1^{(k+1)} \\ \Delta x_2^{(k+1)} \\ \Delta x_3^{(k+1)} \\ \Delta x_4^{(k+1)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -10x_1^{(k)} - \frac{480}{50 + x_1^{(k)}} + 5x_4^{(k)} \\ -10x_2^{(k)} - \frac{1380}{50 + x_2^{(k)}} + 5x_4^{(k)} \\ -5x_3^{(k)} + \frac{1040}{50 + x_3^{(k)}} + 5x_4^{(k)} \\ -5x_1^{(k)} + 5x_2^{(k)} + 5x_3^{(k)} - 20x_4^{(k)} - \frac{960}{50 + x_4^{(k)}} \end{pmatrix}$$

Система уравнений решается относительно $\Delta x_i^{(k+1)}$ на $k+1$ приближении по методу Гаусса. Результаты расчёта по итерациям приведены в таблице:

3.7. Ход итерационного процесса метода Ньютона

k	0	1	2	3
$x_1^{(k)}$	0	-1,993	-2	-2
$x_2^{(k)}$	0	-3,974	-4	-4
$x_3^{(k)}$	0	2,005	2	2
$x_4^{(k)}$	0	-1,989	-2	-2
$\Delta x_1^{(k)}$	-	-1,993	-0,007	0
$\Delta x_2^{(k)}$	-	-3,974	-0,026	0
$\Delta x_3^{(k)}$	-	2,005	-0,005	0
$\Delta x_4^{(k)}$	-	-1,989	-0,011	0
$\max_i (W_i(x^{(k)}))$	27,6	0,189	0,000	0,000
$\max_i (\Delta x_i^{(k)})$	-	3,974	0,026	0,000

Итерационный процесс сошёлся за три итерации.

Квадратичная сходимость метода Ньютона в малой окрестности точки решения обуславливает слабую зависимость числа итераций от точности ε . Это будет видно из следующей таблицы:

ε	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
k_H	3	3	3	4

Удобной мерой точности решения может служить максимальное абсолютное значение $\max_i |W_i(x^{(k)})| < \varepsilon$. Условие окончания счёта снижает количество итераций на единицу при той же точности.

Применение указанного условия в сочетании с самой процедурой метода Ньютона состоит из однотипных вычислительных операций, выполняемых на каждой итерации.

Для исходной системы уравнений количество операций умножения и деления определяется:

- 1) расчётом правых частей $N(N+1)$ операций умножения и деления;
- 2) расчётом диагональных элементов матрицы Якоби - $2N$ операций умножения и деления;

- 3) решение СЛАУ по методу Гаусса: количество операций - $\frac{N(N^2 + 3N - 1)}{3}$.

Следовательно, суммарное количество операций умножения и деления при решении системы уравнений по методу Ньютона будет следующим:

$$M_H = \frac{kN(N+2)(N+4)}{3}$$

где k - количество итераций.

Сравнение расчётов по методу Ньютона и Гаусса-Зейделя показывает, что метод Ньютона более трудоёмок, поскольку требует решения СЛАУ на каждой итерации, в то время как в методе Гаусса-Зейделя наиболее трудоёмкая часть вычислений, а именно факторизация матриц, выполняется один раз.

Критерием эффективности метода Гаусса-Зейделя будет неравенство:

$$k_{ГЗ} > (k_H - 1) \frac{N}{3}.$$

Приведенное неравенство не в пользу метода Ньютона. Тем не менее, этот метод широко применяется для расчётов установившихся режимов установившихся систем в связи с быстрой и надёжной сходимостью, в связи с возможностью простого учёта различной формы задания исходных данных для генераторных и нагрузочных узлов.

Кроме вышесказанного, метод Ньютона допускает снижение объёма вычислений на итерации, если перейти от исходной формулы $\left. \frac{\partial W(x)}{\partial x} \right|_{x=x^{(0)}} \Delta x^{(k+1)} = -W(x^{(k)})$ к следующей.

Таким образом, вычислять матрицу Якоби приходится один раз при $x = x^{(0)}$.

Последнее обстоятельство позволяет представить данную матрицу в факторизованном виде и на каждой итерации решать две системы уравнений с треугольными L и H , что было в принципе невозможно при классическом методе Ньютона, поскольку Якобиан считался на каждой итерации.

Модернизированный метод Ньютона позволяет влиять только на условие сходимости; количество операций умножения и деления резко уменьшается, и такой модифицированный метод Ньютона будет в вычислительном отношении эффективнее метода Гаусса-Зейделя при условии $k_{ГЗ} > 2k'_H$ (k'_H - для модернизированного метода Ньютона).

Это условие справедливо для больших N , что характерно для реальных задач систем энергоснабжения. Если применить этот модернизированный метод для системы из четырёх уравнений, рассмотренной ранее, то расчёт потребует на одну итерацию больше, чем по классическому методу.

Уравнение установившегося режима энергосистемы часто записывают в виде уравнения баланса мощности, которое представляет из себя следующее:

$$\hat{U} Y_y \hat{U}_\Delta = \hat{S},$$

что позволяет одинаково просто оперировать исходными данными как в виде полных мощностей узлов, так и в виде модулей мощностей напряжений.

Рассматриваемые в этом случае уравнения примут следующий вид:

$$(\dot{U}_\Delta + \dot{U}_\varepsilon) \sum_{j=1}^{n-1} Y_{ij} U_{\Delta j} = P_i, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Либо в принятых обозначениях:

$$(x_i + x_0) \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j = C_i, \quad i = 1, \dots, N$$

При решении этой системы уравнений по методу Ньютона

$$W_i(x^{(k)}) = (x_i^{(k)} + x_0) \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j^{(k)} - C_i.$$

При этом Якобиан вычисляется только один раз и распадается на составляющие:

$$\left(\frac{\partial W(x)}{\partial x}\right)_{ij} = \begin{cases} i = j, & \sum_{j=1}^N a_{ij}x_j + a_{ii}(x_i + x_0) \\ i \neq j, & a_{ij}(x_i + x_0) \end{cases}$$

Для конкретно рассматриваемой системы уравнений итерационная формула модернизированного метода Ньютона примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 20x_1^{(k)} - 5x_4^{(k)} + 500 & 0 & 0 & -5(x_1^{(k)} + 50) \\ 0 & 20x_2^{(k)} - 5x_4^{(k)} + 500 & 0 & -5(x_2^{(k)} + 50) \\ 0 & 0 & 10x_3^{(k)} - 5x_4^{(k)} + 250 & -5(x_3^{(k)} + 50) \\ -5(x_4^{(k)} + 50) & -5(x_4^{(k)} + 50) & -5x_4^{(k)} + 50 & 40x_4^{(k)} - 5x_1^{(k)} - 5x_2^{(k)} - 5x_3^{(k)} + 1000 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \Delta x_1^{(k+1)} \\ \Delta x_2^{(k+1)} \\ \Delta x_3^{(k+1)} \\ \Delta x_4^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x_1^{(k)} + 50)(10x_1^{(k)} - 5x_4^{(k)}) - 480 \\ -(x_2^{(k)} + 50)(10x_2^{(k)} - 5x_4^{(k)}) - 1380 \\ -(x_3^{(k)} + 50)(5x_3^{(k)} - 5x_4^{(k)}) + 1040 \\ -(x_4^{(k)} + 50)(20x_4^{(k)} - 5x_1^{(k)} - 5x_2^{(k)} - 5x_3^{(k)} - 960) \end{pmatrix}$$

Полученная система решается относительно $\Delta x_i^{(k+1)}$. Результаты расчётов по итерациям сведём в таблицу.

3.7.1. Ход итерационного процесса модернизированного метода Ньютона на основе уравнений баланса мощности

k	0	1	2	3	4
$x_1^{(k)}$	0	-1,81	-1,999	-2	-2
$x_2^{(k)}$	0	-3,61	-3,997	-4	-4
$x_3^{(k)}$	0	2,46	2,003	2	2
$x_4^{(k)}$	0	-1,7	-1,998	-2	-2
$\Delta x_1^{(k)}$	-	-1,81	-0,189	-0,001	0
$\Delta x_2^{(k)}$	-	-3,61	-0,387	-0,003	0
$\Delta x_3^{(k)}$	-	2,46	-0,457	-0,003	0
$\Delta x_4^{(k)}$	-	-1,7	-0,298	-0,002	0
$\max_i \Delta x_i^{(k)} $	-	3,61	0,457	0,003	0
$\max_i W_i(x^{(k)}) $	1380	99,636	0,919	0,000	0

Как следует из результатов расчёта, получение результатов с той же точностью, что и для уравнений в форме баланса токов, требует на одну итерацию больше. Указанное, а также больший объём вычислений на итерации, говорит не в пользу уравнений в виде баланса мощностей. Однако, как уже отмечалось, такие уравнения широко применяются в расчётах установившихся режимов в связи с простотой задания исходных данных, мощностей как для нагрузочных P , Q , так и для генераторных P , U узлов.

3.8. Метод градиентов (скорейшего спуска) для СЛАУ

Указанный метод относится к методам сложной итерации, имеет большую сходимость, чем метод простой итерации.

Исходное уравнение представляется в виде:

$$f(\vec{x}) = 0 \qquad Ax = bx = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

При решении находится нулевой минимум функции, представляющий скалярное произведение исходной скалярной матрицы коэффициентов на транспонированную, а также вектор невязок. Решение имеет только нулевой минимум.

Этапы вычислений по указанному методу следующие:

1) нахождение вектора невязок:

$$\vec{\varepsilon}^{(k)} = f(\vec{x}^{(k)}) = A\vec{x}^{(k)} - \vec{b};$$

2) вычисление дополнительного вектора γ :

$$\vec{\gamma}^{(k)} = A \cdot A_t \cdot \vec{\varepsilon}^{(k)};$$

3) вычисление параметра итерации:

$$m^{(k)} = \frac{\varepsilon^{(k)} \gamma^{(k)}}{\gamma^k \gamma^{(k)}};$$

4) нахождение последующих приближений:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - m^{(k)} A_t \varepsilon^{(k)}.$$

Рассмотрим пример для этого метода.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \qquad x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = 0$$

1) вектор невязок:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = x_1 + x_2 - 2 \\ \varepsilon_2 = 2x_1 - x_2 - 1 \end{cases} \qquad \varepsilon^{(0)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^{(0)} \\ \varepsilon_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$2) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}; \quad A_t \varepsilon^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \gamma^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$3) \quad m^{(0)} = \frac{\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -5 \\ -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \end{bmatrix}} = \frac{(-2) \cdot (-5) + (-1) \cdot (-7)}{(-5) \cdot (-5) + (-7) \cdot (-7)} = \frac{17}{74};$$

$$4) \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} - m^{(k)} A_t \varepsilon^{(k)}; \quad \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{17}{74} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,92 \\ 0,23 \end{bmatrix}$$

3.9. Метод скорейшего спуска (метод градиентов) для нелинейных уравнений

Действия те же самые, что и в предыдущем случае, с тем различием, что матрица коэффициентов A заменяется якобианом W (матрица частных производных по каждому x).

Схема процесса вычисления.

1. Находится вектор невязок:

$$\vec{\varepsilon}^{(k)} = f\left(\vec{x}^{(k)}\right).$$

2. Вычисляется дополнительный вектор:

$$\gamma = W\left(\vec{x}^{(k)}\right)W_t\left(\vec{x}^{(k)}\right) \cdot \vec{\varepsilon}^{(k)}.$$

3. Вычисляются параметры итерации:

$$m^{(k)} = \frac{\vec{\varepsilon}^{(k)} \vec{\gamma}^{(k)}}{\gamma^{(k)} \gamma^{(k)}}.$$

4. Последующие приближения:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - m^{(k)}W_t\left(\vec{x}^{(k)}\right)\vec{\varepsilon}^{(k)}.$$

4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система дифференциальных уравнений описывает переходные режимы работы оборудования реальных систем электроснабжения.

Реальными задачами являются следующие:

1. Расчёт токов КЗ.
2. Расчёт времени включения оборудования, двигателей, электропечей, выключателей.
3. Расчёт параметров режима (времени t , напряжения U , тока I) при переходе из одного режима работы электрооборудования в другой режим.

В данном разделе будут рассмотрены следующие методы:

- Эйлера;
- Эйлера-Коши;
- Коши;
- Рунге-Кутта (2,4,6)-порядка
- Рунге-Кутта-Мерсона
- Рунге-Кутта-Фельберга

Последние два метода характеризуются автоматическим выбором шага и являются основными для решения СДУ.

Все перечисленные методы базируются на методе Эйлера и являются той или иной его интерпретацией, при этом дающие различные погрешности расчёта.

4.1. Метод Эйлера

Постановка задачи: имеется дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, а также заданы начальные условия $y_0 = y(x_0)$:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

Допускается, что функция непрерывно дифференцируема в начальной точке и на отрезке, где ищется решение.

В связи с выше сказанным, поскольку правая часть уравнения – непрерывная функция, то её можно разложить в области x_0 в ряд Тейлора, при этом интервал интегрирования делим на равные части, h - шаг интегрирования.

$$x_1 = x_0 + h$$

$$x_k = x_0 + kh, \quad \text{где } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$y = y(x)$$

Если взять только первый шаг ряда Тейлора, то

$$y(x_{k+1}) \underset{h \rightarrow 0}{\cong} y(x_k) + \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x_k} \cdot h$$

Если $h \rightarrow 0$, то приближённое равенство можно считать равенством:

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x_k} \cdot h$$

$$\Delta y_k = h \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x_k} = hf(x_k, y_k) \quad (\text{разница } y)$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

Достоинствами метода являются:

- 1) простота использования;
- 2) достаточно высокая сходимость при достаточно малых значениях h .

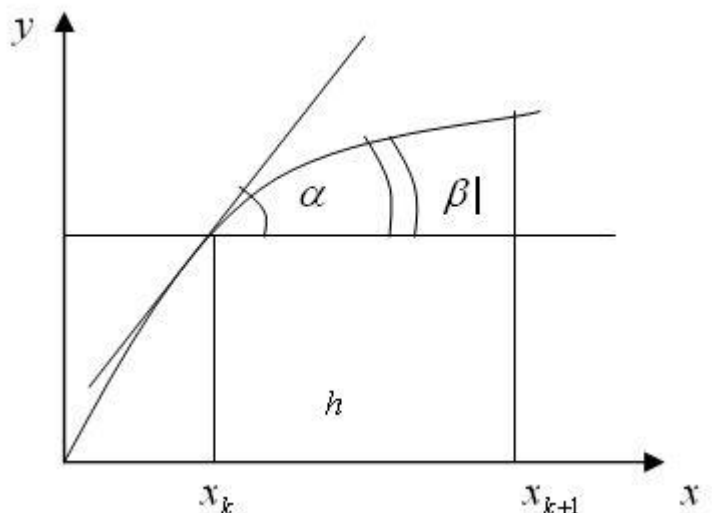
Недостатки:

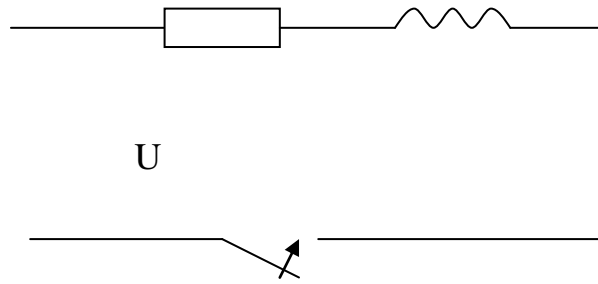
- 1) большая погрешность;
- 2) зависимость точности от шага h увеличивается скорость сходимости, однако, точность при этом падает.

Недостатки обусловлены накоплением ошибок от шага к шагу; ошибками 2-го рода, которые видны из следующего графика:

В связи с выше сказанным, данный метод применяется для качественных расчётов и для нахождения начальных приближений. Для точных решений используются другие методы, обладающие большей точностью и скоростью сходимости, однако сильно зависящие от начальных приближений.

В остальных методах, если начальное приближение задано неточно, то метод последовательных приближений может вообще не сойтись, в отличие от метода Эйлера, который сходится всегда.





$$\psi(i) = ai + bi^3; \quad \frac{d\psi}{di} = a + 3bi^2; \quad U = ir + \frac{d\psi}{dt} = ir + \frac{d\psi}{di} \cdot \frac{di}{dt};$$

$$\frac{d\psi}{di} \cdot \frac{di}{dt} = U - ir; \quad \frac{di}{dt} = \frac{U - ir}{\frac{d\psi}{di}}$$

$$i_{k+1} = i_k + hf(U_k, i_k)$$

$$i_{k+1} = i_k + \frac{h}{a + 3b(i_k)^2} (U_k - ri_k)$$

4.2. Метод Эйлера-Коши

Недостатки метода Эйлера частично решает метод Эйлера-Коши за счёт того, что решение ищется как среднее арифметическое от двух погрешностей в предыдущей и данной точках.

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}(\Delta y_k + \Delta y'_{k+1})$$

$$\Delta y_k = hf(x_k, y_k)$$

$$\Delta y'_{k+1} = hf(x_{k+h}, y'_{k+1})$$

$$y'_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+h}, y'_{k+1})]$$

Данный метод в 2 раза точнее, чем метод Эйлера. Достоинства и недостатки – такие же, как и в методе Эйлера.

4.3. Метод Рунге-Кутты четвёртого порядка

Это один из наиболее распространённых и эффективных методов решения дифференциальных уравнений. Существуют различные виды метода Рунге-Кутты (разных порядков). Оптимальным с точки зрения точности и количества операций на итерацию является метод Рунге-Кутты четвёртого порядка.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y_0 = y(x_0)$$

Функция непрерывно дифференцируема на заданном промежутке.

Решения находятся по схеме:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k.$$

Особенность метода:

$$\Delta y_k = \frac{1}{6} [K_{1k} + 2(K_{2k} + K_{3k}) + K_{4k}],$$

где K_{ik} - весовые коэффициенты (по их количеству называется метод):

$$K_{1k} = hf(x_k, y_k)$$

$$K_{2k} = hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_{1k}}{2}\right)$$

$$K_{3k} = hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_{2k}}{2}\right)$$

$$K_{4k} = hf(x_k + h, y_k + K_{3k})$$

В методе Рунге-Кутты пятого порядка точности для расчета точки X_{k+1} используются следующие соотношения:

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{6} \cdot h \cdot (k_1 + 4k_3 + k_5),$$

$$\text{где } k_1 = F(t_k, X_k), k_2 = F\left(t_k + \frac{h}{2}, X_k + k_1 \cdot \frac{h}{2}\right), k_3 = F\left(t_k + \frac{h}{2}, X_k + \frac{h}{4} \cdot (k_1 + k_2)\right),$$

$$k_4 = F\left(t_k + h, X_k - h \cdot k_2 + 2 \cdot h \cdot k_3\right), k_5 = F\left(t_k + \frac{2h}{3}, X_k + \frac{h}{27} \cdot (7k_1 + 10k_2 + k_4)\right),$$

$$k_6 = F\left(t_k + \frac{h}{5}, X_k + \frac{h}{625} \cdot (28k_1 - 125k_2 + 546k_3 + 54k_4 - 378k_5)\right).$$

Весовые коэффициенты (или весовые функции), стоящие перед приращениями, найдены, исходя из минимума ошибки на каждом шаге. Это наиболее точный метод из рассмотренных, в котором остаётся единственная проблема правильного выбора шага h , поскольку, если h достаточно мал, то решение сходится, но достаточно медленно; если же h велик, то решение может вообще не сойтись. Решение этой проблемы дано в модернизированных методах (методах Рунге-Кутты-Мерсона и Рунге-Кутты-Фельберга).

Суть этого метода заключается в следующем: сначала выбирается некоторый наперёд заданный шаг и делается несколько шагов с этим шагом. Анализируются эти шаги. Если решение сходится, то шаг увеличивается, и процедура повторяется до тех пор, пока шаг не становится таким, при котором система расходится. Тогда возвращаются на одну позицию назад, и данный шаг считают оптимальным.

4.4. Метод Нюстрема

В многошаговых методах Нюстрема второго, третьего и четвертого порядка точности для нахождения точки X_{k+1} используются две, три и четыре предыдущие точки соответственно:

$$X_{k+1} = X_{k-1} + 2h \cdot F(t_k, X_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

$$X_{k+1} = X_{k-1} + \frac{1}{3} \cdot h \cdot [7 \cdot F(t_k, X_k) - 2 \cdot F(t_{k-1}, X_{k-1}) + F(t_{k-2}, X_{k-2})], \quad k = 2, 3, \dots$$

$$X_{k+1} = X_{k-1} + \frac{1}{3} \cdot h \cdot [8 \cdot F(t_k, X_k) - 5 \cdot F(t_{k-1}, X_{k-1}) + 4 \cdot F(t_{k-2}, X_{k-2}) - F(t_{k-3}, X_{k-3})], \quad k = 3, 4, \dots$$

4.5. Метод Милна

Многошаговый метод Милна четвертого порядка точности может быть реализован двумя различными способами:

$$X_{k+1} = X_{k-3} + \frac{4}{3} \cdot h \cdot [2 \cdot F(t_k, X_k) - F(t_{k-1}, X_{k-1}) + 2 \cdot F(t_{k-2}, X_{k-2})], \quad k = 3, 4, \dots$$

или

$$X_{k+1} = X_{k-2} + \frac{3}{8} \cdot h \cdot [7 \cdot F(t_k, X_k) - 3 \cdot F(t_{k-1}, X_{k-1}) + 5 \cdot F(t_{k-2}, X_{k-2}) - F(t_{k-3}, X_{k-3})], \quad k = 3, 4, \dots$$

Для начала расчетов требуется четыре «разгонные» точки.

В методе Милна шестого порядка точности для расчета X_{k+1} используется шесть предыдущих точек:

$$X_{k+1} = X_{k-5} + \frac{3}{10} \cdot h \cdot [11 \cdot F(t_k, X_k) - 14 \cdot F(t_{k-1}, X_{k-1}) + 26 \cdot F(t_{k-2}, X_{k-2}) - 14 \cdot F(t_{k-3}, X_{k-3}) + 11 \cdot F(t_{k-4}, X_{k-4})], \quad k = 5, 6, \dots$$

4.6. Метод Фельберга

В методе Фельберга пятого порядка точности для расчета точки X_{k+1} используется формула

$$X_{k+1} = X_k + h \cdot \left(\frac{16}{135} \cdot k_1 + \frac{6656}{12825} \cdot k_3 + \frac{28561}{56430} \cdot k_4 - \frac{9}{50} \cdot k_5 + \frac{2}{55} \cdot k_6 \right),$$

где

$$k_1 = F(t_k, X_k), \quad k_2 = F(t_k + \frac{h}{4}, X_k + \frac{h}{4} \cdot k_1), \quad k_3 = F(t_k + \frac{3 \cdot h}{8}, X_k + \frac{3 \cdot h}{32} \cdot k_1 + \frac{9 \cdot h}{32} \cdot k_2),$$

$$k_4 = F(t_k + \frac{12 \cdot h}{13}, X_k + \frac{1932 \cdot h}{2197} \cdot k_1 - \frac{7200 \cdot h}{2197} \cdot k_2 + \frac{7296 \cdot h}{2197} \cdot k_3),$$

$$k_5 = F(t_k + h, X_k + \frac{439 \cdot h}{216} \cdot k_1 - 8 \cdot h \cdot k_2 + \frac{3680 \cdot h}{513} \cdot k_3 - \frac{845 \cdot h}{4104} \cdot k_4),$$

$$k_6 = F(t_k + \frac{h}{2}, X_k - \frac{8 \cdot h}{27} \cdot k_1 + 2 \cdot h \cdot k_2 - \frac{3544 \cdot h}{2565} \cdot k_3 + \frac{1859 \cdot h}{4104} \cdot k_4 - \frac{11 \cdot h}{40} \cdot k_5).$$

В методе Фельберга четвертого порядка точности для расчета точки X_{k+1} используется формула

$$X_{k+1} = X_k + h \cdot \left(\frac{25}{216} \cdot k_1 + \frac{1408}{2565} \cdot k_3 + \frac{2197}{4104} \cdot k_4 - \frac{1}{5} \cdot k_5 \right),$$

где коэффициенты k_1 – k_5 определяются согласно вышеприведенным соотношениям.

4.7. Метод Ингланда

В методе Ингланда пятого порядка точности для расчета точки X_{k+1} используется формула

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{336} \cdot h \cdot (14 \cdot k_1 + 35 \cdot k_4 + 162 \cdot k_5 + 125 \cdot k_6),$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= F(t_k, X_k), \quad k_2 = F(t_k + \frac{h}{2}, X_k + k_1 \cdot \frac{h}{2}), \quad k_3 = F(t_k + \frac{h}{2}, X_k + \frac{h}{4} \cdot (k_1 + k_2)), \\ k_4 &= F(t_k + h, X_k - h \cdot k_2 + 2 \cdot h \cdot k_3), \quad k_5 = F(t_k + \frac{2h}{3}, X_k + \frac{h}{27} \cdot (7k_1 + 10k_2 + k_4)), \\ k_6 &= F(t_k + \frac{h}{5}, X_k + \frac{h}{625} \cdot (28k_1 - 125k_2 + 546k_3 + 54k_4 - 378k_5)). \end{aligned}$$

Как видно, формулы для определения коэффициентов k_1 – k_6 аналогичны используемым в методе Рунге-Кутты пятого порядка.

4.8. Метод Адамса-Башфорта

В многошаговом методе Адамса-Башфорта третьего порядка точности для нахождения точки X_{k+1} используются три предыдущие точки:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= X_k + \frac{1}{12} \cdot h \cdot [23 \cdot F(t_k, X_k) - 16 \cdot F(t_{k-1}, X_{k-1}) + \\ &\quad + 5 \cdot F(t_{k-2}, X_{k-2})], \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Для начала расчета требуются три «разгонные» точки X_0, X_1, X_2 , которые можно получить одним из одношаговых методов.

В многошаговом методе Адамса-Башфорта четвертого порядка точности для нахождения X_{k+1} используются четыре предыдущие точки:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= X_k + \frac{1}{24} \cdot h \cdot [55 \cdot F(t_k, X_k) - 59 \cdot F(t_{k-1}, X_{k-1}) + \\ &\quad + 37 \cdot F(t_{k-2}, X_{k-2}) - 9 \cdot F(t_{k-3}, X_{k-3})], \quad k = 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Для начала расчета требуются четыре «разгонные» точки X_0, X_1, X_2, X_4 .

В методе Адамса-Башфорта пятого порядка для нахождения X_{k+1} используется пять предыдущих точек:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= X_k + \frac{1}{720} \cdot h \cdot [1901 \cdot F(t_k, X_k) - 2774 \cdot F(t_{k-1}, X_{k-1}) + 2616 \cdot F(t_{k-2}, X_{k-2}) - \\ &\quad - 1274 \cdot F(t_{k-3}, X_{k-3}) + 251 \cdot F(t_{k-4}, X_{k-4})], \quad k = 4, 5, \dots \end{aligned}$$

Для начала расчета требуются пять «разгонных» точек.

4.9. Метод Хемминга

Многошаговый метод Хемминга четвертого порядка точности может быть реализован тремя различными способами, в каждом из которых для нахождения точки X_{k+1} используются четыре предыдущие точки:

$$X_{k+1} = \frac{X_k + X_{k-1}}{2} + \frac{1}{48} \cdot h \cdot [119 \cdot F(t_k, X_k) - 99 \cdot F(t_{k-1}, X_{k-1}) + 69 \cdot F(t_{k-2}, X_{k-2}) - 17 \cdot F(t_{k-3}, X_{k-3})], \quad k = 3, 4, \dots$$

или

$$X_{k+1} = \frac{2 \cdot X_{k-1} + X_{k-2}}{3} + \frac{1}{72} \cdot h \cdot [191 \cdot F(t_k, X_k) - 107 \cdot F(t_{k-1}, X_{k-1}) + 109 \cdot F(t_{k-2}, X_{k-2}) - 25 \cdot F(t_{k-3}, X_{k-3})], \quad k = 3, 4, \dots$$

или

$$X_{k+1} = \frac{X_k + X_{k-1} + X_{k-2}}{3} + \frac{1}{36} \cdot h \cdot [91 \cdot F(t_k, X_k) - 63 \cdot F(t_{k-1}, X_{k-1}) + 57 \cdot F(t_{k-2}, X_{k-2}) - 13 \cdot F(t_{k-3}, X_{k-3})], \quad k = 3, 4, \dots$$

5. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ. КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

В связи с тем, что реальные энергосистемы описываются сложными дифференциальными и интегральными уравнениями, аналитического решения для таких систем в подавляющем большинстве случаев не имеется. Решая эти же уравнения численными методами, решение можно найти для любого уравнения любой степени сложности. В этом основное достоинство численных методов и применения на компьютере.

Используемые на практике методы численного интегрирования можно сгруппировать в зависимости от способа описания подынтегральной функции.

Дадим краткую характеристику групп наиболее распространённых методов.

1. Группа Ньютона-Котеса

Эти методы основаны на полиномиальной аппроксимации (условных приближениях) подынтегральной функции. Методы этого класса отличаются друг от друга степенью использованного полинома, от которого зависит количество узлов, в которых вычисляется подынтегральная функция. Алгоритмы методов достаточно просты и легко поддаются программной реализации.

2. Сплайновые методы

Данные методы базируются на аппроксимации подынтегральной функции. Методы различаются по типу выбранных сплайнов.

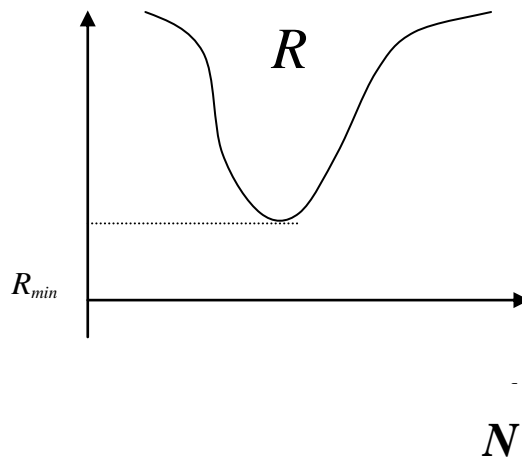
3. Методы наивысшей алгебраической точности (методы Гаусса-Кристоффера)

Используют неравно отстоящие узлы, расположенные по алгоритму, обеспечивающему минимальную погрешность интегрирования для наиболее сложных функций. Методы различаются по способу выбора узлов и широко используются для интегрирования, в том числе и для несобственных интегралов, хотя из-за необходимости хранения констант и стандартизации пределов интегрирования программы указанных методов требуют несколько большего объёма памяти по сравнению с методами Ньютона-Котеса. В этих методах узлы

выбираются с помощью датчика случайных чисел. Ответ носит вероятностный характер.

4. Класс специальных методов

Это методы, алгоритмы которых разрабатываются на основе учёта известных подынтегральных функций, что позволяет существенно сохранить время и уменьшить погрешность вычисления интеграла. Независимо от выбранного метода в процессе численного интегрирования необходимо вычислить приближённые значения интеграла и оценить его погрешность. Погрешность будет уменьшаться при увеличении числа разбиений интервала (a, b) за счёт более точной аппроксимации подынтегральной функции. Однако при этом будет возрастать погрешность за счёт суммирования частных интегралов и погрешностей округления чисел машиной. Последняя погрешность значения N_0 становится преобладающей.



R - погрешность, N - количество разбиений $[a, b]$, $h = \frac{b-a}{N}$.

Указанное обстоятельство должно предостеречь от выбора чрезмерно большого числа N (узлов разбиения) и привести к необходимости разработки способов оценки погрешности R выбранного метода интегрирования.

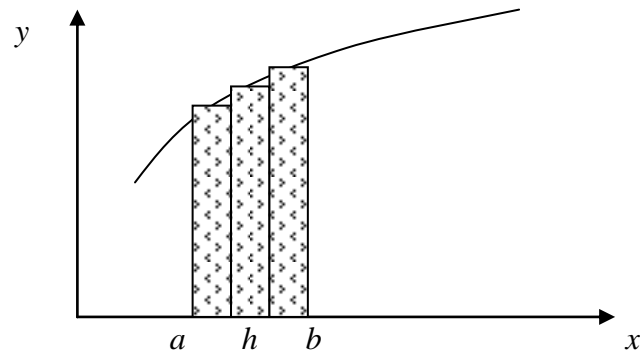
Постановка задачи

$\int_a^b f(x)dx$ - интеграл от непрерывной функции $f(x)$ любой степени сложности.

Все численные методы основаны на том, что интервал (a, b) разбивают на участки, на каждом из которых кривая, описываемая подынтегральной функцией $f(x)$, заменяется некоторой другой кривой, для которой вычисления производятся по достаточно простым формулам, а затем все площади суммируются.

5.1. Метод прямоугольников

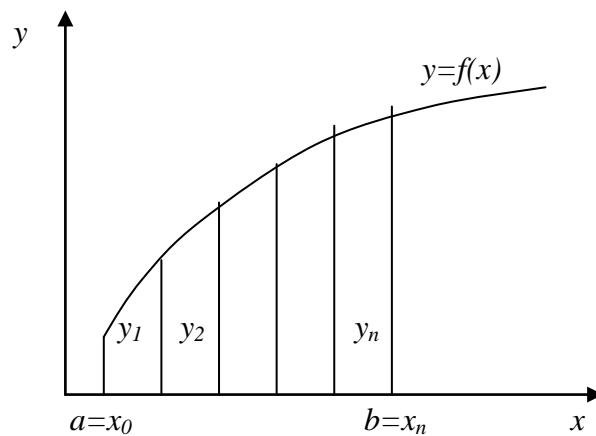
$y = f(x)$ - некоторая кривая



$$\frac{b-a}{N} = h, \quad \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^N S_i = h \sum_{i=1}^N y_i$$

5.2. Метод трапеций

Точность данного метода гораздо выше, чем метода прямоугольника.



$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n S_i, \quad S_1 = h \frac{y_0 + y_1}{2}, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

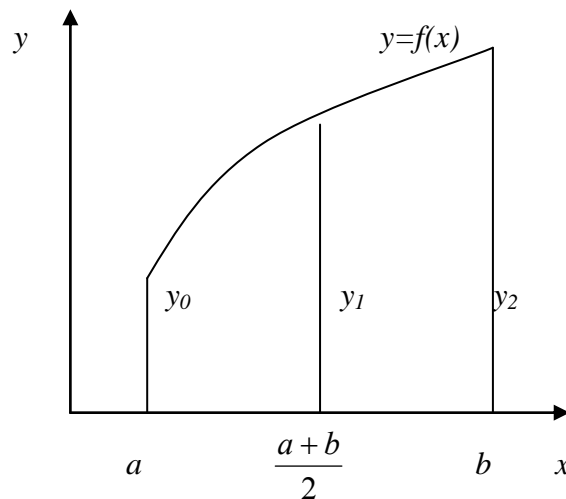
$$\int_a^b f(x) dx = h \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right) = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} y_k \right)$$

5.3. Метод Симпсона

Отличием является то, что для повышения точности интегрирования аппроксимация функций осуществляется с помощью парабол:

$$y(x) = A + Bx + Cx^2;$$

$$\int_a^b y(x) dx = \left(Ax + B \frac{x^2}{2} + C \frac{x^3}{3} \right) \Big|_a^b$$



Выразим коэффициенты A , B , C через координаты y_0 , y_1 , y_2 :

$$a = x_0 = \frac{a+b}{2}; \quad \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & \frac{a+b}{2} & \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ 1 & b & b^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

Решаем систему относительно A , B и C и подставляем полученные значения в формулу интеграла. После приведения подобных получаем формулу Симпсона, которая для данного конкретного случая будет иметь вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Для общего случая формула Симпсона имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = h[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})]/3$$

5.4. Оценка погрешностей методов Ньютона-Котеса. Рекомендации по выбору шага интегрирования.

Погрешность методов определяется величиной интеграла от остаточного члена полинома. В формулах для оценки погрешности M_i - максимальное значение i -той производной, которая

является максимальным значением i -той производной $\frac{d^i f(x)}{dx^i}$ на интервале $[a, b]$:

Для метода прямоугольника эта погрешность составляет: $\frac{M_1 h(b-a)}{2}$.

Для метода трапеций: $\frac{M_2 h^2(b-a)}{12}$.

Для метода Симпсона: $\frac{M_4 h^4(b-a)}{180}$.

Для обеспечения заданной точности интегрирования часто используют алгоритмы с автоматическим выбором шага (АВШ), в которых используется следующий приём: вычисляют значение интеграла одним из рассмотренных методов с некоторым начальным шагом h .

Получают:

$$z(h) \approx \int_a^b f(x) dx.$$

Затем повторяют эти вычисления с половинным шагом $\frac{h}{2}$:

$$z\left(\frac{h}{2}\right) \approx \int_a^b f(x) dx.$$

Если окажется, что

$$\left| z(h) - z\left(\frac{h}{2}\right) \right| \leq \varepsilon,$$

то вычислительный процесс прекращается. В противном же случае прибегают к дальнейшему дроблению шага.

Полученное таким образом приближённое значение интеграла можно уточнить, используя экстраполяционный переход к пределу, предложенный Ричардсоном:

$$z \approx z\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{z\left(\frac{h}{2}\right) - z(h)}{2^k - 1};$$

где

$$\begin{cases} k = 1 & \text{в методе прямоугольников,} \\ k = 2 & \text{в методе трапеций,} \\ k = 4 & \text{в методе Симпсона} \end{cases}$$

5.5. Вычисление кратных интегралов методом Монте-Карло

Простейшая формула вычисления определенного интеграла методом Монте-Карло:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i),$$

где случайные числа x_i равномерно распределены в интервале $[a; b]$.

В многомерном случае область интегрирования $G \subseteq \mathbb{R}^n$, которую будем считать ограниченной, необходимо заключить в n -мерный прямоугольный параллелепипед $a_i < x_i < b_i$. Для генерации случайных точек x , равномерно распределённых в этом параллелепипеде, можно воспользоваться командой MatLab $x = a + (b-a) \cdot \text{rand}(1, n)$

Здесь $a = [a_1, a_n]$, $b = [b_1, b_n]$ и $\text{rand}(1, n)$ — векторы-строки, операция \cdot — покомпонентное умножение строк

Если сгенерировать N случайных точек x в этом параллелепипеде и обозначить через N_G количество точек ХЕГ, то "объем" области $m(G) = \tau(\Pi_n) \cdot N_G / N$, где объем параллелепипеда $m(\Pi_n) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$, а интеграл

$$\int_G f(x) dx \approx \frac{m(G)}{N_G} \sum_{x_i \in G} f(x_i).$$

Методом Монте-Карло можно легко найти интегралы по одной и той же области сразу от нескольких функций — для этого надо просто накапливать суммы $Sf_k(x_i)$ для всех нужных функций f_k

Найдем методом Монте-Карло объем v и положение центра тяжести h_0 однородного шарового сегмента. Для удобства будем считать, что его "южный полюс" лежит на плоскости $x_3 = 0$, а отсекающая плоскость ей параллельна. Обозначим радиус шара r , высоту сегмента h . Тогда неравенства, задающие шаровой сегмент $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 2rx - x_3^2$, $x_3 \leq h$. Его объем

$$v = \iiint dx_1 dx_2 dx_3,$$

высота центра тяжести над плоскостью $x_3 = 0$

Здесь интегралы берутся по области, задаваемой неравенствами, другие две координаты центра тяжести

$$h_0 = \frac{1}{V} \iiint_G x_3 dx_1 dx_2 dx_3.$$

— нули

Исходными данными для вычислений являются:

- радиус круга, лежащего в основании шарового сегмента $r_0 = \sqrt{2rh - h^2}$;
 - параллелепипед, включающий шаровой сегмент и задаваемый неравенствами $a_1 < x_1 < b_1$, $a_2 < x_2 < b_2$, $a_3 < x_3 < b_3$, где $a_1 = a_2 = -r_0$, $a_3 = 0$, $b_1 = b_2 = r_0$, $b_3 = h$.
- Из этих данных можно сформировать векторы $a = [-r_0, -r_0, 0]$, $b = [r_0, r_0, h]$ и с помощью следующей программы вычислить параметры шарового сегмента:

```
function [V,MhO,DhO] = spherical_segment(r,h,N)
sumF=0;
sumDf=0;
NG=0;
rO=sqrt(h*(2*r-h));
a=[-rO,-rO,0];
b=[rO, rO,h];
VP=4*rO^2*h;
for s=1:N
    x=a+(b-a).*rand(size(a));
    if (x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2<=2*r*x(3)) S (x(3)<=h)
        NG=NG+1;
        fx=x(3);
        sumF=sumF+fx;
        sumDf=sumDf+fx^2; end end
V=VP*NG/N; MhO=sumF/NG; M2=sumDf/NG; DhO=M2-
MhO^2;
```

Для вызова данной функции и вычисления **точных значений** v_{prec} и h_{prec} использовалась следующая программа:

```
% Spher_segm_tst rand('state',0); r=10; h=r; N=100;
[V,MhO,DhO] = sphencal_segment(r,h,N) Vprec=pi*(r-h/3)*h^2
H0prec=h*(2*r-0.75*h)/(3*r-h) s3=3*sqrt(DhO/N)
```

Для полусферы ($h=r$) радиуса $r=10$ при $N=100$ получены следующие результаты $v=2320$, $Mh_0=5.808i$, $s_3=0.708$. Последнее означает, что с доверительной вероятностью 0.997 истинная высота центра тяжести находится в диапазоне $[5.100, 6.516]$. Для сравнения точные значения $v_{\text{prec}}=2094.4$, $H_{0\text{prec}}=6.25$. Заметим, что высота центра тяжести, найденная методом Монте-Карло, достаточно точна, относительная погрешность ее вычисления $\delta h = 0,07$. Точность вычисления объема несколько хуже: относительная погрешность $\delta v = 0,11$.

В соответствии с замечанием нетрудно было бы одновременно найти и какую-нибудь другую характеристику шарового сегмента, например, момент инерции.

6. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Одной из важнейших задач в процессе математического моделирования является вычисление значений функций, входящих в описание модели.

Для сложных моделей подобные вычисления могут быть трудоемкими даже при использовании ЭВМ. При выполнении программ, реализующих основные методы вычислительной математики, большая часть времени используется на вычисление функции. Используемые в математических моделях функции задаются как аналитическим, так и табличным

способом, причем основным является второй, поскольку второй берется из практики (замеры реальных величин), т.е. в большинстве случаев речь идет о дискретных значениях аргумента. Возникает вопрос поиска значений аргумента между замерами и вне данного диапазона замеров.

Поставленные проблемы решаются путём приближённой замены функции $f(x)$ более простой функцией $\varphi(x)$, которую нетрудно вычислить при любом значении аргумента x в заданном интервале его изменения используется не только для приближения численных значений $f(x)$, но и для проведения аналитических выкладок при теоретическом исследовании модели.

Приближение функции $f(x)$ более простой функцией $\varphi(x)$ называется **аппроксимацией** (от лат. *approximare* – приближать).

Близость этих функций добивается путём введения в аппроксимирующую функцию $\varphi(x)$ свободных параметров $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ и соответствующим им выбором

Задачами ЭТ и энергетики широко используется аппроксимация функций для описания физических параметров объектов (параметров *ЛЭП, тр-ров*, другого энергооборудования), а также для задания характеристик активных и пассивных элементов цепи, источников генераторов, а также потребителей и т. д. В вычислительной математике аппроксимация функций является основой для разработки новых методов и алгоритмов.

6.1. Постановка задачи интерполяции

Пусть функция $f(x)$ задана таблицей значений, полученных из эксперимента.

Например:

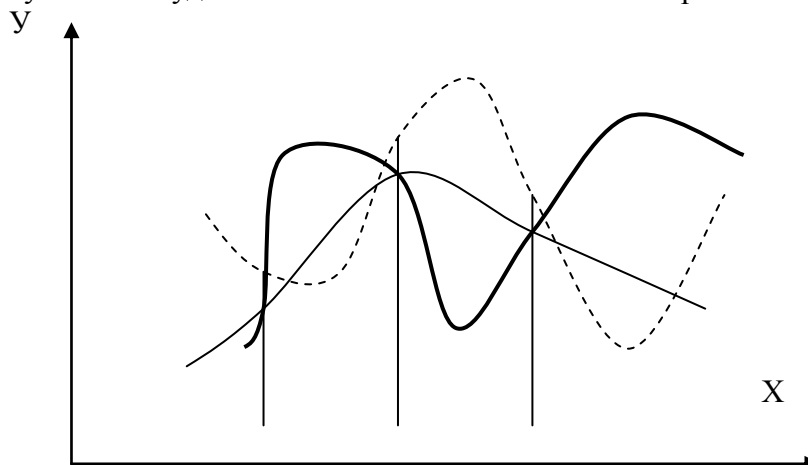
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_n)$
x	x_1	x_2	x_3	x_n

В компьютерах обычно эти данные представляются в виде массивов, выбранные значения аргумента называются узлами таблицы. Считаем, что в общем случае узлы не являются равноотстоящими. Задачей интерполирования в узком смысле считают нахождение приближенных значений табличной функции при аргументах x , не совпадающих с узловыми.

Если значение аргумента x расположено между узлами $x_0 \leq x \leq x_n$, то нахождение приближенного значения функции $f(x)$ называется **интерполяцией**. Если же приближенную аппроксимированную функцию вычисляют вне интервала $[x_0, x_n]$, то процесс называется **экстраполяцией**.

Происхождение этих терминов связано с латинскими словами: *inter*- между, *внутри*: *pole*-узел; *extra* - вне диапазона.

В общем случае задача относится к некорректно поставленным, т.е. имеет множество решений. Однако чуть ниже буде показано максимально точное ее решение.



$$a_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)}$$

$$a_2 = \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)}$$

$$a_n = \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_3) \dots (x_n - x_{n-1})}$$

Подставив полученные коэффициенты в исходную формулу для $P_n(x_n)$

$$P_n(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \dots (x_0 - x_n)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)} y_1 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)} y_2 + \dots + \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1})} y_n$$

Формула Лагранжа

Пример. В результате эксперимента получены следующие замеры. Необходимо найти значение $y = f(x)$

	x_0	x_1	x_2
x	1	3	5
y	2	1	8

$$P_2 = \frac{(x-3)(x-5)}{(1-3)(1-5)} 2 + \frac{(x-1)(x-5)}{(5-1)(5-3)} 1 + \frac{(x-1)(x-3)}{(5-1)(5-3)} 8 = x^2 - 9x/2 + 11/2.$$

6.3. Интерполяционная формула Ньютона

Рассмотрим частный случай интерполяции, когда шаг h между соседними узлами величина постоянная.

Введем следующее обозначение : $h = x_i - x_{i-1}$

$\Delta y_0 = y_1 - y_0$ $\Delta y_1 = y_2 - y_1$ $\Delta y_2 = y_3 - y_2$ - разность первого порядка.

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$ $\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$ $\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$ - разность второго порядка

$\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0$ $\Delta^n y_1 = \Delta^{n-1} y_2 - \Delta^{n-1} y_1$ $\Delta^n y_2 = \Delta^{n-1} y_3 - \Delta^{n-1} y_2$

Введя такие обозначения найдем интерполяционный многочлен n -ой степени, который принимает в точках x_0 и последующих те же значения, что и соответствующие

$$\begin{array}{l|l} x_1 = x_0 + h & y_1 \\ x_2 = x_0 + 2h & y_2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ x_n = x_0 + nh & y_n \end{array}$$

Найдем многочлен первой степени, принимающий в точках x , соответствующие значения y . Подставляя эти значения в интерполяционный многочлен Лагранжа, получим следующее выражение

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} \text{ - многочлен первого порядка.}$$

Аналогично получаем многочлены более высоких порядков, например 2-го:

$$P_2(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} (x - x_0)(x - x_1)$$

$$P_3(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Для n -ого порядка интерполяционная формула Ньютона имеет вид

$$P_3(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x-x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} (x-x_0)(x-x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

Задача интерполяции в формулах Лагранжа и Ньютона имеет единственное решение. Поэтому формулы Лагранжа и Ньютона для одних и тех же значений x_i и y_i тождественны и отличаются лишь группировкой слагаемых.

На практике формула Ньютона более удобна. Особенность ее заключается в том, что при добавлении новых (слагаемых) данных в таблицу в формуле Лагранжа необходимо пересчитывать все коэффициенты, а в формуле Ньютона просто добавляются новые слагаемые, а старые остаются без изменения.

6.4. Гармонический анализ и синтез периодических функций

Указанный анализ проводится с целью определить гармонический состав периодических функций. Функция времени $f(t)$ называется периодической, если для нее справедливо условие

$$f(t) = f(t + mT), m=1,2,3,\dots,n, T\text{-период.}$$

Гармонический анализ периодических функций заключается в определении коэффициентов уравнения a_k и b_k :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos w_k t + b_k \sin w_k t)$$

w – круговая частота первой гармоники;

k – порядковый номер гармоники.

$$w = \frac{2\pi}{T}$$

На практике ограничиваются в формуле не ∞ , а некоторым числом m гармоник и получают аппроксимирующий гармонический коэффициент $Q_m(t)$.

$$f(t) \approx Q_m(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k \cos w_k t + b_k \sin w_k t)$$

Коэффициенты Фурье определяются следующими выражениями

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos w_k t dt \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin w_k t dt$$

Используем для вычисления интегралов численные методы, например метод прямоугольников и при разбиении интервала интегрирования от $[0, T]$ на n равных отрезков получим формулы для вычисления

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} y_i \\ a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} y_i \cos \frac{2\pi k i}{n} \\ b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} y_i \sin \frac{2\pi k i}{n} \end{cases} \quad k=1,2,3, m \quad y_i = f(t_i) \quad \Delta t = \frac{T}{n} \quad t_i = i\Delta t$$

Гармоническим синтезом называется получение периодической функции путем суммирования ее гармонических составляющих по приведенным выше формулам.

6.5. Поиск экстремальных значений методом «Золотого сечения»

Достаточно отсечь от исходного единичного квадрата прямоугольник и на оставшейся части x его стороны построить другой квадрат, по площади равный полученному прямоугольнику: $1 \cdot (1 - x) = x^2$. Отсюда легко получить: $x = 0,618...$ И это оформлено в виде теоремы в «Началах» Евклида.

Законы меры, гармонии, гармонии мер и меры гармонии — отношения золотого сечения 0,618, будоражат интеллектуальные силы человечества уже более трех с половиной тысяч лет. Большие пирамиды Гизы построены так, что соотношение их линейных размеров дает это число: 0,618. Фреска в одной из древнеегипетских гробниц изображает ваятеля, две мерные линейки в руке которого дают то же отношение длин.

Благодаря Пифагору, подарившему просвещенному человечеству «два сокровища» (И.Кеплер) - названную его именем теорему и золотое сечение, получаемое делением отрезка в крайнем и среднем отношении, благодаря этому достоянию, культура европейской цивилизации значительно обогатилась. В последующем это инвариантное отношение успешно использовали архитекторы и скульпторы в создаваемых ими шедеврах. Определенный вклад в его разработку внес Леонардо да Винчи, проиллюстрировав написанную его другом и советчиком фра Лука Пачоли ди Борго книгу «Божественная пропорция» шестьюдесятью рисунками, выполненными им с собственноручно изготовленных макетов.

Более подробно о золотом сечении в Интернет смотрите сайт музея золотого сечения: http://www.goldenmuseum.com/index_rus.html

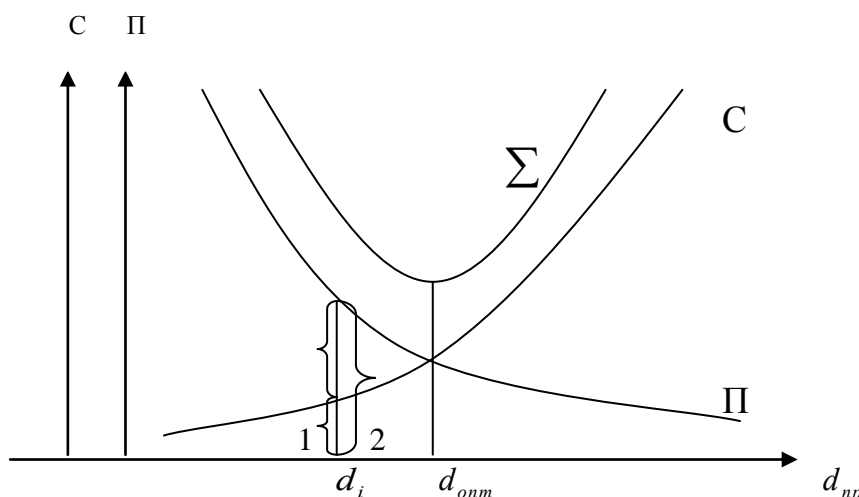
Постановка задачи.

1. Целевая функция экстремум которой ищется и ограничения в диапазоне которых ищется решение.

$$F = f(x, y) \Rightarrow \min (\text{ЦФ})$$

$$x_0 \leq x \leq x_n; \quad y_0 \leq y \leq y_n; \quad (\text{ОГР})$$

Метод применяется для определения *max* и *min* значения функции на заданном интервале. Задача поиска экстремума встречается в задачах оптимизации, которые обязательно возникают в инженерной практике. Например: Найти оптимальное сечение кабеля ЛЭП.



C – стоимость;

P – потери;

$d_{пр}$ – сечение провода;

$d_{опт}$ – оптимальное сечение провода;

Σ - суммарный график.

На сегодняшний день не существует теории оптимизации, однако, существуют методы оптимизации. И необходимо аргументировать почему применяется тот или иной метод.

Метод «Золотого сечения». В нем ищется экстремум функции $f(x, y)$ на интервале $[a, b]$. Для определения экстремума данный отрезок не должен содержать более одного max и min .

«Золотым сечением» отрезка называется деление его на 2 части таким образом, что отношение длины всего отрезка к длине большей части равно отношению большей части к меньшей.



τ - величина золотого сечения.

$$\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,6180339 \quad \begin{cases} x_1 = b - \tau(b - a) \\ x_2 = a + \tau(b - a) \end{cases}$$

Точка x_1 является золотым сечением отрезка ax_2 , а точка x_2 - отрезка x_1b .

В соответствии с вышеуказанным поиск экстремума на отрезке $[a, b]$ может быть выполнен следующим образом:

1. Отрезок $[a, b]$ делится точками x_1 и x_2 по правилу золотого сечения.
2. Вычисляется значение функции $f(x)$ в полученных точках x_1 и x_2 .
3. Если $f(x_1) > f(x_2)$, то меняем левую границу интервала, делая $a = x_1$, в противном случае $b = x_2$.
4. Повторяем процесс с начала, учитывая новые границы отрезка $[a, b]$.
5. Итерации проводим до тех пор, пока интервал неопределенности $[a, b]$ не станет меньше заданной погрешности ε .
6. После завершения итерации точку max или min можно уточнить, разделив отрезок $[a, b]$ пополам.

Список литературы

1. Маликов В.Т., Кветный Р.Н. Вычислительные методы и применение ЭВМ. - Киев: Наукова думка, 1989. - 212 с.
2. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран, Паскаль. - Томск: , 1991. - 272 с.
3. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование, Москва, 1990. - 544 с.
4. Копченкова Ю.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. - М: Наука, 1972. - 366 с.
5. Калиткин Н.Н. Численные методы. - Москва: Наука, 1978. - 512 с.
6. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике. - Москва, МВТУ им Н.Э.Баумана, 2001. - 496 с.
7. Колдаев В.Д. Численные методы и программирование. - М.: Форум, 2008. - 336 с.