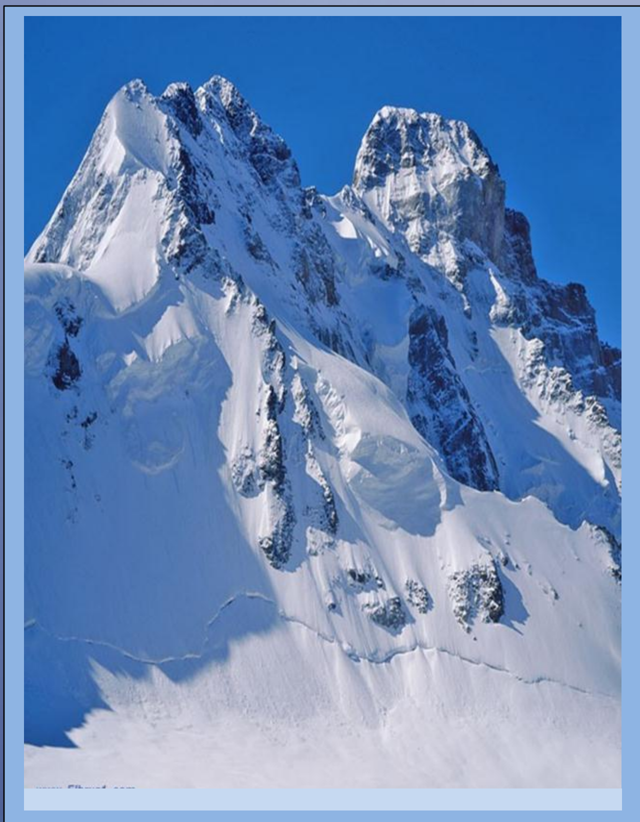


Исследование генезиса логической трансценденции в основаниях формальной логики и теории множеств и логически сингулярное решение «Второй проблемы Гильберта»

Александр Нодарович Ахвледиани

Alexander Nodar Akhvlediany

INCOL - ОРИФЛАММА

2011-2012

Благодарности

АВТОР ВЫРАЖАЕТ СЕРДЕЧНУЮ ПРИЗНАТЕЛЬНОСТЬ

ИНФОРМАЦИОННОМУ ПОРТАЛУ

ОРИФЛАММА

А ТАКЖЕ ЛИЧНО

АДМИНИСТРАТОРУ ПРОЕКТА

ДЖУРЕ СЕРГЕЮ ГЕОРГИЕВИЧУ

ЗА ЛЮБЕЗНО ПРЕДОСТАВЛЕННУЮ ВОЗМОЖНОСТЬ

ОПУБЛИКОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ КНИГИ НА САЙТЕ

ПОРТАЛА ОРИФЛАММА

АЛЕКСАНДР НОДАРОВИЧ АХВЛЕДИАНИ

ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕНЕЗИСА ЛОГИЧЕСКОЙ ТРАНСЦЕНДЕНЦИИ В ОСНОВАНИЯХ ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ И ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ЛОГИЧЕСКИ СИНГУЛЯРНОЕ РЕШЕНИЕ «ВТОРОЙ ПРОБЛЕМЫ ГИЛЬБЕРТА»

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНОЕ
ОБЩЕСТВО «INCOL»

КАРМИЭЛЬ

2011

АННОТАЦИЯ

НАСТОЯЩАЯ КНИГА ПРЕДСТАВЛЯЕТ СОБОЙ СБОРНИК РАБОТ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ЯВЛЕНИЯ ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТРАНСЦЕНДЕНЦИИ В ОСНОВАНИЯХ КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ И КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОЙ МАТЕМАТИКИ. ПОД ЛОГИЧЕСКОЙ ТРАНСЦЕНДЕНЦИЕЙ ПОНИМАЕТСЯ ВЫХОД ЗА ПРЕДЕЛЫ КЛАССИЧЕСКОЙ АРИСТОТЕЛЕВСКОЙ ТРАДИЦИОННОЙ ЛОГИКИ, НАБЛЮДАЕМЫЙ КОНСТРУКТИВНО И ФОРМАЛЬНО ДОКАЗУЕМЫЙ В РАМКАХ СОВРЕМЕННОЙ ГЛОБАЛЬНО НЕПРОТИВОРЕЧИВОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ НУЛЕВОГО И ПЕРВОГО ПОРЯДКА.

ПРОВЕДЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СВИДЕТЕЛЬСТВУЕТ О ТОМ, ЧТО В РАМКАХ СОВРЕМЕННОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ НУЛЕВОГО И ПЕРВОГО ПОРЯДКА КРОМЕ КЛАССИЧЕСКОЙ АРИСТОТЕЛЕВСКОЙ ТРАДИЦИОННОЙ ЛОГИКИ СУЩЕСТВУЕТ ТАКЖЕ И ЛОГИЧЕСКИ ИНВЕРСНАЯ ПО ОТНОШЕНИЮ К НЕЙ - ТРАНСЦЕНДЕНТНАЯ ФОРМАЛЬНАЯ ЛОГИКА, В КОТОРОЙ ВТОРОЙ И ТРЕТИЙ ЗАКОНЫ КЛАССИЧЕСКОЙ АРИСТОТЕЛЕВСКОЙ ТРАДИЦИОННОЙ ЛОГИКИ НЕ ИМЕЮТ СИЛЫ.

В НАСТОЯЩЕЙ РАБОТЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТРАНСЦЕНДЕНЦИИ ОСУЩЕСТВЛЯЕТСЯ НА ОСНОВЕ РАЗРАБОТАННОЙ АВТОРОМ ЛОГИЧЕСКИ СИНГУЛЯРНОЙ ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ И ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ «INCOL&TAMLA». В РЕЗУЛЬТАТЕ ПРИМЕНЕНИЯ УПОМЯНУТОЙ ВЫШЕ СИСТЕМЫ, АВТОРОМ С УЧЕТОМ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫДАЮЩИХСЯ МАТЕМАТИКОВ – АВСТРИЙСКОГО ЛОГИКА КУРТА ГЕДЕЛЯ, И НЕМЕЦКОГО МАТЕМАТИКА – ГЕРХАРДА ГЕНЦЕНА, ПОЛУЧЕНО НОВОЕ, ЛОГИЧЕСКИ СИНГУЛЯРНОЕ РЕШЕНИЕ «ВТОРОЙ ПРОБЛЕМЫ ГИЛЬБЕРТА».

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

АЛЕКСАНДР НОДАРОВИЧ АХВЛЕДИАНИ – ИЗРАИЛЬСКИЙ УЧЕНЫЙ, РАБОТАЮЩИЙ В ОБЛАСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ В ОСНОВАНИЯХ ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ, КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОЙ МАТЕМАТИКИ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ.

ЯВЛЯЕТСЯ АВТОРОМ СОВРЕМЕННОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ И ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ «INCOL&TAMLA», ПРЕДНАЗНАЧЕННОЙ ДЛЯ МУЛЬТИДИСЦИПЛИНАРНЫХ И МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫХ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ.

ЯВЛЯЕТСЯ ОДНИМ ИЗ АВТОРОВ (СОВМЕСТНО С НОДАРОМ ВАЛЕРИАНОВИЧЕМ АХВЛЕДИАНИ) ЭКСПЕРТНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ «ТЕОРИИ СВОБОДЫ ВЫБОРА ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ», ПРЕДНАЗНАЧЕННОЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВОПРОСОВ СИНГУЛЯРНОГО КОЛЛАПСА ПЛАСТИЧЕСКИХ И ПСЕВДОПЛАСТИЧЕСКИХ ТВЕРДЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ, РАБОТАЮЩИХ В УСЛОВИЯХ СЛОЖНОГО КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО И ДИНАМИЧЕСКОГО РЕЖИМА НАГРУЖЕНИЯ С ВЫСОКОЙ ИМПУЛЬСНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ.

ЯВЛЯЕТСЯ ЭКСПЕРТОМ В ОБЛАСТИ СИНГУЛЯРНЫХ ПРОБЛЕМ ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ, СИНГУЛЯРНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ЧИСЛЕННЫХ ЗАДАЧ КЛАССИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ, СТРОИТЕЛЬНОЙ И ГОРНОЙ МЕХАНИКИ, А ТАКЖЕ СЕЙСМОСТОЙКОСТИ СООРУЖЕНИЙ.

В НАСТОЯЩЕЙ РАБОТЕ АВТОРОМ ПРЕДСТАВЛЕНО ЛОГИЧЕСКИ СИНГУЛЯРНОЕ РЕШЕНИЕ «ВТОРОЙ ПРОБЛЕМЫ ГИЛЬБЕРТА» И ОБОСНОВАНИЕ ЛОГИЧЕСКОЙ ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ И ЛОГИЧЕСКОЙ СИНГУЛЯРНОСТИ ОСНОВАНИЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОЙ МАТЕМАТИКИ И КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ. О СООТНОШЕНИИ АРИСТОТЕЛЕВСКОЙ ТРАДИЦИОННОЙ И СОВРЕМЕННОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ.

Современная наука прошла долгий путь зарождения, становления и развития различных конкретных областей точных, естественных, гуманитарных, философских и иных наук. Пожалуй не будет преувеличением сказать, что одной из основных составляющих развития науки в целом, а в особенности точных и естественных наук, является наука логики, позволяющая систематизировать опытные и аналитические данные тех или иных конкретных наук, и способствующая дальнейшему развитию тех или иных областей науки на основе имеющихся базовых эмпирических и аналитических данных.

Учение о Логосе, как об основе развития мира в целом, и в том числе развития жизни на Земле, а также основе развития человеческого общества, восходит к незапамятным временам Древнего Мира. Судя по имеющимся современным данным, основой развития мировой науки являются древние сакральные знания, полученные людьми Древнего Мира от еще более ранних высокоразвитых цивилизаций. Частью утерянные, а частью бережно охраняемые от посторонних взоров непосвященных, эти сакральные знания воплотились в различные формы человеческого знания, а также нашли свое выражение в различных теологических, философских, эзотерических и мистических учениях Древнего Мира.

В античное время следы древних сакральных знаний, можно обнаружить в различных философских учениях и литературных памятниках античного времени, которые ныне являются достоянием широкой научной общественности.

К числу упоминаемых нами выдающихся философских памятников античного времени, без сомнения можно отнести «Изумрудную скрижаль» Гермеса Трисмегиста – легендарной личности, одно из старейших упоминании о котором содержится в трактате Цицерона «О природе Богов».

В «Изумрудной скрижали» легендарный Гермес Трисмегист утверждает об истинности соответствия *«Верхнего»* невидимого нами мира, и частично наблюдаемого нами *«Нижнего»* земного мира. Также истинно утверждается об единой *Сущностной Основе* мироздания, являющейся также и основой развития видимого и невидимого миров как *единого целого*.

Учение о Логосе , нашло одно из своих выражений в философском учении знаменитого древнегреческого философа Гераклита Эфесского (544-483гг. до н.э). Согласно учению Гераклита, все произошло из огня и пребывает в состоянии постоянного изменения. Огонь

– наиболее динамичная и изменчивая из всех стихий. Согласно представлениям Гераклита огонь сгущается в воздух, воздух превращается в воду, вода – в землю («путь вниз», который затем сменяется «путем наверх»). Сама Земля по Гераклиту некогда была частью всеобщего раскаленного огня – но затем остыла.

В соответствии с учением Гераклита, *Логос* имеет функцию управления вещами, процессами и космосом. Гераклит считал,что все непрерывно меняется. Положение о всеобщей изменчивости связывалось Гераклитом с идеей внутренней раздвоенности вещей и процессов на противоположные, взаимодействующие друг с другом стороны. По Гераклиту – *Логос* есть единство противоположностей, системообразующая связь. «Из Единого все происходит, и из всего – Единое».

Из истории античной логики /1/ известно,что одним из наиболее сильных философских и логических направлений в Древней Греции являлось учение софистов. Софи́сты (от др.-греч. — умелец, изобретатель, мудрец, знаток) — древнегреческие платные преподаватели красноречия, представители одноименного философского направления, распространенного в Греции во 2-ой половине V — 1-й половине IV веков до н. э. В широком смысле термин «софист» означал *искусного или мудрого человека*. К наиболее известным старшим софистам относятся Протагор Абдерский, Горгий из Леонтин, Гиппий из Элиды, Продик Кеосский, Антифонт, Критий Афинский.

Старшие софисты — Протагор, Горгий, Продик и Гиппий — были выдающимися учеными своего времени. До софистов философы в основном занимались исследованием природы , софисты же сделали главным предметом своего философского исследования человека и его деятельность. На первое место выступают вопросы политики, этики, теории государства и права, начинают разрабатываться риторика, филология, грамматика и т. д. Протагор и Продик одними из первых стали заниматься вопросами научного языкознания; Протагор, Горгий и Трасимах одними из первых в Греции стали создавать теорию риторики.

Знаменитое положение софиста Протагора - «человек есть мера всех вещей», - исходило из учения Гераклита о всеобщей текучести и изменчивости всего существующего. Поскольку в каждый момент изменяется, как воспринимающий субъект, так и воспринимаемый им объект, то каждое восприятие каждого человека относительно и субъективно. *По мнению софистов, для каждого истинно то, что ему кажется таковым в данное время.*

Учение Протагора *о человеке, как мере всего существующего*, о том, что *у каждого человека в каждый момент особая истина*, что *одной и той же вещи могут быть одновременно приписаны противоположные свойства*, положило начало релятивистской и субъективистской теории познания софистов. Релятивизм софистов получил особенно яркое выражение в анонимном сочинении «Двоякие речи», в котором развивается учение об относительности человеческих понятий о добре и зле, о прекрасном и безобразном, о справедливости и несправедливости, об истине и лжи. Автор говорит, *что и судьи одну и ту же речь могут расценивать и как ложь, и как истину*. Одна и та же вещь бывает одновременно и легкой и тяжелой, в зависимости от того, с какой другой вещью она сравнивается.

Разрабатывая теорию красноречия, софисты не могли не затронуть вопросов логики, рассматривая их под углом зрения техники спора. Протагор написал специальное сочинение «Искусство спорить». Исходя из положения, что *о всякой вещи есть два противоположных мнения*, он первый *стал применять диалог, в котором два собеседника в споре защищали два противоположных взгляда*.

Софисты были весьма искусными изобретателями парадоксов. В широком смысле парадокс - это положение, резко расходящееся с общепринятыми, устоявшимися, ортодоксальными мнениями. "Общепризнанные мнения и то, что считают делом давно решенным, чаще всего заслуживают исследования" /1/ (Г.Лихтенберг). Обычно парадокс представляет собой начало такого исследования, некое нарушение конвенции. Парадокс в более узком значении - это два противоположных утверждения, для каждого из которых имеются кажущиеся убедительными аргументы. Наиболее острая форма парадокса - антиномия, рассуждение, доказывающее приемлемость двух утверждений, одно из которых является отрицанием другого.

В последующее время великим древнегреческим мыслителем Аристотелем (384-322 до н.э.) была разработана совершенно иная логическая система, которая в дальнейшем и явилась базой для развития логики, как науки о формах мышления и способах восприятия окружающей объективной действительности.

Одним из наиболее важных условий возможности адекватного изучения объектов методами классической аристотелевской традиционной логики является условие детерминированности и неизменности их свойств. Другим важным требованием является то обстоятельство, что традиционная классическая логика принимает к рассмотрению те и только те высказывания об исследуемых объектах и явлениях, которые удовлетворяют следующим трем основным законам логики .

А. <u>Закон тождества</u>

Каждое высказывание равно самому себе.

$$A = A \qquad (1)$$

Б. <u>Закон непротиворечия</u>

Никакое высказывание не равно своему отрицанию

$$A \neq \neg A \qquad (2)$$

В. <u>Закон исключенного третьего</u>

Для любого высказывания истинно либо само высказывание либо его отрицание,третья возможность исключена.

$$A \oplus \neg A \qquad (3)$$

В формулах (1)-(3) приняты следующие обозначения:

A - некоторое высказывание, $\neg A$ - отрицание высказывания A.$\oplus$ - логическая пропозициональная связка, языковым эквивалентом которой является исключающее «либо», $\neg$ - символ отрицания, языковый эквивалент которого выражается, как «не - A», или выражением «не верно, что A ».

Необходимо отметить, что в классической традиционной формальной логике допустимо рассматривать те и только те высказывания, которые удовлетворяют перечисленным выше логическим законам. *Только при соблюдении этого условия*, в отношении таких высказываний будут справедливы все те законы классической традиционной формальной логики, которые логически совместны с перечисленными выше основными законами.

Понятие «Истины» является одной из фундаментальных религиозных, философских и логических категорий. В различных философских и логических системах оно определяется по разному. Одной из основных традиционной концепций понятия истины *в рамках классической философии* является концепция, основные положения которой были сформулированы еще великим древнегреческим мыслителем Аристотелем, и развиты в работах философов последующего времени. Главное из этих положений сводится к утверждению: *истина есть соответствие вещи и интеллекта*. В *традиционном классическом смысле* истина – это адекватная информация об объекте, получаемая посредством чувственного и интеллектуального изучения, или принятия сообщения об объекте, *и характеризуемая с позиции достоверности*. В логике, для которой значение истинности высказываний является одним из преимущественных предметов изучения, одним из критериев истинности выступает логическая правильность - относительная полнота формально-аксиоматических систем и отсутствие в них противоречий.

Одним из важных итогов философских исследований выступает различие между абсолютной и относительной истиной. Абсолютная истина – это полное, исчерпывающее знание о мире или о некоторой совокупности его объектов (в частности *одного объекта*), как о сложно организованных системах. Относительная истина – это неполное, *но в некоторых отношениях верное знание* в отношении тех же систем. Относительная истина – философское понятие, отражающее утверждение, что абсолютная истина (или истина в «последней инстанции») трудно достижима.

Одним из основных понятий классической логики высказываний является понятие противоречия. Оно имеет несколько определений.

• Противоречие – положение при котором одно высказывание исключает другое высказывание, несовместимое с ним.

• Противоречие - утверждение о тождественном равенстве двух или более заведомо различных объектов.

• Антиномия - в классической традиционной логике - противоречие между двумя высказываниями одинаково логически доказуемыми.

Отметим, что антиномия является особым видом противоречия, постольку поскольку возможна такая логическая ситуация при которой *логически истинными* являются, как доказательство самого утверждения, так и его опровержения.

К числу *неформальных* аксиом традиционной классической логики относится сформулированный в завершенном виде выдающимся математиком, философом и логиком Г.В. Лейбницем «**Принцип достаточного основания»** - принцип, требующий, чтобы в случае каждого утверждения указывались убедительные основания, в силу которых оно принимается и считается истинным. Обоснование теоретического утверждения, как правило слагается *из целой серии процедур*, касающихся не только самого утверждения, но и той теории, составным элементом которой оно является.

В своих трудах Аристотель очерчивает рамки применимости закона о непротиворечии и закона об исключенном третьем. В его сочинениях отмечается, «*что законы непротиворечия и исключенного третьего не имеют силы в суждениях о будущем: если кто-нибудь утверждает, что что-либо случится в будущем, а другой отрицает это, то здесь нет логического противоречия, потому что, пока факт не совершился, возможно* *как то, так и другое, поскольку будущее не является необходимо детерминированным, оно зависит от случайностей, зависит и от воли людей, и от их поведения».*

Упомянутое выше мнение самого создателя классической традиционной формальной логики о границах применимости закона о непротиворечии и закона об исключенном третьем заслуживает самого серьезного внимания. По существу дела аристотелевская классическая традиционная логика применима только при исследовании вопросов, происходящих в настоящем, или исследовании вопросов и явлений, имевших место в прошлом. Также предполагается, что существуют критерии истинности, в соответствии с которыми можно достоверно оценивать истинность, либо ложность утверждений, связанных с исследуемыми явлениями и процессами.

Как известно, классическая математика занимается преимущественно изучением явлений и процессов, связанных с бесконечностью. Однако, по вполне понятным причинам, связанным с границами применимости классической аристотелевской традиционной логики, в классической математике при изучении свойств бесконечных величин, как правило избегали рассмотрения в явном виде зависимости изучаемых бесконечных величин от времени. Это можно объяснить тем, что учет времени в явном виде сразу же ставит под сомнение законность применения некоторых классических методов косвенного доказательства, таких например, как метод доказательства от противного, который самым непосредственным образом связан со вторым и третьим основными законами классической аристотелевской традиционной логики, и часто применяется в тех случаях, когда на основании прямых методов доказательства не представляется возможным найти решение той или иной сложной проблемы.

Однако в современной классической теоретико-множественной математике функция времени является совершенно законным и стандартным инструментом изучения явлений и процессов, связанных с бесконечностью /2/. В основе понятия функции времени лежит множество $T \subseteq R$ с элементами t, называемое множеством моментов времени. Время обладает той характерной особенностью, что имеет направление. Это означает, что если $t_1, t_2 \in T$ и $t_1 < t_2$, то момент времени t_1 предшествует моменту времени t_2. Иными словами, T является упорядоченным множеством.

Функция времени определяет отображение f множества моментов времени T на множество вещественных чисел R:

$$f : T \to R \tag{4}$$

Элементами f будут пары (t, x), обозначаемые также через $x(t)$, где $t \in T, x \in R$. Каждая такая пара определяет значение функции в момент t и называется событием или мгновенным значением функции времени. Полная совокупность пар (t, x), т.е. значений $x(t)$ для всех $t \in T$, и представляет собой функцию времени.

Введение функции времени сразу же ставит вопрос об учете так называемых А и В логик времени, одна из которых ориентирована на временной ряд «прошлое-настоящее-будущее», а другая на временной ряд «раньше-одновременно-позже». Это обстоятельство в свою очередь означает выход за пределы классической аристотелевской традиционной логики.

В настоящей книге исследуются вопросы соотношения классической аристотелевской традиционной логики и современной классической формальной логики нулевого и первого порядков. Также в рамках «Второй проблемы Гильберта» исследуется вопрос логических оснований классической теоретико-множественной математики и аксиоматической системы **PA** выдающегося итальянского математика Джузеппе Пеано. В настоящей работе показано, что несмотря на то, что все формализуемые логические формулы классической аристотелевской традиционной логики являются истинными логическими формулами классической формальной логики нулевого порядка, тем не менее классическая формальная логика нулевого порядка в сильной степени отличается от классической аристотелевской логики в смысле однозначного выполнения второго и третьего основных законов классической аристотелевской логики.

Проведенное исследование показывает, что современная классическая формальная логика обладает гораздо более сильными доказательными возможностями по сравнению с аристотелевской традиционной логикой. В частности на основани методов классической формальной логики нулевого порядка удалось найти решения для некоторых классических логических парадоксов, решение которых является невозможным в рамках аристотелевской традиционной логики.

С другой стороны, детальный анализ известных теорем выдающегося австрийского логика Курта Геделя о неполноте формальных и полуформальных математических теорий, содержащих систему **PA** показал, что сочетание аристотелевской традиционной логики с современной классической формальной логикой нулевого порядка в ряде случаев приводит к образованию логически трансцендентной формальной системы, где под логической трансценденцией понимается выход за пределы аристотелевской традиционной логики в смысле выполнимости второго и третьего основных законов аристотелевской логики.

Аналогичное положение имеет место и в основаниях теоретико-множественной математики, а именно, - сочетание «Аксиомы пустого множества», «Аксиомы регулярности» и «Аксиомы выбора», в сочетании с «Методом математической индукции» является достаточным условием для образования логически трансцендентной по отношению к аристотелевской традиционной логике формальной логико-математической системы.

Приведенные в настоящей работе данные являются неопровержимым свидетельством о конструктивной осуществимости логического коллапса и генезиса логической трансценденции на множестве унарных и бинарных логических операций в каждой логико-математической формальной или полуформальной теории, содержащей классическую формальную логику нулевого порядка, «Метод математической индукции» и «Аксиому выбора». Это означает, что в основаниях классической формальной логики нулевого порядка и классической теоретико-множественной математики существует трансцендентная логика, являющаяся логически инверсной по отношению к классической аристотелевской традиционной логике.

Проведенное в настоящей работе исследование позволяет заключить, что в основаниях классической формальной логики нулевого порядка и основаниях классической теоретико-множественной математики кроме аристотелевской классической традиционной логики существует также трансцендентная формальная логика. Совокупность аристотелевской классической традиционной логики и трансцендентной формальной логики образует сингулярную формальную логику в основаниях классической теоретико-множественной математики, содержащей классическую формальную логику нулевого порядка, «Метод математической индукции» и «Аксиому выбора», что и является логически сингулярным решением «Второй проблемы Гильберта» для оснований классической теоретико-множественной математики, содержащих аксиоматическую систему **PA**.

Используемые источники:

1. **Маковельский А.О. История логики.**

2. **Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. Москва. 1980.**

2. ГНОСЕОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПАРАДОКСА «ТЯЖБА ПРОТАГОРА С ЭВАТЛОМ»

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе исследуются гносеологические и логические аспекты анализа известного древнегреческого софистического парадокса «Тяжбы Протагора с Эватлом». Показано, что существуют по крайней мере два решения упомянутого парадокса, которые однако, выходят за рамки аристотелевской традиционной логики.

Одним из наиболее важных условий возможности адекватного изучения объектов методами классической аристотелевской традиционной логики является условие детерминированности и неизменности их свойств. Другим важным требованием является то обстоятельство, что традиционная классическая логика принимает к рассмотрению те и только те высказывания об исследуемых объектах и явлениях, которые удовлетворяют следующим трем основным законам аристотелевской логики .

А. <u>Закон тождества</u>

Каждое высказывание равно самому себе.

$$A = A \tag{1}$$

Б. <u>Закон непротиворечия</u>

Никакое высказывание не равно своему отрицанию

$$A \neq \neg A \tag{2}$$

В. <u>Закон исключенного третьего</u>

Для любого высказывания истинно либо само высказывание либо его отрицание,третья возможность исключена.

$$A \oplus \neg A \tag{3}$$

В формулах (1)-(3) приняты следующие обозначения:

A - некоторое высказывание, $\neg A$ - отрицание высказывания A.$\oplus$ - логическая пропозициональная связка, языковым эквивалентом которой является исключающее «либо», $\neg$ - символ отрицания, языковый эквивалент которого выражается, как «не - A», или выражением «не верно, что A » .

Необходимо отметить, что в классической аристотелевской традиционной логике допустимо рассматривать те и только те высказывания, которые удовлетворяют перечисленным выше логическим законам. *Только при соблюдении этого условия*, в отношении таких высказываний будут справедливы все те законы классической аристотелевской традиционной логики, которые логически совместны с перечисленными выше основными законами.

Понятие «Истины» является одной из фундаментальных религиозных, философских и логических категорий. В различных философских и логических системах оно определяется по разному. Одной из основных традиционной концепций понятия истины *в рамках классической философии и логики* является концепция, основные положения которой были сформулированы еще великим древнегреческим мыслителем Аристотелем, и развиты в работах философов последующего времени. Главное из этих положений сводится к утверждению: *истина есть соответствие вещи и интеллекта*. В *традиционном классическом смысле* истина – это адекватная информация об объекте, получаемая посредством чувственного и интеллектуального изучения, или принятия сообщения об объекте, *и характеризуемая с позиции достоверности*. В логике, для которой значение истинности высказываний является одним из преимущественных предметов изучения, одним из критериев истинности выступает логическая правильность - относительная полнота формально-аксиоматических систем и отсутствие в них противоречий.

Одним из важных итогов философских исследований выступает различие между абсолютной и относительной истиной. Абсолютная истина – это полное, исчерпывающее знание о мире или о некоторой совокупности его объектов (в частности *одного объекта*), как о сложно организованных системах. Относительная истина – это неполное, *но в некоторых отношениях верное знание* в отношении тех же систем. Относительная истина – философское понятие, отражающее утверждение, что абсолютная истина (или истина в «последней инстанции») трудно достижима.

Одним из основных понятий классической логики высказываний является понятие противоречия. Оно имеет несколько определений.

• Противоречие – положение при котором одно высказывание исключает другое высказывание, несовместимое с ним.

• Противоречие - утверждение о тождественном равенстве двух или более заведомо различных объектов.

• Антиномия - в классической традиционной логике - противоречие между двумя высказываниями одинаково логически доказуемыми.

Отметим, что антиномия является особым видом противоречия, постольку поскольку *возможна такая логическая ситуация* при которой *логически истинными* являются, как доказательство самого утверждения, так и его опровержения.

К числу *неформальных* аксиом традиционной классической логики относится сформулированный в завершенном виде выдающимся математиком, философом и логиком Г.В. Лейбницем «**Принцип достаточного основания»** - принцип, требующий, чтобы в случае каждого утверждения указывались убедительные основания, в силу которых оно принимается и считается истинным. Обоснование теоретического утверждения, как правило слагается *из целой серии процедур*, касающихся не только самого утверждения, но и той теории, составным элементом которой оно является.

Отметим, что в настоящее время, в рамках формальной логики нулевого порядка «**Принцип достаточного основания»,** как правило не применяется, хотя не существует никаких ограничений в отношении возможности его применения. С другой стороны «**Принцип достаточного основания»** неформализуем, а потому является независимым от системы аксиом логик нулевого и первого порядков. Поэтому его можно добавлять (или же не добавлять) в качестве дополнительной аксиомы. В дальнейших логических построениях мы будем применять «**Принцип достаточного основания»** в качестве одного из основных логических законов.

В своих трудах Аристотель очерчивает рамки применимости закона о непротиворечии и закона об исключенном третьем. В его сочинениях отмечается, «*что законы непротиворечия и исключенного третьего не имеют силы в суждениях о будущем: если кто-нибудь утверждает, что что-либо случится в будущем, а другой отрицает это, то здесь нет логического противоречия, потому что, пока факт не совершился, возможно как то, так и другое, поскольку будущее не является необходимо детерминированным, оно зависит от случайностей, зависит и от воли людей, и от их поведения*».

Разделяя это мнение Аристотеля в отношении классической традиционной логики, приведем в качестве примера эпистемологический анализ известного древнегреческого софистического парадокса «Тяжбы Протагора с Эватлом», изобретенного в древнегреческой школе софистов, который как будет показано далее, основывается на том, что включает в себя *договор Протагора с Эватлом, в котором описываются условия договора, которые должны быть выполнены в будущем.*

Парадокс «Тяжбы Протагора с Эватлом»

У древнегреческого софиста Протагора учился софистике, и в том числе судебному красноречию, некий Эватл. По заключенному между ними договору Эватл должен был заплатить за обучение 10 тыс. драхм только в том случае, если выиграет свой первый судебный процесс. В случае проигрыша первого судебного дела, в соответствии с заключенным договором он вообще не обязан был платить.

Однако закончив обучение, Эватл не стал учавствовать в судебных тяжбах. Как следствие этого обстоятельства, он считал себя свободным от платы за учебу. Это длилось довольно долго, терпение Протагора иссякло, и он сам подал на своего ученика в суд. Таким образом должен был состояться первый судебный процесс Эватла.

Протагор привел следующую аргументацию: «Каким бы ни было решение суда, Эватл должен будет заплатить. Он либо выиграет свой судебный процесс, либо проиграет. Если выиграет, то заплатит по договору, если проиграет, то заплатит по решению суда.

Эватл возражал: «Ни в том, ни в другом случае я не должен платить.Если я выиграю, то я не должен платить по решению суда, если проиграю, то не заплачу по договору.

Для разрешения рассматриваемого парадокса постараемся логически четко сформулировать условия задачи, согласно которым:

1. Протагором подан иск против Эватла на указанную в договоре сумму в 10 тыс.драхм.

2. В случае выигрыша процесса Протагором, он получает указанную в договоре и иске сумму от Эватла.

3. В случае выигрыша дела Эватлом, он получает указанную в иске сумму – 10 тыс. драхм от Протагора.

4. Судья не имеет права отклонить иск Протагора.

5.Судья обязан вынести решение, обеспечивающее непротиворечивость по отношению к условиям договора Протагора с Эватлом, в рамках одного судебного процесса.

6.Существует правовой механизм, обеспечивающий неукоснительное исполнение решения суда в соответствии с договором между Протагором и Эватлом.

Заметим, что хотя аргументация Эватла с точки зрения классической традиционной формальной логики на первый взгляд контрадикторно противоположна аргументации Протагора, однако обе аргументации касаются будущего, которое еще не наступило, поэтому в данном случае, в отношении аргументаций Протагора и Эватла, согласно *подходу Аристотеля, закон о непротиворечии и закон исключенного третьего не имеют силы.*

Указанное обстоятельство означает, что решение данного парадокса не связано с обязательным выполнением второго и третьего основного законов логики. В решении поставленной задачи мы обязаны лишь обеспечить непротиворечивость по отношению к договору Протагора с Эватлом с учетом условий (1) – (6), что как будет показано далее, является возможным, при условии применения *метода непротиворечивого урегулирования конфликтных ситуаций*.

Итак, рассмотрим вопрос, каково должно быть решение судьи, чтобы оно удовлетворяло бы условиям договора между Протагором и Эватлом. Судья должен вынести решение в пользу либо Протагора, либо Эватла. Что бы вынести решение в пользу Протагора надо иметь достаточные основания, а их нет, поскольку *первый процесс еще не завершен*. Если же тем не менее вынести решение в пользу Протагора, то сразу же после суда окажется, что решение суда противоречит условиям договора, поскольку Эватл свой первый процесс проиграл. Поэтому решение в пользу Протагора окажется необоснованным. Кроме этого, если вынести решение в пользу Протагора, то в этом случае Эватл не должен платить в силу договора, поскольку он проиграет свой первый процесс. Это означает, что Протагор не получит суммы в 10 тыс. драхм, поскольку Эватл не заплатит ему эту сумму в силу договора. Поэтому в этом случае возникает противоречие с условиями договора – Протагор, выиграв процесс, должен получить 10 тыс.драхм от Эватла, а Эватл не должен платить эти же самые деньги по договору. Ввиду невозможности исполнения решения суда это дело может быть вынесено на повторный судебный процесс, что нарушит условие 5.

Рассмотрим теперь второй из возможных вариантов – судья вынесет решение в пользу Эватла. В этом случае Протагор заплатит 10 тыс. драхм Эватлу по решению суда, а Эватл выплатит Протагору эти же 10 тыс. драхм по договору. Таким образом условия договора, а также условия (1) – (6) и возможность исполнения решения суда будут обеспечены. С учетом рассмотренных выше обстоятельств у судьи есть все основания вынести приговор в пользу Эватла.

Таким образом, в результате решения суда, Протагор *формально получит плату* от Эватла своими же собственными деньгами, *а реальных заработанных* на обучении Эватла денег *он не получит*. Эватл *формально уплатит* Протагору его же собственные деньги, а *реальных своих денег* за обучение *не заплатит*. Итак с формальной и реальной точки зрения *суд выиграет Эватл*, *Протагор дело в суде проиграет*, но по договору *формально получит свои собственные деньги* от Эватла, а на деле - *на обучении Эватла не заработает ничего*.

Теперь вернемся назад к аргументации Протагора и Эватла. С точки зрения судопроизводства аргументация Протагора *формально выполнена, а реально нет*. Аргументация Эватла *выполнена реально, а формально нет*. Это означает, что в отношении каждого из суждений Протагора и Эватла, с точки зрения классической традиционной формальной логики невыполнимы законы непротиворечия и исключенного третьего, поскольку с деловой и судебной точки зрения *реальная истина* противоположна *формальной истине*, т.е *реальная истина* на стороне аргументации Эватла, а *формальная истина* - на стороне аргументации Протагора и несмотря на это обе *«противоположные друг другу истины»* имеют место в действительности, причем на заключительном этапе судебного процесса условии с помощью применения *метода непротиворечивого урегулирования конфликтных ситуаций удается непротиворечиво выполнить* все условия договора между Протагором и Эватлом, а также условия (1) – (6).

Необходимо отметить, что исходя из условий договора, у Эватла имеется дополнительная возможность освободиться от обязанности оплатить свое обучение. Для этого ему достаточно, не дожидаясь начала судебного разбирательства, взяться за другой, какой либо заведомо проигрышный для него процесс, или же организовать фиктивное дело и фиктивный процесс с заранее предрешенным проигрышным результатом. В этом случае он по окончании фиктивного судебного процесса, в соответствии с договором, фактически сразу же будет освобожден от уплаты денег Протагору. Таким образом, мы можем заключить, что договор между Протагором и Эватлом был составлен в ущерб интересам Протагора, и кроме этого, фактически позволил Эватлу реализовать свое преимущество, невзирая на нарушение им морально этических принципов в отношени своего учителя.

Из рассуждения, приведенного выше, следует, что решение данного парадокса выходит за рамки классической традиционной формальной логики вследствие нарушения двух основных законов формальной логики. Необходимо отметить, что при приведенном нами эпистемологическом анализе парадокса «Тяжбы Протагора с Эватлом» мы в неявной форме учитывали логико-временные аспекты рассматриваемой задачи. Кроме этого, приведенный эпистемологический анализ, фактически выходит также за рамки интуиционистской и конструктивистской логик, что выражается не только в неприменении закона исключенного третьего, но также и закона непротиворечия. Также в неявной форме учитывался временной ряд «прошлое-настоящее-будущее», характерный для А-логики времени.

Рассмотрим вопрос о том, может ли приведенное выше доказательство быть опровергнуто методами классической формальной логики, или же методами конструктивистской и интуиционистской логик. Методами классической традиционной логики это не может быть сделано, поскольку сама проблема и ее решение выходят за рамки применимости основных законов упомянутой логики. Что касается классической формальной логики первого порядка, то с этой точки зрения, приведенное нами доказательство строит, по крайней мере непротиворечивую и выполнимую в реальности модель. Кроме этого, может быть показано, что приведенные нами решения могут быть логически строго формализованы в рамках современной классической формальной логики первого порядка.

Поэтому с точки зрения логики первого порядка приведенное нами доказательство также не может быть опровергнуто, поскольку существует непротиворечивая модель решения задачи. С точки зрения интуиционистской и конструктивистской логик опровержение данного доказательства также не представляется возможным, поскольку из самих условий парадокса следует, что закон о непротиворечии в рассматриваемом случае также не имеет силы.

Таким образом можно придти к выводу, что рассмотренное нами доказательство не может быть опровергнуто в рамках классической традиционной логики, конструктивной логики, а также интуиционистской логики, по причине невыполнимости второго и третьего законов классической логики. По этой же причине в рамках упомянутых нами логических систем, приведенное доказательство не может быть также и подтверждено с помощью метадоказательств.

Из приведенных выше рассуждений следует, что выполнение второго и третьего основных законов классической формальной логики не является чем то самим собой разумеющимся. Наоборот, исходя из **«Принципа достаточного основания»** следует, что в классических полуформальных математических теориях *необходимо иметь достаточно убедительные основания* для того, что считать те или иные утверждения этой теории высказываниями, удовлетворяющими основным законам аристотелевской традиционной логики. Очевидно, что это обстоятельство предполагает предъявление более строгих требований к логической строгости классических математических доказательств, которые заключаются в необходимости анализа логической структуры доказываемых формул, и верификации их на соответствие основным законам аристотелевской логики. При систематическом игнорировании упомянутых требований, по мере развития той или иной конкретной классической математической полуформальной теории, с большой степенью вероятности, следует ожидать появления в этой теории антиномий и недостоверных выводов, которые в свою очередь могут распространиться и на те области знания, в которых будут использоваться, полученные в упомянутой математической теории результаты.

3. ФОРМАЛЬНО-ЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ «ПАРАДОКСА КРОКОДИЛА»

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе исследуется известный софистический «Парадокс крокодила» и предлагается вариант его решения на основе современной классической формальной логики нулевого порядка. Формализация представленного решения проверена вычислительной логической программой математического пакета MATCAD 12.

Из истории развития логики, как науки, известно, что софисты были весьма искусными изобретателями парадоксов. В широком смысле парадокс - это положение, резко расходящееся с общепринятыми, устоявшимися, ортодоксальными мнениями. "Общепризнанные мнения и то, что считают делом давно решенным, чаще всего заслуживают исследования" /1/ (Г.Лихтенберг). Обычно парадокс представляет собой начало такого исследования, некое нарушение конвенции. Парадокс в более узком значении - это два противоположных утверждения, для каждого из которых имеются кажущиеся убедительными аргументы. Наиболее острая форма парадокса - антиномия, рассуждение, доказывающее приемлемость двух утверждений, одно из которых является отрицанием другого.

Традиция изобретать и выявлять парадоксы сохранилась и в последующем развитии логики, как науки, вплоть до нового времени. Обычно парадоксы строятся на том, что логика входящих в них утверждений, отличается по своим логическим выразительным свойствам от логики обычных высказываний аристотелевской классической традиционной логики.

В настоящей работе мы предлагаем к рассмотрению вариант решения одного из ивестных парадоксов – «Парадокса крокодила», автором которого считается античный сицилийский софист Коракс. Вначале изложим суть парадокса в сответствии с /2/.

«Крокодил выхватил у египтянки, стоявшей на берегу реки, ее ребенка. На ее мольбу вернуть ребенка крокодил, пролив, как всегда, крокодилову слезу, ответил:

— Твое несчастье растрогало меня, и я дам тебе шанс получить назад ребенка. Угадай, отдам я его тебе или нет. Если ответишь правильно, я верну ребенка. Если не угадаешь, я его не отдам.

Подумав, мать ответила:

— Ты не отдашь мне ребенка.

— Ты его не получишь, — заключил крокодил. — Ты сказала либо правду, либо неправду. Если то, что я не отдам ребенка, — правда, я не отдам его, так как иначе сказанное не будет правдой. Если сказанное — неправда, значит, ты не угадала, и я не отдам ребенка по уговору.

Однако матери это рассуждение не показалось убедительным:

— Но ведь если я сказала правду, то ты отдашь мне ребенка, как мы и договорились. Если же я не угадала, что ты не отдашь ребенка, то ты должен мне его отдать, иначе сказанное мною не будет неправдой.

Кто прав: мать или крокодил? К чему обязывает крокодила данное им обещание? К тому, чтобы отдать ребенка или, напротив, чтобы не отдать его?»

Исследование «Парадокса крокодила» будем вести на основе современной классической формальной логики нулевого порядка. Далее приводятся необходимые базовые определения и правила упомянутой логической системы.

Базовыми понятиями логики высказываний нулевого порядка являются:

- Пропозициональная переменная – переменная, значением которой может быть логическое высказывание.

- Пропозициональная формула – определяется индуктивно следующим образом:

а) Если P – пропозициональная переменная, то P – формула.

б) Если A – формула, то ¬A – формула.

в) Если A и B формулы, то

$$(A \vee B) \qquad (A \wedge B) \tag{1}$$

$$\Rightarrow(A, B) \tag{2}$$

также формулы.

В формулах (1) на первом месте стоит дизъюнкция высказываний A и B, соответствующая логической связке «A или B». На втором месте стоит конъюнкция, соответствующая логической связке «A и B».

- Каждая формула может быть получена за конечное число шагов при помощи рассмотренных выше правил.

- Знаки

$$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \tag{3}$$

обозначают отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию (логическое следование). Например ¬A означает отрицание высказывания A. Выражение (2) означает, что из высказывания A следует высказывание B. Импликация обозначается также A→B (A имплицирует B). Приведенные в выражении (3) знаки называются пропозициональными логическими связками.

- Подформулой называется часть формулы, сама являющаяся формулой. Собственной подформулой называется подформула, не совпадающая со всей формулой.

- Оценкой пропозициональных переменных называется функция из множества всех пропозициональных переменных в множество истинностных значений {0,1}. *Основной задачей логики нулевого порядка является установление истинностного значения формулы, если определены истинностные значения входящих в нее переменных.* Истинностное значение формулы в таком случае определяется индуктивно, с шагами, которые использовались при построении формулы с использованием таблиц истинности связок.

В классической формальной логике нулевого порядка основные законы классической формальной логики Аристотеля являются тождественно истинными формулами. Формализация основных трех законов логики Аристотеля имеет следующий вид:

Закон тождества

Каждое высказывание тождественно равно самому себе:

$$A=A \tag{4 }$$

Закон о непротиворечии

Никакое высказывание не равно своему отрицанию :

$$A \neq \neg A \tag{5}$$

Закон об исключенном третьем

Для каждого высказывания A, либо само высказывание истинно, а его отрицание $\neg A$ ложно, либо само высказывание A ложно, а его отрицание $\neg A$ истинно, *третья возможность исключена.*

$$A \oplus \neg A \tag{6}$$

В обозначениях формул (4),(5), A-некоторое высказывание, $\neg A$ – отрицание высказывания A. В формуле (6), $\oplus$ - логический оператор, соответствующий исключающему «либо».

Критерий доказуемости и недоказуемости формул классического формального исчисления высказываний

Пусть A – некоторая формула классического исчисления высказываний, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – перечень входящих в нее переменных. Вычислим $R_{a1,a2,..,an}(A)$ на множестве всех наборов значений $a_1, a_2, \ldots, a_n$ входящих в нее переменных. Если при этом $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$, на всех наборах $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то формула A – тождественно истинна, *такая формула признается доказуемой*.

Если же существует набор значений переменных такой, что условие $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$ не выполняется , то формула A – не тождественно истинная, *такая формула признается недоказуемой.*

Критерий противоречивости и непротиворечивости формул классического исчисления высказываний

Пусть A – некоторая формула классического исчисления высказываний, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – перечень входящих в нее переменных. Вычислим $R_{a1,a2,..,an}(A)$ на множестве всех наборов значений $a_1, a_2, \ldots, a_n$ входящих в нее переменных. Если при этом $R_{a1,a2,..,an}(A)=0$, на всех наборах a_1, $a_2,\ldots,a_n$, то формула А – *признается тождественно ложной или тождественно противоречивой*.

Если же существует набор значений переменных такой, что условие $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$ выполняется хотя бы в одном случае из рассматриваемых, то формула А – *признается выполнимой и непротиворечивой*.

Определение формальной непротиворечивости логического исчисления высказываний

Логическое исчисление называется формально непротиворечивым, если в нем не доказуемы никакие две внешние формулы, из которых одна является отрицанием другой. Иначе говоря, логическое исчисление называется формально непротиворечивым, если в нем не существует такая внешняя формула А, что доказуема как формула А, так и формула ¬А . В противном случае логическое исчисление является противоречивым.

Проблема формальной непротиворечивости заключается в выяснении вопроса: является данное исчисление непротиворечивым или нет? Если в исчислении обнаруживаются внешние доказуемые формулы вида А и ¬А , то такое исчисление является формально противоречивым.

Известна следующая, *логически неопровержимо* доказанная теорема.

Теорема о непротиворечивости классического формального исчисления высказываний

Классическое формальное исчисление высказываний обладает свойством формальной непротиворечивости.

Сказанное выше означает, что моделирование тех или иных логических формул в рамках классической формальной логики нулевого порядка, в соответствии с правилами упомянутой теории, будет являться объективным и будет адекватно отражать логическую природу исследуемых с ее помощью логических формул.

Теперь приступим к логическому моделированию «Парадокса Крокодила» в рамках классической формальной логики нулевого порядка.

Введем следующие обозначения. Пусть А – логическая формула:

А= «крокодил вернет ребенка матери» (7)

Тогда:

$$\neg A = \text{«неверно, что крокодил вернет ребенка матери»} \qquad (8)$$

Обозначим через B – формулу матери, содержащую утверждение о том отпустит ли крокодил ее ребенка или нет. Тогда ⌐B – отрицание этой формулы.

Исходя из принятых выше обозначений и текста парадокса, условия крокодила моделируются следующими двумя формулами:

$$\Rightarrow(B = 1, A) \qquad (9)$$

$$\Rightarrow(B \neq 1, \neg A) \qquad (10)$$

Словесная интерпретация формулы (9) выглядит следующим образом: «если формула матери истинна, то крокодил вернет ребенка матери». Словесная интерпретация формулы (10) выглядит следующим образом: «если формула матери не истинна, то неверно, что крокодил вернет ребенка матери». Таким образом из приведенных выше утверждений следует, что матерью ребенка должна быть сформулирована такая логическая формула, которая вынуждает крокодила отдать ей ребенка в соответствии с его собственными условиями.

Вычислим векторы значений истинности формул условий крокодила на множестве бинарных логических операций, определенных современной классической формальной логикой нулевого порядка, поскольку формулы (9) и (10) являются бинарными логическими формулами. В соответствии с принятыми в классической формальной логике правилами положим:

$$B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Формулы (11) обеспечивают рассмотрение конечного множества всех возможных конкретных комбинаций значений переменных B и A. Используя для вычисления векторов значений истинности условий крокодила оператор векторизации, предусмотренный логической вычислительной программой математического пакета **MATCAD 12,** получим:

$$\overrightarrow{\Rightarrow(B = 1, A)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

$$\overrightarrow{\Rightarrow(B \neq 1, \neg A)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Таким образом из формул (12) и (13) мы видим, что в соответствии с базовыми определениями классической логики нулевого порядка, крокодилом были выдвинуты выполнимые и непротиворечивые логические формулы.

Необходимо отметить, что в соответствии с условиями парадокса у крокодила имеются значительные логические преимущества перед матерью ребенка. Это выражается в том, что у крокодила имеется возможность вариации логических связок, т.е. возможность свободного выбора в дизъюнкции и конъюнкции между формулами его условий, а также возможность неприменения логических связок между ними, поскольку в его собственных условиях это прямо не оговорено.

Исследуем теперь формулу матери, приведенную в тексте парадокса. По своей логической структуре она совпадает с формулой (8), т.е. мать ребенка выдвигает логическую формулу:

$$B = \neg A \qquad (14)$$

В этом случае у крокодила появляется возможность объявить, что формулы его условий подразумевают их конъюнкцию. Тогда на множестве бинарных логических операций получаем следующие формулы:

$$\overrightarrow{\left(\Rightarrow(B = 1, A) \wedge \Rightarrow(B \neq 1, \neg A)\right)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (15)$$

$$\overrightarrow{(B = \neg A)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (16)$$

Формула (15) представляет собой конъюнкцию логических формул условий крокодила. Формула (16) представляет собой логическую формулу матери ребенка.

В рассматриваемом случае аргументация крокодила имеет следующий вид.

1. Выдвинутая матерью логическая формула логически несовместна с условиями крокодила:

$$\overrightarrow{\left[\left(\left(\Rightarrow(\mathrm{B}=1,\mathrm{A})\wedge\Rightarrow(\mathrm{B}\neq 1,\neg\mathrm{A})\right)\right)\wedge(\mathrm{B}=\neg\mathrm{A})\right]}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad (17)$$

2. Формула матери (14), подставленная вместо B в формулу конъюнкции условий крокодила, приводит к тождественно ложной формуле на множестве унарных логических операций, а это означает, что с точки зрения классической формальной логики нулевого порядка, матерью ребенка была высказана такая логически формула, которая в сочетании с условием конъюнкции формул крокодила приобрела логически тождественно противоречивый вид:

$$\left[\left(\Rightarrow(\neg\mathrm{A}=1,\mathrm{A})\right)\wedge\left(\Rightarrow(\neg\mathrm{A}\neq 1,\neg\mathrm{A})\right)\right]=0 \qquad (18)$$

Поэтому в рассматриваемом случае у крокодила в соответствии с его собственными условиями появляются все основания не отдать ребенка матери. Таким образом *предлагаемое нами решение рассматриваемого парадокса заключается в том, что приведенная в нем логическая формула ответа матери в контексте конъюнкции формул условий крокодила оказывается логически противоречивой.*

Необходимо отметить, что некоторые приведенные выше логические формулы имеют существенные отличия от логических формул аристотелевской логики. В соответствии с основными законами аристотелевской логики (4)-(6), высказывание должно быть либо истинным, либо ложным, *третья возможность исключена*. Этого мы никак не можем утверждать в отношении формул крокодила (12) и (13), поскольку утверждения об их истинности или ложности оказываются недоказуемыми, хотя и непротиворечивыми:

$$\overrightarrow{\left(\Rightarrow(\mathrm{B}=1,\mathrm{A})=1\right)}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\left(\Rightarrow(\mathrm{B}=1,\mathrm{A})=0\right)}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad (19)$$

$$\overrightarrow{\left(\Rightarrow(B \neq 1, \neg A) = 1\right)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\left(\Rightarrow(B \neq 1, \neg A) = 0\right)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (20)$$

По нашему мнению, приведенное выше исследование свидетельствует о возможности реконструкции и моделирования софистической логической техники в рамках классической формальной логики нулевого порядка, что может представлять определенный интерес с точки зрения вопросов исследования античных софистических философских и логических традиций, а также их философских и логических архетипов в некоторых классических формальных и полуформальных логических и математических теориях нового времени.

Используемые источники:

1. **А.О.Маковельский. «История логики».**

2. **«Парадокс крокодила». («Крокодил»(софизм Коракса)-Википедия).**

4.ФОРМАЛЬНО-ЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ «ПАРАДОКСА ЛЖЕЦА»

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе, в рамках современной классической формальной логики нулевого порядка, исследуется известный античный софистический «Парадокс лжеца» и некоторые его разновидности. Формализация представленных решений осуществлена на основе вычислительной логической программы математического пакета MATCAD - 12.

«Парадокс лжеца» является одним из наиболее известных древнегреческих античных софистических парадоксов. Согласно историческим сведениям, его автором является представитель античной мегарской философской школы Евбулид. Наиболее сильная форма «Парадокса лжеца» выражается следующей фразой – «То, что я утверждаю сейчас, ложно».

Стандартное интуитивное рассуждение о «Парадоксе лжеца» утверждает /1/, что «если содержащееся в «Парадоксе лжеца» суждение истинно, то оно ложно, а если оно ложно, то оно является истинным, следовательно оно противоречит закону исключенного третьего». Считается, что предложение такого рода принципиально не может быть ни доказано, ни опровергнуто в пределах того языка на котором оно изложено.

В настоящей работе на основе современной классической логики нулевого порядка предлагаются варианты формализации «Парадокса лжеца», а также некоторых его разновидностей. Необходимо отметить, что современная классическая формальная логика нулевого порядка обладает тем достоинством, что ее глобальная непротиворечивость доказана (доказательство принадлежит известному австрийскому логику Курту Геделю). Это означает, что в рамках упомянутой системы не могут быть выведены две внешние одновременно тождественно истинные и взаимно контрадикторные логические формулы **F** и **¬F**. Кроме этого в рамках современной классической логики нулевого порядка могут быть также формализованы утверждения, которые по своим логическим свойствам отличаются от высказываний классической формальной аристотелевской логики в смысле однозначной выполнимости закона исключенного третьего.

В классической формальной логике нулевого порядка логическая структура формул на множестве унарных логических операций имеет следующий вид:

Унарные логические операции				
x	**g1(x)Ξ(¬)**	**g2x Ξ(=)**	**g3(1) Ξ (1)**	**g4(0)Ξ (0)**
0	**1**	**0**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**1**	**0**

(1)

В таблице (1) унарных операций приняты следующие обозначения: **x** – логическая переменная, **g1(x)** – функция отрицания (негации), **g2(x)** – функция тождества, **g3(1)** – тождественная функция логической единицы, **g4(0)** – тождественная функция логического нуля. **0** и **1** — логические, тождественные нуль и единица соответственно.

Основной задачей логики нулевого порядка является установление истинностного значения формулы, если определены истинностные значения входящих в нее переменных. Истинностное значение формулы в таком случае определяется индуктивно, с шагами, которые использовались при построении формулы с использованием таблиц истинности связок.

Критерий противоречивости и непротиворечивости формул классического исчисления высказываний

Пусть А – некоторая формула классического исчисления высказываний, а $x_1,x_2,\ldots,x_n$ – перечень входящих в нее переменных. Вычислим $R_{a1,a2,..,an}(A)$ на множестве всех наборов значений $a_1, a_2,\ldots,a_n$ входящих в нее переменных. Если при этом $R_{a1,a2,..,an}(A)=0$, на всех наборах $a_1, a_2,\ldots,a_n$, то формула А – *признается тождественно ложной или тождественно противоречивой*.

Если же существует набор значений переменных такой, что условие $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$ выполняется хотя бы в одном случае из рассматриваемых, то формула А – *признается выполнимой и непротиворечивой.*

Критерий доказуемости и недоказуемости формул классического формального исчисления высказываний

Пусть А – некоторая формула классического исчисления высказываний, а $x_1,x_2,\ldots,x_n$ – перечень входящих в нее переменных. Вычислим $R_{a1,a2,..,an}(A)$ на множестве всех наборов значений $a_1, a_2,\ldots,a_n$ входящих в нее переменных. Если при этом $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$, на всех наборах $a_1, a_2,\ldots,a_n$, то формула А – тождественно истинна, *такая формула признается доказуемой*.

Если же существует набор значений переменных такой, что условие $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$ не выполняется , то формула A – не тождественно истинная, *такая формула признается недоказуемой.*

Прежде чем перейти к формализации утверждения, содержащегося в «Парадоксе лжеца», необходимо уточнить, что в данном случае следует принять за критерий истинности. Из самого текста «Парадокса лжеца» следует, что упомянутое утверждение не содержит информации о внешних явлениях или событиях. Поэтому «материальный критерий истинности» по Аристотелю в данном случае отсутствует, поскольку отсутствует возможность сравнения высказываемого утверждения с объективной реальностью. Таким образом остается лишь «формальный критерий истинности». В соответствии с формальным критерием истинности классической формальной логики нулевого порядка, формально тождественно ложной считается тождественно противоречивая формула. В иных случаях логическая формула считается непротиворечивой.

Задача исследования логической структуры «Парадокса лжеца» заключается в установлении вектора истинности, содержащегося в нем утверждения, на множестве унарных логических операций. Формула утверждения, содержащегося в «Парадоксе лжеца», имеет следующий вид:

$$L=0 \tag{2}$$

где **0** – логический символ тождественного противоречия.

Применяя правила таблицы (1) для рассматриваемого случая, а также оператор векторизации вычислительной логической программы **MATCAD – 12** , для случая, когда логическая переменная L может принимать любые допустимые значения (**0** или **1**) из области своего определения,   получим:

$$\overrightarrow{(L = 0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Из формулы (3) следует, что в рассматриваемом случае, формула утверждения, содержащегося в «Парадоксе лжеца» является непротиворечивой, и вместе с этим недоказуемой.

Из приведенного выше анализа рассматриваемой формы «Парадоксе лжеца» следует, что действительно существуют такие логические формулы, которые не являются аристотелевскими высказываниями. Поэтому соответствие той или иной формальной логической формулы законам аристотелевской формальной логики должно быть обосновано.

Разновидностью «Парадокса лжеца» считается «Парадокс Платона и Сократа». Приведем его текст в соответствии с /1/. Платон: «Следующее высказывание Сократа будет ложным». Сократ: «То, что сказал Платон, истинно».

Ниже мы увидим, что по своей логической структуре «Парадокс Платона и Сократа» в сильной степени отличается от основной версии «Парадокса лжеца» тем, что содержит в себе две логические переменные. Поэтому его моделирование должно осуществляться на множестве бинарных логических операций. Введем следующие обозначения:

$$P := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad S := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

В формулах (4), P – вектор области определения истинностных значений для утверждения Платона. S – вектор области определения возможных истинностных значений для утверждения Сократа. Формулы (4) отражают всевозможные комбинации сочетаний формальной истинности на множестве бинарных логических операций для потенциальных утверждений Платона и Сократа в условиях отсутствия материального критерия истинности.

Формализуем утверждение Платона о ложности утверждения Сократа и найдем для него вектор истинностных значений:

$$\overrightarrow{[P = (S = 0)]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Формализуем утверждениые Сократа об истинности утверждения Платона и найдем для него вектор истинностных значений:

$$\overrightarrow{[[P = (S = 0)] = 1]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Как следует из формул (5) и (6) утверждения Платона и Сократа с точки зрения современной классической формальной логики нулевого порядка являются непротиворечивыми, хотя и недоказуемыми, и согласно (7) формально логически тождественны друг другу:

$$\overrightarrow{[[P = (S = 0)] = [[P = (S = 0)] = 1]]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Еще одной формой «Парадокса лжеца» является «Парадокс Эпименида» который заключается в следующем. Эпименид, будучи критянином, сказал: «Все критяне лжецы». Требуется определить высказал ли он правду, или солгал?

Необходимо отметить, что в отношении всех других критян, кроме него самого, это утверждение Эпименида *является недоказуемым*, поскольку не приведено ни одного их высказывания, следовательно не имеется и достаточных оснований для определенного утверждения об их истинности или ложности. Однако остается утверждение Эпименида о самом себе в третьем лице, как о критянине, являющемся лжецом. В современной формальной классической логике нулевого порядка утверждение Эпименида о собственной ложности моделируется следующей логической формулой:

$$E=(E=0) \qquad (8)$$

Анализ формулы (8) на множестве унарных логических операций показывает,что формула (8) является тождественно противоречивой:

$$\overrightarrow{[E = (E = 0)]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Таким образом формула (9) позволяет нам утверждать, что утверждение Эпименида *содержит противоречивую логическую формулу* по отношению к нему самому. В отношении же его утверждения по отношению к другим критянам можно сделать вывод, что высказанная им логическая формула является недоказуемой по причине отсутствия достаточных оснований.

Из приведенного выше анализа различных форм «Парадокса лжеца» следует, что рассмотренные формы имеют отличающуюся друг от друга структуру, при этом только в «Парадоксе Эпименида» содержится тождественно противоречивая формула утверждения Эпименида о собственной ложности. Логические формулы первых двух рассмотренных вариантов «Парадокса лжеца» являются недоказуемыми и вместе с тем непротиворечивыми. Именно этим логические формулы, содержащиеся в «Парадокса лжеца» отличаются от высказываний аристотелевской традиционной логики, для которых выполнение закона исключенного третьего является обязательным. Таким образом, софистическая техника логических построений может быть формализована в рамках современной формальной логики нулевого порядка, что в определенной степени может служить обоснованием логико-философской концепции софистов в условиях паранепротиворечивых логических рассуждений.

Используемые источники:

1. **«Парадокс лжеца». («Википедия»).**

5.ФОРМАЛЬНО-ЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ «ПАРАДОКСА БРАДОБРЕЯ»

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе предлагается решение одной популярной версии «Парадокса Рассела» в форме «Парадокса брадобрея» на основе традиционной класической формальной логики Аристотеля. Формализация представленного решения проверена вычислительной логической программой математического пакета MATCAD 12.

Одним из центральных положений классической традиционной аристотелевской логики является *аристотелевское понимание закона о непротиворечии*, который регулирует логические отношения между контрадикторными высказываниями. Отметим, что логика Аристотеля принимает *два критерия истины*: *материальный (согласие мыслей с вещами) и формальный (согласие мыслей между собой), причем господствующим (доминирующим) критерием в ней является материальный.*

Рассмотрим учение Аристотеля об истине и законах мышления. *Аристотель принимает истину в широком и в узком смысле. Истина в узком значении есть истина суждения.* По Аристотелю, истина и ложь, строго говоря, относятся только к соединению и разъединению представлений и понятий. *Наши суждения материально истинны или ложны в зависимости от того, соответствует ли совершаемое в них соединение или разъединение представлений и понятий самой действительности. Что же касается отдельных изолированных предметов мысли, то сами по себе они еще не истинны и не ложны.*

Такое понятие истины основывается на предположении, что предмет мысли (представление или понятие) сравнивается с реальным объектом, отображением которого он является, и в качестве истинного признается то представление или понятие, которое адекватно отражает то, что существует в действительности. Мыслимое является материально ложным в том случае, если ему или вообще не соответствует ничего в действительности, или если соответствующий реальный предмет в нем отображен неверно. Это — материальная ложность, и она заключается в несоответствии мыслимого реальным объектам. Другой вид ложности — ложность суждения. По Аристотелю она заключается в том, что несуществующее высказывается, как существующее, или наоборот - существующее высказывается, как несуществующее.

Основным законом мышления у Аристотеля является закон непротиворечия. Аристотель называет этот закон самым неоспоримым принципом. Аристотель дает несколько формулировок этого закона. Он гласит: «*Невозможно, чтобы одно и то же, в одно и то же время, и в одном и том же отношении, и было и не было присуще одному и тому же*» /1/. Наряду с этой развернутой формулировкой дается краткая онтологическая формула: «Невозможно, чтобы одно и то же, в одно и то же время, было и не было».

В качестве достовернейших положений у Аристотеля приводятся также следующие формулировки закона о непротиворечии: «*Невозможно, чтобы одновременно были истинными противоположные суждения*», или: «*Невозможно, чтобы противоречащие утверждения были истинными по отношению к одному и тому же*» /1/. Аристотелем даются и сокращенные логические формулы: «*Невозможно вместе истинно и утверждать и отрицать*» или: «*Невозможно вместе утверждать и отрицать*».

По Аристотелю высказывание (а) определяет одно понятие (а) и, следовательно, одновременно с ним возникает двойственное ему понятие - (не-а). Основная формула закона непротиворечия такова: «*а не есть не-а*». Смысл законов непротиворечия и тождества в этом аспекте таков: «а не может иметь тот же самый смысл, какой имеет то, что по своей сущности не есть а», следовательно, «*а есть а и поэтому не- а есть не-а*».

Перейдем к учению Аристотеля о законе исключенного третьего. Основная формулировка его у Аристотеля такова: «Равным образом не может быть ничего посередине между двумя противоречащими друг другу суждениями, но об одном одно необходимо либо утверждать, либо отрицать» /1/.

Отношение между двумя законами — законом непротиворечия и законом исключенного третьего, — по Аристотелю, таково: *отрицание закона непротиворечия имеет своим необходимым следствием отрицание закона исключенного третьего*. Закон непротиворечия есть необходимая предпосылка закона исключенного третьего.

В соответствии с основными законами логики у Аристотеля дается учение об истине. *По Аристотелю истина и ложь находятся в контрадикторной противоположности*. По самому определению этих понятий ложность есть отрицание истины, а истинность — утверждение истины. *Положение о контрадикторной противоположности истины и лжи служит у Аристотеля предпосылкой доказательства закона исключенного третьего.*

С основными законами логики у Аристотеля неразрывно связано его учение о суждении. Согласно Аристотелю, суждение есть синтез представлений. Этот синтез есть субъективная деятельность мышления, которая на основе предшествующего анализа ставит разъединенные элементы суждения в те или иные логические отношения, соответственно их природе и отображаемой действительности. Такой же субъективной деятельностью мышления является и диайрезис, т. е. умственный анализ, разложение. И в утвердительном суждении единая мысль разлагается на свои элементы. В отношении понятий разложение совершается посредством деления. Диайрезис и синтез суть два момента, которые постоянно должны взаимодействовать, и их взаимодействие делает возможным тот психический процесс, заключительным результатом которого является логическое утверждение или отрицание.

Теперь рассмотрим онтологическое содержание суждения. *По Аристотелю субъективное мышление (психологическая сторона суждения) есть единственный возможный источник заблуждений и ложности суждений.* Реальной же основой истинности является прежде всего само объективное бытие *и лишь во вторую очередь* субъективное мышление. *Формальные противоречия могут возникать на стадии аналитико-синтетической деятельности, которая перерабатывает мыслительный материал в суждение.*

Согласно Аристотелю, формальные истина и ложь субъективны уже постольку, поскольку они суть свойства психических процессов. Но, с другой стороны, понятие материальной истины у Аристотеля объективно и реалистично. *Суждение, по учению Аристотеля, истинно лишь тогда, когда отношения совместного или раздельного бытия двух содержаний мысли, установленные в субъективном движении мышления, суть адекватные отображения реальных отношений.*

Истинно то утвердительное суждение, которое соответствует реальному совмещению, и истинно то отрицательное суждение, которое соответствует реальной раздельности. И если отрицательное суждение иногда трактуется, как отрицание ложного утвердительного, то и это отрицание должно покоиться на реальном базисе, на действительной раздельности в самом реальном бытии.

Суждение Аристотель обозначает термином «апофансис», что значит «обнаруживаю», «открываю», «выражаю». Согласно определению суждения, данному в сочинении «Об истолковании» /1/, *суждение есть высказывание о присущности или неприсущности чего-либо чему-либо и является особым видом речи, а именно такой речью, в которой находит свое выражение истина либо ложь.*

Согласно аристотелевской логике, принимаемые ей суждения, о которых можно однозначно утверждать, что они либо истинны, либо ложны, можно выделить в отдельную категорию и называть их высказываниями. Таким образом высказывания – это такие суждения, которые удовлетворяют первым трем основным законам логики – закону тождества, закону о непротиворечии и закону об исключенном третьем. Четвертым основным законом классической традиционной аристотелевской логики является «Принцип достаточного основания», окончательно сформулированный Г.В.Лейбницем в 17 веке.

Необходимо отметить, что существуют утверждения, не являющиеся высказываниями, т.е. существуют утверждения в отношении которых не выполняются законы о непротиворечии и исключенного третьего. К такого типа утверждениям относятся например утверждения, содержащиеся в парадоксе «Тяжба Протагора с Эватлом». Упомянутый парадокс и его возможные решения рассмотрены в /2/**.**

На основании основных законов логики во многих случаях можно установить являются те или иные утверждения высказываниями или нет. Необходимым и достаточным условием того, что рассматриваемое утверждение является высказыванием, является полное соответствие его первым трем основным законам логики. В этом, и только в этом случае, на основании «Принципа достаточного основания», такое утверждение можно считать высказыванием. Для этого необходимо и достаточно показать, что рассматриваемое утверждение логически равно самому себе, что оно логически не равно своему отрицанию и в отношении него можно однозначно утверждать, что оно либо истинно, либо ложно.

Необходимо отметить, что в том случае, если не представляется возможным достоверно и однозначно установить, что рассматриваемое утверждение удовлетворяет первым трем основным законам логики, то на основании четвертого основного закона логики следует сделать заключение, что не имеется достаточных оснований причислить данное утверждение к классу высказываний. В этом случае рассматриваемое утверждение не подлежит дальнейшему рассмотрению в рамках традиционной аристотелевской классической логики.

Перейдем теперь к анализу эффективности законов аристотелевской классической традиционной логики и аристотелевских критериев материальной и формальной истины на примере моделирования классического «Парадокса Рассела» в одной его популярной форме. Необходимо отметить, что в свое время, упомянутый парадокс, автором которого является выдающийся математик, логик и философ конца 19-го и первой половины 20 века – Бертран Рассел, произвел весьма сильное впечатление на математическую общественность того времени, и даже, по сути дела, явился причиной раскола некоторых математических школ на различные логико-математические направления.

«Парадокс брадобрея»

Одной из версий парадокса Рассела является парадокс деревенского брадобрея, согласно которому одному деревенскому брадобрею приказали *«брить каждого жителя деревни, кто сам не бреется, и не брить того жителя деревни, кто сам бреется»*, как он должен поступить с собой?

Стандартное рассуждение об изложенном выше парадоксе брадобрея (предложенное самим Бертраном Расселом) имеет следующий вид: «если деревенский брадобрей не бреется, то он должен брить себя , и, если он бреется , то он не должен брить себя». Нетрудно заметить, что в каждом из рассматриваемых случаев мы приходим к противоречию. В приведенном выше рассуждении молчаливо предполагается, что деревенский брадобрей является жителем той деревни в которой он работает, несмотря на то, что информация об этом непосредственно не содержится в тексте парадокса. Представляет интерес то обстоятельство, что как будет показано далее, именно это рассуждение Рассела, традиционно считающееся составной частью данного парадокса, и «делает его парадоксальным».

Постараемся формализовать условия «Парадокса Рассела» на множестве бинарных логических операций, методами современной классической формальной логики нулевого порядка, с целью установить, по каким причинам и на каком этапе формулирования условий парадокса возникает «парадоксальная ситуация».

Пусть A есть утверждение: «Житель деревни бреется сам». Тогда отрицание этого утверждения ⌐A имеет следующий вид: «Неверно, что житель деревни бреется сам». Обозначим через B утверждение: «Брадобрей бреет жителя деревни». Тогда отрицание этого утверждения ⌐B имеет следующий вид: «Неверно, что брадобрей бреет жителя деревни». *Заметим, что в начальных условиях парадокса не содержится никакой информации о том, является ли брадобрей жителем деревни или нет. Поэтому в целях адекватного логического моделирования рассматриваемого парадокса необходимо рассмотреть обе эти возможности.* Обозначим через C утверждение: «Брадобрей является жителем деревни». Тогда отрицание этого утверждения ⌐C имеет следующий вид:«Неверно,что брадобрей является жителем деревни».

Необходимо отметить, что в соответствии с традиционной классической логикой Аристотеля, в целях адекватного рассмотрения данной логической задачи, следует определить материальный и формальный критерии истинности. В соответствии с начальными условиями парадокса, под материальным и формальным критерием истинности в данном случае мы будем понимать непротиворечивое выполнение «приказа» деревенскому брадобрею. Это означает, что мы постараемся построить такую логически и физически выполнимую модель решения парадокса, которая с одной стороны не будет противоречить начальным условиям парадокса, а с другой стороны будет соответствовать законам классической традиционной аристотелевской логики. По нашему мнению, именно такая стратегия нахождения логического решения соответствует аристотелевскому пониманию закона о непротиворечии, поскольку закон о непротиворечии, как раз и выражает стремление избежать противоречия в рассуждениях, связанных с восприятием объективной реальности.

Согласно принятым выше обозначениям, языковая интерпретация формальной модели условий парадокса имеет следующий вид:

«Если житель деревни бреется сам, то неверно, что брадобрей бреет жителя деревни,и,если неверно, что житель деревни бреется сам, то брадобрей бреет жителя деревни».

В принятых символических обозначениях рассмотренная языковая интерпретация имеет следующий вид:

«Если A,то ⌐B,и, если ⌐A, то B» **(1)**

Вычислим векторы значений истинности формулы условия «Парадокса Рассела» на множестве бинарных логических операций, определенных современной классической формальной логикой нулевого порядка. В соответствии с принятыми на множестве бинарных логических операций правилами положим:

на множестве бинарных логических операций правилами положим:

$$A := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$B := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Тогда вектор истинностных значений логической формулы (1) имеет следующий вид:

$$\overrightarrow{\left[\left(\Rightarrow(A,\neg B)\right) \wedge \left(\Rightarrow(\neg A, B)\right)\right]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Из (4) в соответствии с правилами классической формальной логики нулевого порядка следует, что основное условие «Парадокса Рассела» выражается непротиворечивой логической формулой.

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о том, может ли являться по условиям задачи деревенский брадобрей жителем той деревни в которой он работает. Вначале рассмотрим первую из двух возможностей, а именно: «Брадобрей является жителем деревни». В этом случае утверждение A приобретает следующий вид: «Брадобрей бреется сам». Утверждение B при этом принимает следующий вид: «Брадобрей бреет брадобрея». Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае утверждения A и B оказываются логически эквивалентными друг другу:

$$\Leftrightarrow(A,B) \qquad (5)$$

Условие (5) является дополнительным к формуле условия рассматриваемого парадокса, поэтому оно должно рассматриваться совместно с формулой (4) на условиях их конъюнкции:

$$\overrightarrow{\left[\left[\left(\Rightarrow(A,\neg B)\right) \wedge \left(\Rightarrow(\neg A,B)\right)\right] \wedge \left(\Leftrightarrow(A,B)\right)\right]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Из формулы (6) следует,что дополнительное условие (5) приводит к тождественному противоречию. Это означает, что именно допущение о том, что деревенский брадобрей является жителем той деревни в которой он работает, приводит к противоречию.

Рассмотрим теперь вторую возможность, а именно: «Неверно, что брадобрей является жителем деревни». Необходимо отметить, что эта возможность является логически осуществимой – брадобрей, работающий в данной деревне, может быть жителем другой близлежайшей деревни или города, что не противоречит условиям «Парадокса Рассела». Кроме этого в рассматриваемом случае противоречия не возникает, поскольку брадобрей может непротиворечиво выполнять приказ в отношении жителей деревни. Что же касается его самого, то он в отношении себя имеет свободу выбора, поскольку упомянутый приказ вовсе не относится к нему, так как он не является жителем этой деревни. Поэтому брадобрей может брить себя, не вступая в противоречие с условиями приказа. Это и является предлагаемым решением рассматриваемой популярной версии «Парадокса Рассела».

В качестве заключения к настоящей работе мы приведем сравнительный анализ логических особенностей рассмотренной популярной версии «Парадокса Рассела» с классической традиционной аристотелевской логикой. Во-первых, следует отметить, что основное логическое условие рассмотренной версии «Парадокса Рассела», выражается формулой (4), логическая структура которой отличается от логической структуры высказываний аристотелевской логики в смысле выполнимости закона исключенного третьего. Конъюнкция дополнительного условия (5) с условием (4), приводит к тождественному противоречию, как с точки зрения современной классической формальной логики нулевого порядка, так и классической традиционной аристотелевской логики. Поэтому в качестве решения рассматриваемого парадокса нами выбрано такое логически осуществимое решение, которое не противоречит основному условию рассматриваемой версии «Парадокса Рассела». Таким образом, в рассматриваемом случае, именно аристотелевское понимание логического закона о непротиворечии, основывающееся на стремлении избежать противоречия в рассуждениях, путем сравнения тех или иных суждений с объективной реальностью, позволило найти непротиворечивое решение рассмотренного парадокса.

Используемые источники:

1. **Маковельский А.О. «История логики».**
2. **Ахвледиани А.Н. «Гносеологический анализ парадокса «Тяжба Протагора с Эватлом»». Энциклопедический фонд Russika. 2011.**

6.РЕШЕНИЕ «ПАРАДОКСА МЭРА ГОРОДОВ» НА ОСНОВЕ КОНЦЕПЦИИ ПУСТОГО МНОЖЕСТВА

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе исследуется популярная версия «Парадокса Рассела» в форме «Парадокса мэра городов». Показано, что данный парадокс может быть решен на основе концепции пустого множества и аристотелевского понимания закона о непротиворечии.

Понятие пустого множества является одним из основных понятий теории классов. Пустым множеством называется такой класс, который не содержит ни одного элемента. Пустое множество обозначается символом Ø. В теории классов пустое множество является аналогом арифметического 0 множества действительных чисел. По определению существует только одно пустое множество. Формула A= Ø означает, что множество A не имеет ни одного элемента, что оно пусто, что оно «исчезает». Если не вводить понятия пустого множества, то при определении того или иного конкретного класса C пришлось бы часто делать оговорку: если он существует. Это происходит из-за того, что часто элементы класса определены так, что заранее бывает неизвестно, существуют они или нет. В аксиоматических теориях множеств, существование самого пустого множества утверждается специальной *аксиомой существования пустого множества*, которая в символьном виде имеет следующий вид:

$$(\exists x)(\forall y)(y \notin x) \tag{1}$$

Как правило, множество оказывается пустым, в том случае, когда характеристическое свойство множества - $C(x)$, определяющее совокупность элементов множества, является логически, математически или физически неосуществимым.

Необходимо отметить, что введение понятия пустого множества, и в особенности, связанной с ним *аксиомы пустого множества,* оказывает значительное воздействие на сами логические выводы, получаемые в рамках теории классов.

До создания теории множеств, в классическом математическом анализе, проблема существования или не существования тех или иных логических или математических объектов была тесно связана с непротиворечивостью или противоречивостью определяемых объектов. Исходя из основных законов аристотелевской логики, при построении той или иной математической теории, в нее включались и в ней *признавались существующими* только те объекты, непротиворечивость которых была установлена с достоверностью. Те же объекты, которые по своей логической или математической природе являлись противоречивыми, - исключались из дальнейшего рассмотрения в этой теории, т.е. признавались *не существующими в этой теории*.

С созданием теории множеств, и введения в нее понятия пустого множества совместно *с аксиомой существования пустого множества*, прежняя концепция существования или не существования тех или иных объектов в рамках той или иной математической теории кардинально изменилась. При определении некоторого класса на основе характеристического свойства $C(x)$ (характеристическое свойство может представлять собой также совокупность свойств, которым должны удовлетворять элементы определяемого класса) символьная запись определяемого класса имеет следующий вид:

$$Cls(Cx) = \{x : (\forall x)(C(x))\} \qquad (2)$$

Возможны следующие случаи. Первый случай: характеристическое свойство $C(x)$ является логически, математически или физически неосуществимым. Тогда не существует ни одного элемента x, удовлетворяющего этому свойству. В этом случае класс $C(x)$ является пустым. Однако в силу *аксиомы пустого множества* – пустое множество существует. Это означает, что в рассматриваемом случае класс $C(x)$ существует, как пустое множество.

Второй случай: характеристическое свойство $C(x)$ является осуществимым, т.е. существуют элементы x, удовлетворяющие характеристическому свойству $C(x)$. В этом случае класс $Cls(Cx)$ является непустым, а следовательно существующим. Если в связи с логическими особенностями характеристического свойства $C(x)$ и с существованием класса $Cls(Cx)$ возникают противоречивые суждения, то их уже невозможно игнорировать по той причине, что класс $Cls(Cx)$ существует, и автоматически существуют упомянутые противоречивые суждения. Указанное обстоятельство является прямым следствием признания пустого множества существующим.

Из приведенного выше рассуждения следует, что в любом случае, невзирая на осуществимость или неосуществимость характеристического свойства $C(x)$, класс $Cls(Cx)$ существует или в виде непустого класса, или же в виде пустого множества. Если с существованием класса $Cls(Cx)$ возникают противоречивые суждения, то мы вынуждены признать также и факт их существования. Это обстоятельство является неотъемлимым свойством каждой теории классов или теории множеств, *содержащей аксиому существования пустого множества*.

С другой стороны, как будет показано далее, понятие пустого множества является эффективным средством решения некоторых классических парадоксов теории множеств. В качестве одного из таких парадоксов, ниже будет рассмотрена одна из популярных версий «Парадокса Рассела» в форме «Парадокса мэра городов». Необходимо отметить, что в свое время, «Парадокс Рассела», автором которого является выдающийся математик, логик и философ конца 19-го и первой половины 20 века – Бертран Рассел, произвел весьма сильное впечатление на математическую общественность того времени, и даже, по сути дела, явился причиной раскола некоторых математических школ на различные логико-математические направления. Ниже приведена формулировка «Парадокса мэра городов».

<u>«Парадокс мэра городов»</u>

В одной стране был издан указ: «Мэры городов должны жить не в том городе, где они являются мэрами, а в специальном городе мэров». Вопрос заключается в следующем - где должен жить мэр города мэров?

Решение данного парадокса сводится к рассмотрению вопроса о существовании мэра города мэров. Вначале рассмотрим одну из двух возможностей: мэр города мэров был избран. В этом случае возникает противоречие – мэр города мэров должен жить в городе мэров, мэром которого он является, что по условию задачи логически невозможно.

Вторая возможность основана на аристотелевском понимании закона о непротиворечии, которое заключается в стремлении избежать противоречий в рассуждениях, а также понятии пустого множества: мэр города мэров не может быть избран, «кресло мэра городов – пусто». В этом случае городом управляет совет мэров городов. Отметим, что это решение является осуществимым и непротиворечивым.

Необходимо отметить, что решение «Парадокса мэра городов» существенно отличается от решения другой популярной версии «Парадокса Рассела» в форме «Парадокса брадобрея», приведенного в /1/.

При решении «Парадокса брадобрея» согласно /1/ оказывается, что деревенский брадобрей является жителем другой близлежайшей деревни или города. Это означает, что рассматриваемый объект существует. Наоборот, в «Парадоксе мэра городов» оказывается, что рассматриваемый гипотетический объект не существует, а «кресло мэра городов – пусто».

Таким образом из приведенного выше рассуждения можно заключить, что концепция пустого множества в данном случае позволила эффективно решить рассмотренный «Парадокс мэра городов».

Используемые источники:

1. **Ахвледиани А.Н. Формально-логический анализ «Парадокса брадобрея». Энциклопедический фонд Russika. 2011.**

7.О СИНГУЛЯРНОЙ ФОРМАЛЬНО-ЛОГИЧЕСКОЙ И ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОЙ СИСТЕМЕ INCOL&TAMLA

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе представлено общее описание трансцендентной формально-логической и теоретико-множественной системы INCOL&TAMLA и некоторых, полученных на ее основе результатах. При этом под формально-логической трансценденцией (от лат. transcendens – выходить за пределы) понимается выход за пределы классической аристотелевской традиционной логики, наблюдаемый и доказуемый в рамках современной непротиворечивой классической формальной логики нулевого порядка. Как известно, в современной классической формальной логике нулевого порядка основные логические законы, получаемые в пределах классической аристотелевской традиционной логики, являются тождественно-истинными логическими формулами. Известно также, что формально-логическая непротиворечивость классической формальной логики нулевого порядка неопровержимо установлена выдающимся австрийским логиком и математиком Куртом Геделем и не подлежит сомнению. Однако исследование логических свойств классической формальной логики нулевого порядка показало, что несмотря на это обстоятельство, в ней существуют и такие логические утверждения и логические формулы, которые хотя и не отрицают закон о непротиворечии и закон исключенного третьего, однако в сильной степени отличаются от классических аристотелевских высказываний в смысле соответствия их законам о непротиворечии и исключенного третьего. Упомянутые логические утверждения и логические формулы классической формальной логики нулевого порядка были названы логически трансцендентными. Система INCOL&TAMLA разработана для эффективного исследования именно трансцендентных формально-логических и логико-аналитических формул в различных формальных и полуформальных математических теориях.

В рамках международного научно-технического общества «INCOL», группа специалистов под руководством израильского ученого, работающего в области формальной логики, теории множеств, прикладной математики и механики - Александра Ахвледиани, - успешно завершила многолетнюю работу по созданию и применению трансцендентной многоуровневой формально-логической и теоретико-множественной математической системы «INCOL&TAMLA» («Incolumitas & Transcendent Multilevel Logical Analysis»). Слово incolumitas на латыни обозначает безопасность. Тем самым, в названии упомянутой логико-математической и теоретико-множественной системы «INCOL&TAMLA» подчеркивается, что знание трансцендентных логических свойств формальной классической логики нулевого порядка, позволяет содействовать логически безопасному ее применению в той или иной формальной или полуформальной математической теории, что не может быть гарантировано при стандартном ее использовании.

Логическим ядром упомянутой логико-математической технологии является «ноу-хау», сформулированное и обоснованное в 1990 году совместно Александром и Нодаром Ахвледиани в виде «Принципов логико-математической трансценденции». В течении последующих 20 лет, Александром Ахвледиани на основе упомянутых принципов, были осуществлены многочисленные логико-математические, научно-технические, мультидисциплинарные и логико-философские исследования, которые привели к разработке трансцендентной теоретико-множественной логико-математической системы «INCOL&TAMLA».

Одним из первых, кто логически и математически строго показал существование слабо трансцендентных логических формул в достаточно богатых формальных и полуформальных математических теориях, содержащих аксиоматику Пеано, был выдающийся австрийский логик Курт Гедель. Для упомянутых выше теорий было показано существование в них таких логических формул F и ⌐F, что не представляется возможным доказать или опровергнуть ни одну из формул F или ⌐F, при условии, что упомянутые выше теории логически непротиворечивы. Этим самым Куртом Геделем было показано существование в этих теориях таких трансцендентных логических формул F и ⌐F, которые с одной стороны хотя и не отрицают закона об исключенном третьем, но с другой стороны и не удовлетворяют ему. При этом первая теорема Геделя в интерпретации системы «INCOL&TAMLA означает, что если достаточно богатая формальная или полуформальная математическая теория, содержащая аксиоматику Пеано, является непротиворечивой, то в ней согласно теории Курта Геделя существуют трансцендентные логические формулы F и ⌐F.

Известно, что глобальная формально-логическая непротиворечивость классической формальной логики нулевого порядка установлена Куртом Геделем. Глобальная формально-логическая непротиворечивость классической формальной логики нулевого порядка означает, что в ней невыводимы две такие тождественно истинные логические формулы, которые вместе с тем отрицали бы друг друга. Однако, тем не менее, в рамках формально-логической и теоретико-множественной системы INCOL&TAMLA удалось существенно развить теорию Курта Геделя, в том смысле, что было доказано существование в самой формально-логически непротиворечивой классической формальной логике нулевого порядка существование таких сильно трансцендентных утверждений и формул этой теории A и ⌐A, что по отдельности логически непротиворечиво выводимо, как A так и ⌐A. Необходимо отметить,что при доказательстве существования сильно трансцендентных утверждений A и ⌐A не был использован логический закон Дунса Скота, согласно которому из тождественно противоречивой формулы выводима любая формула, в том числе и противоречие вида A&⌐A. Наоборот, представленное в рамках INCOL&TAMLA формально-логическое доказательство сильной трансцендентности утверждений A и ⌐A, подразумевает именно непротиворечивый формальный логический вывод, не содержащий в себе тождественно противоречивых формул.

В основе приведенных выше результатов лежат «Принципы логико-математической трансценденции» сформулированные и доказанные совместно Александром и Нодаром Ахвледиани в 1990 году. Они состоят из следующих четырех утверждений, которые были формально логически строго доказаны в рамках классической формальной логики нулевого порядка, как теоремы, причем без применения косвенных методов доказательства и логического закона Дунса Скота.

<u>Первый принцип логико-математической трансценденции</u>

В классической формальной логике нулевого порядка существуют такие логически сильно трансцендентные утверждения и формулы A и ⌐A, что по отдельности логически непротиворечиво выводимо, как A так и ⌐A.

<u>Второй принцип логико-математической трансценденции</u>

В классической формальной логике нулевого порядка конструктивно существует логически инверсное хаусдорфово общее топологическое логическое пространство, в котором множество логических законов классической аристотелевской логики высказываний является лишь его собственным подклассом, а кроме него в упомянутом общем топологическом логическом пространстве, в качестве собственного подкласса содержится также и класс слабо и сильно трансцендентных логических утверждений и формул.

<u>Третий принцип логико-математической трансценденции</u>

В классической формальной логике нулевого порядка конструктивно существует логически инверсное аристотелевское, метризуемое по Хаусдорфу топологическое логическое пространство, содержащее локальные, внешне формально непротиворечивые логические подпространства формального классического исчисления Гильберта, внутри которых выводимы предельно трансцендентные логические формулы, эквивалентные отрицанию закона о непротиворечии и закона об исключенном третьем.

<u>Четвертый принцип логико-математической трансценденции</u>

Каждая, достаточно богатая формальная или полуформальная математическая теория, содержащая теорию рациональных чисел, определение бесконечно большой величины и определение взаимно однозначного соответствия классов или множеств (в том числе и бесконечных), содержит такие сильно трансцендентные логико-математические утверждения A и ⌐A, что по отдельности, формально логически и аналитически непротиворечиво выводимо, как утверждение A, так и утверждение ⌐A.

В настоящее время система «INCOL&TAMLA» позволяет эффективно осуществлять многоуровневые мультидисциплинарные, междисциплинарные и монодисциплинарные исследования в различных областях науки и техники с учетом особенностей классической аристотелевской силлогистики, аристотелевской классической формальной логики, современной классической логики нулевого порядка, современной классической логики первого порядка, а также булевой алгебры.

На основе логико-математической системы «INCOL&TAMLA» были успешно разрешены некоторые классические трудноразрешимые задачи теории множеств, математического анализа, классической геометрии и аналитической механики, в том числе:

1. Исследована логическая структура «Континуум - гипотезы» Георга Кантора, доказаны ее логически трансцендентные свойства, которые заключаются в отличии ее от основных законов классической традиционной аристотелевской логики, и в рамках классической формальной логики нулевого и первого порядка, получены новые решения «Континуум-проблемы» Кантора вне аксиоматических систем ZF и ZFC.

2. Выполнен формально-логический анализ и даны решения некоторых классических парадоксов в основаниях логики. Показано, что некоторые парадоксы, такие как например «Парадокс лжеца» и «Парадокс Платона и Сократа», являются слабо трансцендентными логическими утверждениями, которые с одной стороны хотя и не отрицают аристотелевские законы о непротиворечии и исключенном третьем, но с другой стороны и не соответствуют аристотелевскому закону об исключенном третьем. Такие логические формулы в классической формальной логике нулевого порядка квалифицируются, как непротиворечивые и одновременно с этим, как недоказуемые. Только в одной версии «Парадокса лжеца», а именно в «Парадоксе Эпименида» содержится тождественно противоречивая логическая формула, равносильная утверждению о собственной ложности. Формально-логический анализ упомянутых парадоксов приведен в /1/. На основании классической формальной логики нулевого порядка дано также решение «Парадокса крокодила», и на его примере проанализирован процесс появления формально-логического тождественного противоречия в процессе формально-логических рассуждений. Формально-логический анализ «Парадокса крокодила» приведен в работе /2/. На основе системы «INCOL&TAMLA» удалось также найти по крайней мере два решения для известного софистического парадокса «Тяжба Протагора с Эватлом», которые однако выходят за пределы классической традиционной аристотелевской логики. Предлагаемые в /3/ решения, как раз иллюстрируют тот случай, когда на первый взгляд

контрадикторно противоположные друг другу логические формулы оказываются на деле непротиворечиво разрешимыми.

3. На основе логико-математической системы «INCOL&TAMLA» разработана теория трансцендентных классов TCT (Transcendent Classes Theory), целью которой является изучение теоретико-множественных объектов и классов (в том числе и множеств), из существования которых следуют слабо трансцендентные, сильно трансцендентные и предельно трансцендентные утверждения. Показано существование таких объектов и классов в канторовской теории множеств, а также в аксиоматических теориях множеств ZF и ZFC. Исследованы логические свойства метода доказательства по трансфинитной индукции и на конкретных примерах показаны его трансцендентные логические свойства. Кроме этого показано, что в аксиоматических системах ZF и ZFC, постулирующих существование пустого множества, и основанных на классической формальной логике первого порядка, пустое множество обладает такими трансцендентными логическими свойствами, что доказательство классической непротиворечивости систем ZF и ZFC становится невозможным.

4. Исследованы логико-аналитические особенности пятого постулата Евклида и связанных с ним различных аксиом о параллельных прямых. Доказано существование рациональной аналитической, абсолютной, неевклидовой плоскости, в которой «Постулат Прокла» о параллельных прямых доказывается как теорема. Одновременно с этим показывается, что пятый постулат Евклида в его оригинальной версии не может быть ни доказан, ни опровергнут в рассматриваемой абсолютной рациональной аналитической плоскости. Этим самым доказывается существование абсолютной аналитической плоскости, в которых «Постулат Прокла» является логически независимым от пятого постулата Евклида. Кроме этого на основе модели Клейна, и собственно евклидовского определения параллельных прямых, показано существование такой топологической по Хаусдорфу, модели абсолютной плоскости с бесконечно расширяющейся во времени границей, в которой постулат о параллельных прямых Лобачевского выполняется как теорема. Показано, что в абсолютной рациональной аналитической плоскости, выполнение или отрицание «Постулата Прокла», существенным образом зависит от аналитических и топологических свойств плоскости и определения параллельности прямых. Также показано, что собственно евклидовское определение параллельности прямых обладает трансцендентными логическими свойствами. Именно это его свойство и обуславливает справедливость и доказуемость постулата Лобачевского о параллельных прямых при наличии соответствующих логико-аналитических свойств плоскости. В рассматриваемой модели абсолютной плоскости с бесконечно расширяющейся границей пятый постулат Евклида также оказывается недоказуемым и неопровержимым утверждением, что означает непротиворечивую выводимость утверждения о независимости постулата о параллельных прямых Лобачевского от оригинальной версии пятого постулата Евклида.

5. Исследованы трансцендентные логические свойства второй проблемы Гильберта. Показано, что доказательство противоречивости элементарной арифметики целых неотрицательных чисел, включающих только операции сложения и умножения в конечной области положительных целых чисел является логически невозможным. С другой стороны показано, что для каждой, достаточно богатой формальной или полуформальной математической теории, включающей в себя теорию целых неотрицательных чисел, аксиому существования пустого множества, аксиому экстенсиональности множеств, метод доказательства по трансфинитной индукции, понятие и определение бесконечных множеств, определение бесконечно большой величины, определение взаимнооднозначного соответсвия множеств (в том числе и для бесконечных множеств), - существуют такие логически сильно трансцендентные утверждения A и ⌐A, что непротиворечиво выводимо, как A так и ⌐A. Полученный результат означает невозможность доказательства классической аристотелевской непротиворечивости для каждой упомянутой достаточно богатой формальной и полуформальной теории. Это же в свою очередь означает, что на основе каждой такой теории невозможно доказать классическую аристотелевскую непротиворечивость аксиоматической системы Пеано, поскольку каждая такая теория сама не отвечает классическому аристотелевскому понятию о непротиворечивости.

Исследованы сильно трансцендентные свойства методов математической и трансфинитной индукции, приводящие в некоторых случаях к непротиворечивой доказуемости некоторых утверждений вида A и ⌐A по отдельности в процессе стремления аргументов логических индуктивных формул к бесконечности. Показано, что существуют случаи, когда при стремлении к бесконечности, методы математической и трансфинитной индукции не согласуются с законами о непротиворечии и об исключенном третьем аристотелевской логики высказываний. Полученные результаты свидетельствуют о существовании значительных логико-аналитических проблем с точки зрения аристотелевской традиционной логики в области классического математического анализа, а также в теориях ZF и ZFC, и хорошо согласуются с первой и второй теоремами Курта Геделя о неполноте формальных и полуформальных математических теорий. Необходимо отметить, что приведенные выше результаты никак не затрагивают известные результаты выдающегося немецкого математика Герхарда Генцена о логической совместности аксиом Пеано, полученные им в 1936 году, на основе добавления к логике первого порядка аксиомы о бескванторной индукции.

6. Исследованы трансцендентные логические свойства шестой проблемы Гильберта о полной и логически строгой аксиоматизации различных областей физики. Показано, что в общем случае эта задача является формально логически неразрешимой с точки зрения основных законов классической аристотелевской логики. В частности показано, что на основании основных законов аристотелевской логики не может быть аксиоматизирована например такая область физики, как аналитическая статика. Показано существование в

аналитической статике таких сильно трансцендентных утверждений, которые могут быть как доказаны так и опровергнуты. Показано, что именно таким логическим сильно трансцендентным свойством обладает «Принцип возможных перемещений» Лагранжа в отношении идеальных систем, который как показали логико-аналитические исследования, можно доказать и можно опровергнуть. Показано, что какова бы ни была аксиоматическая система в области аналитической статики, то основанная на ней теория или не будет содержать утверждение, содержащееся в «Принципе возможных перемещений», и тогда она будет содержательно неполной, или же она будет содержать «Принцип возможных перемещений», а значит тем самым будет содержать утверждение с предельно трансцендентными логическими свойствами, и в этом случае она не будет логически согласовываться с классической аристотелевской логикой.

Аналогичное положение складывается и в области аналитической динамики. Были исследованы сильно трансцендентные логические свойства вариационного «Принципа Д'Аламбера-Лагранжа» в аналитической динамике. Показаны логически сильно трансцендентные свойства этого принципа в области аналитической динамики пластических систем. Выявлен широкий класс пластических систем, для которых условие выполнимости вариационного «Принципа Д'Аламбера-Лагранжа» является достаточным, как для соблюдения условий равновесия, так и для полного разрушения одной и той же системы при одних и тех же аналитических условиях для внешней нагрузки. Этим самым доказывается формально логически предельно-трансцендентная природа «Принципа Д'Аламбера-Лагранжа», формально логически эквивалентная отрицанию закона о непротиворечии и отрицанию закона об исключенном третьем.

Таким образом, проведенные исследования показали, что явление логико-математической трансценденции является не случайным, а вполне закономерным явлением, наблюдаемым даже в глобально формально непротиворечивой классической формальной логике нулевого порядка, в канторовской и аксиматических теориях множеств ZF и ZFC, во многих прикладных областях математики и физики, таких как например классическая планиметрия, аналитическая статика и динамика. Такое положение дел не должно казаться удивительным, поскольку уже Аристотелю были известны логико временные ограничения, накладываемые на применение закона о непротиворечии и закона об исключенном третьем. В работе /4/ приводится сохраненное в истории логики мнение Аристотеля о том, что законы о непротиворечии и об исключенном третьем не имеют силы в суждениях относительно будущих событий и явлений, поскольку будущие события не являются определенно детерминированными. Это мнение Аристотеля непосредственно касается тех формальных и полуформальных математических теорий, которые так или иначе занимаются вопросами изучения бесконечности.

Как известно, современная теория классов и множеств допускает учет времени в явном виде. Это означает, что при учете времени в явном виде, т.е. при параметризации тех или иных бесконечных процессов с помощью введения независимого параметра времени, проблема противоречивости или непротиворечивости принципиально снимается, поскольку соблюдение в этих условиях закона о непротиворечии и исключенном третьем не представлялось возможным даже создателю основных законов классической традиционной логики - Аристотелю. Однако явление логико-математической трансценденции, со своей стороны, вносит существенные коррективы в доказательную базу той или иной формальной или полуформальной математической теории.В частности, в вопросах, связанных с изучением бесконечности и бесконечных процессов, с целью адекватного описания упомянутых процессов, становится необходимым учет A и B логик времени. Кроме этого, при выходе за пределы применимости закона о непротиворечии и закона об исключенном третьем, становятся нелигитимным применение таких косвенных методов доказательств, как метод доказательства от противного, закон Клавия, закон снятия двойного отрицания, а также других логических законов, связанных с законом о непротиворечии и законом об исключенном третьем. Если же, как это происходит во многих случаях в действительности, упомянутые методы все же применяются систематически, как это имеет место в канторовской теории множеств и в теориях ZF и ZFC, то представляется возможным, и осуществлено в рамках теории TCT, - введение «Принципа доминирования» (принципа предпочтения), согласно которому на множестве формально логических доказательств в рамках классической формальной логики нулевого порядка прямые методы доказательства доминируют косвенные (прямые методы доказательства имеют предпочтение перед косвенными).

В логико философском смысле, идея разработки системы «INCOL&TAMLA» и основанной на ней теории TCT, восходит к логико философскому учению «Трансцендентальной логики» выдающего немецкого мыслителя Иммануила Канта, рассмотревшего в своей знаменитой работе, вопросы соотношения, существоваших на тот период времени, различных направлений логики. В контексте исторического развития логики и математики как наук, система «INCOL&TAMLA» и теория TCT позволяют формально-логически и аналитически строго обосновать основные положения доаристотелевской логической школы софистов, субъективно-логическая и логико-релятивистская концепции которых, как это показали проведенные исследования, имеют вполне равные права на существование с аристотелевской классической традиционной логикой в рамках современной глобально формально непротиворечивой классической формальной логики нулевого порядка, а также в вопросах, связанных с существенной логической неопределенностью и изучением логико-аналитических свойств бесконечных классов, на основе теории множеств и классов и классической формальной логики нулевого и первого порядка.

Используемые источники:

1. **Ахвледиани А.Н. Формально-логический анализ «Парадокса лжеца». Энциклопедический фонд Russika. 2011.**
2. **Ахвледиани А.Н. Формально-логический анализ «Парадокса крокодила». Энциклопедический фонд Russika. 2011.**
3. **Ахвледиани А.Н. Гносеологический анализ парадокса «Тяжба Протагора с Эватлом». Энциклопедический фонд Russika. 2011.**
4. **Маковельский А.О. История логики.**

8.ТЕОРЕМА ЭКЗИСТЕНЦИАЛЬНОСТИ УНИВЕРСАЛЬНОГО КЛАССА В АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе исследуется вопрос доказуемости экзистенциальности (существования) универсального класса U в той или иной аксиоматической теории классов или множеств. Показано, что в каждой теории множеств, в которой принята аксиома существования пустого множества, - утверждение экзистенциальности универсального класса U является доказуемым. Кроме этого показано, что универсальный класс U одновременно является множеством. При условии принятия аксиомы о существовании пустого множества, доказана теорема экзистенциальности, т.е. доказуемость утверждения о существовании любого класса с наперед заданным характеристическим свойством.

В теории множеств основополагающее значение имеет отношение принадлежности объекта объекту. Для его обозначения в теории множеств выбран символ $\in$. С использованием символов для обозначения объектов, факт принадлежности объекта X объекту Y выражается следующей формулой:

$$X \in Y \tag{1}$$

Наоборот, факт непринадлежности объекта X объекту Y выражается следующей формулой:

$$X \notin Y \tag{2}$$

Формула (1) читается следующим образом: объект X принадлежит объекту Y. Формула (2) читается следующим образом: объект X не принадлежит объекту Y.

В теории множеств для сокращенного символического обозначения языковых логических конструкций применяются так называемые кванторы. Например $\exists$ - является квантором существования и применяется для обозначения существования тех или иных объектов.

Факт существования объекта X выражается следующим образом:

$$\exists X \tag{3}$$

Факт не существования объекта X выражается следующим образом:

$$\neg(\exists X) \tag{4}$$

Формула (3) читается следующим образом: существует объект X. Формула (4) читается следующим образом: не верно, что существует объект X, или, что то же самое – объекта X не существует.

Другим основным квантором теории множеств является квантор всеобщности, который обозначается $\forall$. Формула:

$$\forall X \tag{5}$$

означает – для всех объектов X.

Формула:

$$\neg(\forall X) \tag{6}$$

означает – не верно, что для всех объектов X.

В современных исследованиях по теории множеств имеется достаточно подробно разработанная классификация тех или иных объектов и классов. Приведем некоторые основные моменты упомянутой классификации по книге /1/ известного чешского специалиста по теории множеств – доктора П.Вопенки.

Пусть даны какие-либо уже созданные объекты и указан некоторый способ, с помощью которого можно выделить эти объекты среди остальных объектов. Упомянутый способ выделения объединяет эти объекты. Если на выделенные таким образом объекты можно смотреть, как на вполне равноправные, то говорят, что выделена *совокупность объектов*. Если же по условиям рассматриваемого вопроса необходимо признать за выделенными объектами различные позиции и не представляется возможным игнорировать то обстоятельство, что они имеют различные свойства, или вступают в различные отношения, то говорят, что *выделено сообщество объектов*.

Выделение группы объектов из совокупности других объектов происходит на основе задания так называемого характеристического свойства, которое представляет собой признак, по которому та или иная группа объектов выделяется из совокупности других объектов.

При определении некоторого класса на основе характеристического свойства $C(x)$ (характеристическое свойство может представлять собой также совокупность свойств, которым должны удовлетворять элементы определяемого класса) символьная запись определяемого класса имеет следующий вид:

$$Cls(Cx) = \{x : (\forall x)(C(x))\} \tag{7}$$

Одним из основных понятий теории классов является понятие пустого множества. Пустым множеством называется такой класс, который не содержит ни одного элемента. Пустое множество обозначается символом $\varnothing$. В теории классов пустое множество является аналогом арифметического 0 множества действительных чисел. По определению существует только одно пустое множество. Формула $A = \varnothing$ означает, что множество A не имеет ни одного элемента, что оно пусто, что оно «исчезает». Если не вводить понятия пустого множества, то при определении того или иного конкретного класса С пришлось бы часто делать оговорку: если он существует. Это происходит из-за того, что часто элементы класса определены так, что заранее бывает неизвестно, существуют они или нет. В аксиоматических теориях множеств, существование самого пустого множества утверждается специальной *аксиомой существования пустого множества*, которая в символьном виде имеет следующий вид:

$$(\exists x)(\forall y)(y \notin x) \tag{8}$$

Как правило, множество оказывается пустым, в том случае, когда характеристическое свойство множества - $C(x)$, определяющее совокупность элементов множества, является логически, математически или физически неосуществимым.

Необходимо отметить, что введение понятия пустого множества, и в особенности, связанной с ним *аксиомы пустого множества,* оказывает значительное воздействие на сами логические выводы, получаемые в рамках теории классов.

До создания теории множеств, в классическом математическом анализе, проблема существования или не существования тех или иных логических или математических объектов была тесно связяна с непротиворечивостью или противоречивостью определяемых объектов. Исходя из основных законов аристотелевской логики, при построении той или иной математической теории, в нее включались и в ней *признавались существующими* только те объекты, непротиворечивость которых была установлена с достоверностью. Те же объекты, которые по своей логической или математической природе являлись противоречивыми, - исключались из дальнейшего рассмотрения в этой теории, т.е. признавались *не существующими в этой теории*.

С созданием теории множеств, и введения в нее понятия пустого множества совместно *с аксиомой существования пустого множества,* прежняя концепция существования или не существования тех или иных объектов в рамках той или иной математической теории кардинально изменилась. Ниже, для каждой аксиоматической теории множеств, содержащей *аксиому существования пустого множества*, будет сформулирована и доказана теорема о существовании любого класса с наперед заданным характеристическим свойством.

Теорема экзистенциальности классов (Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей аксиому пустого множества, существование пустого множества является достаточным условием для доказательства существование каждого класса, определяемого наперед заданным характеристическим свойством (или совокупностью свойств) $C(x)$.

Доказательство

Рассмотрим следующие случаи. Первый случай: характеристическое свойство $C(x)$ является логически, математически или физически неосуществимым. Тогда не существует ни одного элемента x, удовлетворяющего этому свойству. В этом случае класс со свойством $C(x)$ является пустым. Однако в силу *аксиомы пустого множества* (8) – пустое множество существует. Это означает, что в рассматриваемом случае класс с свойством $C(x)$ хотя и является пустым , но тем не менее существует, как пустое множество.

Второй случай: характеристическое свойство $C(x)$ является осуществимым, т.е. существуют элементы x, удовлетворяющие характеристическому свойству $C(x)$. В этом случае, согласно (7), класс $Cls(Cx)$ является непустым, а следовательно - тем более существующим.

Из приведенного выше рассуждения следует, что в любом случае, невзирая на осуществимость или неосуществимость характеристического свойства $C(x)$, класс $Cls(Cx)$ существует или в виде непустого класса, или же в виде пустого множества. Это означает, что если с существованием класса $Cls(Cx)$ возникают противоречивые суждения, *то мы вынуждены признать также и факт их существования*. Это обстоятельство является неотъемлимым свойством каждой теории классов или теории множеств, *содержащей аксиому существования пустого множества*, и является прямым следствием принятия упомянутой аксиомы.

Как известно, идея выделения класса $Cls(Cx)$ с помощью указания его характеристического свойства $C(x)$, принадлежит создателю теории множеств – выдающемуся немецкому математику Георгу Кантору. Однако, уже на начальном этапе развития теории множеств, другим знаменитым математиком, логиком и философом Бертраном Расселом было выдвинуто возражение против выделения класса с помощью любого характеристического свойства $C(x)$. Им был построен теоретико-множественный парадокс, так называемый «Парадокс Рассела», который доказывает выводимость противоречивого суждения на множестве суждений канторовской теории множеств. Ниже приводятся формулировка упомянутого парадокса и соответствующее рассуждение, приводящее к антиномии.

<u>Парадокс Рассела</u>

Класс Z назовем регулярным, если для него выполняется соотношение:

$$Z \notin Z \tag{9}$$

Класс Y назовем нерегулярным, если для него выполняется соотношение:

$$Y \in Y \tag{10}$$

Сформируем класс R следующим образом:

$$R = Cls(Z) = \{Z : Z \notin Z\} \tag{11}$$

Зададимся вопросом, является ли класс R регулярным либо нет?

Если класс R является регулярным, то выполняется условие:

$$R \notin R \tag{12}$$

Тогда класс R удовлетворяет определению (11), и в силу самого определения (11) класса R следует:

$$R \in R \tag{13}$$

Таким образом:

$$(R \notin R) \Rightarrow (R \in R) \tag{14}$$

Рассмотрим теперь вторую возможность, а именно:

$$R \in R \tag{15}$$

Тогда в силу определения принадлежности объекта классу, класс R является элементом самого себя, и в силу определения (11) для него выполняется характеристическое свойство, согласно которому:

$$R \notin R \tag{16}$$

Таким образом:

$$(R \in R) \Rightarrow (R \notin R) \tag{17}$$

Из сопоставления (14) и (17) следует:

$$(R \notin R) \Leftrightarrow (R \in R) \qquad (18)$$

Мы видим, что соотношение (18) вступает в очевидное противоречие с законом о непротиворечии аристотелевской класической логики.

Назовем класс R - классом Рассела. Возникает естественный вопрос: является ли класс Рассела непустым? Для того, чтобы показать, что класс Рассела является непустым, достаточно показать, что он содержит хотя бы один элемент. Для этого рассмотрим пустое множество $\varnothing$. В силу формулы (8) имеем:

$$\{x : (\forall y)(y \notin x)\} = \varnothing \qquad (19)$$

В силу формулы (19) имеем:

$$\varnothing \notin \varnothing \qquad (20)$$

Из сопоставления (11) и (20) следует:

$$\varnothing \in R \qquad (21)$$

Из (21) следует, что класс Рассела является непустым. Поэтому в силу теоремы экзистенциальности классов, - класс Рассела существует. Доказанное утверждение можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Первая теорема экзистенциальности класса Рассела

(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей аксиому пустого множества, существование пустого множества является достаточным условием для доказательства существования класса Рассела - R.

$$\exists\varnothing \Rightarrow \exists R((R = \{Z : Z \notin Z\}) \wedge (R \neq \varnothing)) \qquad (22)$$

На основании логического закона контрапозиции, приведенную выше теорему можно сформулировать иным образом.

<u>Вторая теорема экзистенциальности класса Рассела</u>

<u>(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)</u>

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей аксиому существования пустого множества, отрицание существования класса Рассела - R, влечет за собой отрицание существования пустого множества $\varnothing$:

$$\neg\exists R((R=\{Z : Z\notin Z\})\wedge(R\neq\varnothing))\Rightarrow\neg\exists\varnothing \tag{23}$$

Доказательство

В силу соотношения (22) и логического закона контрапозиции имеем:

$$\begin{gathered}(\exists\varnothing\Rightarrow\exists R((R=\{Z : Z\notin Z\})\wedge(R\neq\varnothing)))\Leftrightarrow\\(\neg\exists R((R=\{Z : Z\notin Z\})\wedge(R\neq\varnothing))\Rightarrow\neg\exists\varnothing)\end{gathered} \tag{24}$$

Полученное в формуле (18) противоречие побуждает к поиску такого ограничения на характеристическое свойство класса $C(x)$, которое способствовало бы избежанию противоречия при формировании того или иного класса. Формула (18) показывает, что получаемое в ней противоречие, нарушает также выполнимость закона об исключенном третьем. Известно, что закон о непротиворечии является необходимым условием для закона об исключенном третьем. Это означает, что соблюдение закона об исключенном третьем, является достаточным условием для выполнимости закона о непротиворечии. Кроме этого, формально логически, упомянутые законы равноистинны в соответствии с формальным критерием истинности. На этих обстоятельствах и основаны ограничения, накладываемые на характеристическое свойство $C(x)$. На совокупности всех возможных классов выделяют так называемые множества на основании следующего определения.

<u>Определение множества</u>

Множеством называется класс, удовлетворяющий следующему условию:

$$Set(Cx)=\{x : (\forall x)(C(x))\wedge(\forall y(C(y)\oplus\neg C(y)\} \tag{25}$$

Формула (25) означает, что множеством является такой класс, элементы которого удовлетворяют характеристическому свойству $C(x)$, и, кроме этого для каждого объекта y на основании закона об исключенном третьем можно решить, удовлетворяет ли он характеристическому свойству $C(x)$, либо нет.

Таким образом мы видим, что понятие множества не принадлежит к числу самоочевидных понятий. При этом то или иное конкретное множество может обозначать сообщество объектов. Выдающийся чешский математик Бернард Больцано, который первым ввел понятие множества, должен был приложить немало усилий, чтобы объяснить читателю, что совокупность каких либо объектов, а тем более сообщество объектов зачастую разнородных, можно представить себе, как самостоятельную сущность. Формула (25) позволяет рассматривать множества, как вполне определенные, логически четко выделенные классы.

Из приведенных выше рассуждений выявляется существенная разница между классами и их элементами. В зависимости от характеристического свойства класса, элементы класса могут и не существовать в качестве входящих в него объектов. Классы же существуют всегда, или в качестве непустого класса, или же в качестве пустого множества.

Перейдем теперь к определению универсального класса.

Определение универсального класса

Класс U называется универсальным, если любой пустой или непустой объект является его элементом.

Формальное определение универсального класса

$$U = Cls(u) = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\} \qquad (26)$$

Формула (26) означает, что элементами универсального класса U являются, как пустое множество, так и любой непустой класс.

Первая теорема экзистенциальности универсального класса

(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей аксиому пустого множества, существование пустого множества является достаточным условием для доказательства существования универсального класса U .

$$\exists\varnothing \Rightarrow \exists U((U = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\})) \qquad (27)$$

Доказательство

В соответствии с самим определением (26) универсального класса, он содержит пустое множество в качестве элемента. Следовательно универсальный класс является непустым. В силу теоремы экзистенциальности классов, это обстоятельство означает существование универсального класса U . Теорема доказана.

Вторая теорема экзистенциальности универсального класса

(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей аксиому пустого множества, отрицание существования универсального класса U, влечет за собой отрицание существования пустого множества $\varnothing$. Следовательно универсальный класс U существует.

Доказательство

Доказательство приведенной выше теоремы опирается на логический закон контрапозиции. На основании справедливости формулы (27) и логического закона контрапозиции можно заключить:

$$\begin{aligned}&(\exists\varnothing \Rightarrow \exists U((U = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\}))\Leftrightarrow \\ &(\neg\exists U((U = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\}))\Rightarrow \neg\exists\varnothing)\end{aligned} \tag{28}$$

Из соотношения (28) непосредственно видно, что отрицание существования универсального класса, приводит к отрицанию пустого множества, а это противоречит аксиоме существования пустого множества. Следовательно универсальный класс U существует. Теорема доказана.

Теорема экзистенциальности универсального множества

(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)

Универсальный класс U является множеством.

Доказательство

Из теоремы экзистенциональности классов и формального определения (26) универсального класса U следует, что любой класс, определяемый некоторым характеристическим свойством $C(x)$, является элементом универсального класса U. Поэтому для универсального класса U выполняется формальное определение множества (25). Следовательно универсальный класс U является множеством.

Таким образом, вопреки широко распространенному мнению о не существовании универсального класса, - в настоящей работе показано,что наоборот, - универсальный класс U существует и является множеством.

Используемые источники:

1. **Вопенка П. Альтернативная теория множеств. Новый взгляд на бесконечность. Новосибирск. Издательство Института математики. 2004 г.**

9.ТЕОРЕМА О ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ПУСТОГО МНОЖЕСТВА В КАНТОРОВСКОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Одним из основополагающих отношений между множествами и классами, является отношение принадлежности всех элементов одного множества или класса, другому множеству или классу. Рассмотрим соответствующие определения по монографии /1/ выдающегося немецкого математика Феликса Хаусдорфа, в рамках теории множеств Георга Кантора.

Если даны два непустых множества X и Y, то возникает вопрос о том, не принадлежат ли элементы одного из них также и другому. Пусть x и y являются элементами множеств X и Y соответственно. Сперва рассмотрим следующие альтернативы:

1. Каждое $x \in Y$, не каждое $x \in Y$.
2. Каждое $y \in X$, не каждое $y \in X$.

Комбинируя сочетания приведенных выше возможных альтернатив, приходим к следующим четырем возможным случаям:

1. Каждое $x \in Y$, каждое $y \in X$: $X = Y$.
2. Каждое $x \in Y$, не каждое $y \in X$: $X \subseteq Y$.
3. Не каждое $x \in Y$, каждое $y \in X$: $Y \subseteq X$.
4. Не каждое $x \in Y$, не каждое $y \in X$.

В случае (1) говорят, что множества X и Y равны друг другу. В случае (2) говорят, что множество X является подмножеством множества Y. В случае (3) говорят, что множество Y является подмножеством множества X. Для случая (4) в монографии Ф.Хаусдорфа /1/ не зарезервировано никаких обозначений.

Однако, в настоящей работе мы полагаем, что в соответствии с классической традиционной логикой Аристотеля, согласно которой в той или иной теории должны изучаться логически вполне определенные объекты, коль скоро мы определили символьные выражения для случаев (1)-(3), следует также на символьном уровне определить и случай (4). Замечая, что случай (4) в соответствии с принятыми определениями, не относится ни к одному из случаев (1)-(3), то в полном соответствии с аристотелевской логикой, а именно в соответствии с законом исключенного третьего, мы можем заключить, что в случае (4) имеют место сотношения:

$$\neg(X \subseteq Y) \tag{1}$$

$$\neg(Y \subseteq X) \tag{2}$$

Соотношения (1) и (2) читаются следующим образом: не верно, что множество X является подмножеством множества Y; не верно, что множество Y является подмножеством множества X.

В канторовской теории множеств говорится о необходимости признания существования пустого множества, обозначаемого как $\varnothing$, причем постулируется единственность пустого множества. Фактически, пустое множество $\varnothing$ в теории множеств является аналогом арифметического ноля теории действительных чисел.

Если множества X и Y пусты, то имеет место соотношение:

$$X = Y = \varnothing \tag{3}$$

Определенные логические проблемы возникают в том случае, когда одно множество пусто, а другое нет. Положим для определенности, что множество X пусто, а множество Y не является пустым. В этом случае, в монографии /1/ Ф.Хаусдорфом приведено следующее рассуждение, излагаемое ниже.

Пусть $X = \varnothing$, тогда утверждение «если $x \in \varnothing$, то $x \in Y$» справедливо потому, что $X = \varnothing$, не содержит ни одного элемента x, и $x \in \varnothing$ является ложным суждением. Если даны два суждения А и В, то утверждение «если А верно, то В также верно», верно всякий раз, когда А неверно. Из неверного суждения А следует любое суждение.

Таким образом, из приведенного выше отрывка из /1/ следует, что в данном случае в рассуждении Хаусдорфа применяется закон Дунса Скота, согласно которому из противоречия, или ложного суждения следует любое суждение. Хаусдорф тем самым признает, что суждение А, определяемое формулой:

$$A = (x \in \varnothing) = 0 \tag{4}$$

является ложным, где под 0 в данном случае понимается формально-логический ноль.

Необходимо отметить, что в классической аристотелевской традиционной логике закон Дунса Скота является предупредительным законом. Он предупреждает о том, что из ложного, или же противоречивого суждения может следовать любое суждение, в том числе и отрицание закона о непротиворечии, а именно:

$$0 \Rightarrow (B = \neg B) \tag{5}$$

Именно этот предупредительный закон и нарушен в канторовской теории множеств. Таким образом канторовская теория множеств содержит логически ложную формулу (4), на основании которой выводимо противоречие, содержащееся в качестве подформулы в (5). В классической аристотелевской традиционной логике это означает, что канторовская теория множеств содержит ложное основное положение в виде (4) из которого выводимо противоречие, содержащееся в (5). Ложное основное положение в классической традиционной логике называется – error fundamentalis (лат.).

Теперь сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема о пустом множестве (Ахвледиани А.Н. - 2011)

В канторовской теории множеств, утверждение о том, что пустое множество $\varnothing$ не является подмножеством непустого множества Y, выводимо непротиворечиво на основании прямого метода доказательства.

Доказательство

Итак, рассмотрим случай, когда множество X пусто, а множество Y не является пустым. Доказательство будем вести в соответствии с одним из прямых методов классической аристотелевской традиционной логики, который называется методом доказательства по случаям. В соответствии с этим методом мы будем рассматривать все возможные случаи (1)-(4) соотношений множеств X и Y и отбрасывать неприемлимые с логической точки зрения варианты. Тогда допустимыми вариантами будут те, которые будут удовлетворять соответствующему случаю. Поскольку имеет место утверждение

$$\neg \exists x (x \in \varnothing) \tag{6}$$

а множество Y не является пустым, то случай (1) не имеет места. Рассмотрим теперь случай (2). В соответствии с (6), x не может принадлежать множеству Y, поскольку объект x *не существует*. Поэтому случай (2) исключается. В случае (3) y не может принадлежать множеству X, поскольку X - *является пустым*. Следовательно остается лишь случай (4). Рассмотрим теперь случай (4). Поскольку объект x *не существует*, то x не может принадлежать Y. Поскольку X - является пустым, то ни одно y не может принадлежать множеству X. Этим самым выполняются более слабые условия случая (4).

Это, в свою очередь означает, что для рассматриваемого случая выполняются соотношения (1) и (2). В частности, для рассматриваемого нами случая имеем

$$\neg(\varnothing \subseteq Y) \tag{7}$$

$$\neg(Y \subseteq \varnothing) \tag{8}$$

Отметим, что в процессе доказательства мы не использовали косвенные методы доказательства, такие как например метод доказательства от противного или закон Клавия. Кроме этого, приведенная нами цепочка рассуждений не содержит противоречивой подформулы. Следовательно вывод является непротиворечивым. Формула (7) означает, что пустое множество $\varnothing$ не является подмножеством непустого множества Y . Теорема доказана.

Рассмотрим теперь следующие определения.

Определение сильно трансцендентных логической формул

Логические формулы F и ⌐F называются логически сильно трансцендентными, если по отдельности является доказуемым или выводимым, как F, так и ⌐F.

Определение логически сильно трансцендентной теории

Формальная или полуформальная, логическая или математическая теория T называется логически сильно трансцендентной, если на множестве ее суждений TS по отдельности выводимы сильно трансцендентные логические формулы F и ⌐F. Логически сильно трансцендентная теория обозначается как HT.

Определение предельно трансцендентных логической формул

Логические формулы F и ⌐F называются логически предельно трансцендентными в некоторой формальной или полуформальной логической или математической теории T, если для них в этой теории выполняется хотя бы одно из перечисленных ниже логических соотношений:

$$F \wedge \neg F$$

$$\neg F \wedge \neg\neg F$$

$$F \Leftrightarrow \neg F \qquad (9)$$

$$\neg(F \vee \neg F)$$

$$(F \Rightarrow 0) \wedge (\neg F \Rightarrow 0)$$

<u>Определение логически предельно трансцендентной теории</u>

Формальная или полуформальная, логическая или математическая теория T называется логически предельно трансцендентной, если на множестве ее суждений TS выводима хотя бы одна пара предельно трансцендентных логических формул F и ¬F. Предельно трансцендентная теорию обозначим - LT.

<u>Определение логически предельно трансцендентного объекта</u>

Каждый объект, класс или множество, конструктивно существующие в теории T, называются предельно трансцендентными в этой теории, если на множестве TS суждений этой теории, в отношении упомянутых объекта, класса или множества существуют предельно трансцендентные логические формулы F и ¬F. Предельно трансцендентный объект, класс или множество обозначим - LTC.

<u>Определение логически сильно трансцендентного объекта</u>

Каждый объект, класс или множество, конструктивно существующие в теории T, называются сильно трансцендентными в этой теории, если на множестве TS суждений этой теории, по отдельности выводимы сильно трансцендентные логические формулы F и ¬F. Сильно трансцендентный объект, класс или множество обозначается как HTC.

Обозначим канторовскую теорию множеств через CST (Cantorian Set Theory). Докажем следующее утверждение.

<u>Теорема о трансцендентных логических свойствах пустого множества (Ахвледиани А.Н. – 2011)</u>

В канторовской теории множеств CST , пустое множество $\varnothing$ - является предельно трансцендентным классом.

Доказательство

В канторовской теории множеств, в результате применения закона Дунса Скота в качестве правила вывода и пренебрежения его предупредительным смыслом, выводиться окончательное заключение о том, что: «пустое множество является подмножеством любого непустого подмножества». Мы же, на основе прямого метода доказательства, и на основе доказанной нами «Теоремы о пустом множестве» приходим к контрадикторно противоположному логическому утверждению: «неверно, что пустое множество является подмножеством любого непустого множества». Полученная взаимная контрадикция приведенных выше формул и означает, что в теории CST, пустое множество является предельно трансцендентным классом. Теорема доказана.

Таким образом мы видим, что к сожалению, в канторовской теории множеств содержится error fundamentalis в отношении утверждения о том, что пустое множество является подмножеством любого непустого множества, которое опровергается на основе прямого метода доказательства. Это означает, что теория множеств Кантора CST, является предельно трансцендентной теорией. Указанное обстоятельство самым серьезным образом влияет на выводы, получаемые в рамках CST, особенно это касается «Теоремы Кантора» и «Парадокса Кантора», являющихся основой выводимых далее основных теорем в канторовской теории множеств.

Используемые источники:

1. **Хаусдорф Ф. Теория множеств.(стр.10-11). URSS. Москва. 2007 г.**

10. «ПАРАДОКС АКСИОМ ПУСТОГО МНОЖЕСТВА И РЕГУЛЯРНОСТИ» И НЕДОКАЗУЕМОСТЬ ОТРИЦАНИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЛОГИЧЕСКИ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ КЛАССОВ В АКСИОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ZF И ZFC

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе представлен анализ открытого автором в основаниях классической аксиоматической теории множеств «Парадокса аксиом пустого множества и регулярности». Который заключается в том, что в результате стремления избежать возникновения «Парадокса Рассела» в основаниях теории множеств и введения с этой целью «Аксиомы регулярности», возникает целый класс множеств типа b, каждое из которых является элементом логически трансцендентного R-класса Рассела.

Аксиома регулярности занимает по своей значимости одно из центральных мест в аксиоматических теориях множеств ZF и ZFC (система аксиом Цермело-Френкеля, и та же система, дополненная «Аксиомой выбора»). Ее основное назначение заключалось в устранении так называемого «Парадокса Рассела» в основаниях теории множеств. Для того, чтобы перейти к логически адекватному рассмотрению аксиомы регулярности и ее следствий, рассмотрим сперва формулировку и содержание «Парадокса Рассела», а также вытекающие из него следствия.

<u>Парадокс Рассела</u>

Класс Z назовем регулярным, если для него выполняется соотношение:

$$Z \notin Z \tag{1}$$

Класс Y назовем нерегулярным, если для него выполняется соотношение:

$$Y \in Y \tag{2}$$

Сформируем класс R следующим образом:

$$R = Cls(Z) = \{Z : Z \notin Z\} \tag{3}$$

Зададимся вопросом, является ли класс R регулярным либо нет?

Если класс R является регулярным, то выполняется условие:

$$R \notin R \tag{4}$$

Тогда класс R удовлетворяет определению (3), и в силу самого определения (3) класса R следует:

$$R \in R \tag{5}$$

Таким образом:

$$(R \notin R) \Rightarrow (R \in R) \tag{6}$$

Рассмотрим теперь вторую возможность, а именно:

$$R \in R \tag{7}$$

Тогда в силу определения принадлежности объекта классу, класс R является элементом самого себя, и в силу определения (3) для него выполняется характеристическое свойство, согласно которому:

$$R \notin R \tag{8}$$

Таким образом:

$$(R \in R) \Rightarrow (R \notin R) \tag{9}$$

Из сопоставления (6) и (9) следует:

$$(R \notin R) \Leftrightarrow (R \in R) \tag{10}$$

Мы видим, что соотношение (10) является логически контрадикторным к закону о непротиворечии классической аристотелевской традиционной логики.

Назовем класс R - классом Рассела. Возникает естественный вопрос: является ли класс Рассела непустым? Для того, чтобы показать, что класс Рассела является непустым, достаточно показать, что он содержит хотя бы один элемент. Для этого рассмотрим пустое множество $\varnothing$. В силу «Аксиомы пустого множества» /1/ имеем:

$$\{x : (\forall y)(y \notin x)\} = \varnothing \tag{11}$$

В силу формулы (11) имеем:

$$\varnothing \notin \varnothing \tag{12}$$

Из сопоставления (12) и (3) следует:

$$\varnothing \in R \tag{13}$$

Из (13) следует, что класс Рассела является непустым. Поэтому в силу «Теоремы экзистенциальности классов» /2/, - класс Рассела существует конструктивно. Доказанное утверждение можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Первая теорема экзистенциальности класса Рассела

(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей аксиому пустого множества, существование пустого множества является достаточным условием для доказательства конструктивного существования класса Рассела - R.

$$\exists\varnothing \Rightarrow \exists R((R = \{Z : Z \notin Z\}) \wedge (R \neq \varnothing)) \tag{14}$$

На основании логического закона контрапозиции, приведенную выше теорему можно сформулировать иным образом.

Вторая теорема экзистенциальности класса Рассела

(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей аксиому существования пустого множества, отрицание существования класса Рассела - R, влечет за собой отрицание существования пустого множества $\varnothing$:

$$\neg\exists R((R = \{Z : Z \notin Z\}) \wedge (R \neq \varnothing)) \Rightarrow \neg\exists\varnothing \tag{15}$$

Доказательство

В силу соотношения (14) и логического закона контрапозиции имеем:

$$\begin{aligned}&(\exists\varnothing \Rightarrow \exists R((R = \{Z : Z \notin Z\}) \wedge (R \neq \varnothing))) \Leftrightarrow \\ &(\neg\exists R((R = \{Z : Z \notin Z\}) \wedge (R \neq \varnothing)) \Rightarrow \neg\exists\varnothing)\end{aligned} \tag{16}$$

Соотношение (16) доказывает сформулированную гипотезу.

Рассмотрим следующее определение.

Определение предельно трансцендентных логических формул

Логические формулы F и ¬F называются логически предельно трансцендентными в некоторой формальной или полуформальной логической или математической теории T, если для них в этой теории выполняется хотя бы одно из перечисленных ниже логических соотношений:

$$F \wedge \neg F$$

$$\neg F \wedge \neg\neg F$$

$$F \Leftrightarrow \neg F \tag{17}$$

$$\neg(F \vee \neg F)$$

$$(F \Rightarrow 0) \wedge (\neg F \Rightarrow 0)$$

Определение логически предельно трансцендентного объектов, классов и множеств

Каждый объект, класс или множество, конструктивно существующие в теории T, называются логически предельно трансцендентными в этой теории, если на множестве TS суждений этой теории, в отношении упомянутых объекта, класса или множества существуют предельно трансцендентные логические формулы F и ⌐F. Предельно трансцендентный объект, класс или множество обозначим - LTC.

Приведенное выше определение совместно с теоремами экзистенциальности класса Рассела позволяют выразить полученные в приведенных выше рассуждениях результаты в виде теоремы.

Теорема экзистенциальности логически предельно трансцендентных объектов и классов (Ахвледиани А.Н. - 2011)

Существует по крайней мере один предельно трансцендентный объект и класс. R-класс Рассела является предельно трансцендентным объектом и классом.

Таким образом мы видим, что экзистенциальность R-класса является прямым следствием «Аксиомы пустого множества, что можно выразить в виде следующей теоремы.

Теорема о достаточном условии генезиса логически предельно трансцендентных объектов (Ахвледиани А.Н. - 2011)

Принятие «Аксиомы пустого множества» является достаточным условием генезиса логически предельно трансцендентных объектов и классов.

Приведенные выше теоремы означают, что существование трансцендентных объектов и классов предопределяется «Аксиомой пустого множества» и не зависит от других аксиом теории множеств.

Рассмотрим далее определения множества, универсального класса U, а также ряд теорем, связанных с экзистенциальностью (существованием) универсального класса U.

Определение множества

Множеством называется класс, удовлетворяющий следующему условию:

$$Set(Cx) = \{x : (\forall x)(C(x)) \wedge (\forall y(C(y) \oplus \neg C(y)\} \tag{18}$$

Формула (18) означает, что множеством является такой класс, элементы которого удовлетворяют характеристическому свойству $C(x)$, и, кроме этого для каждого объекта y на основании закона об исключенном третьем можно решить, удовлетворяет ли он характеристическому свойству $C(x)$, либо нет.

Таким образом мы видим, что понятие множества не принадлежит к числу самоочевидных понятий. Выдающийся чешский математик Бернард Больцано, который ввел понятие множества, должен был приложить немало усилий, чтобы объяснить читателю, что совокупность каких либо объектов, а тем более сообщество объектов зачастую разнородных, можно представить себе, как самостоятельную сущность. Формула (18) позволяет рассматривать множества, как вполне определенные, логически четко (в понимании аристотелевского закона об исключенном третьем) выделенные классы.

Из приведенных выше рассуждений выявляется существенная разница между классами и их элементами. В зависимости от характеристического свойства класса, элементы класса могут и не существовать в качестве входящих в него объектов. Классы же существуют всегда, или в качестве непустого класса, или же в качестве пустого множества.

Перейдем теперь к определению универсального класса.

Определение универсального класса

Класс U называется универсальным, если каждый пустой или непустой объект является его элементом.

Формальное определение универсального класса

$$U = Cls(u) = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\} \tag{19}$$

Формула (19) означает, что элементами универсального класса U являются, как пустое множество, так и любой непустой объект или класс.

<u>Первая теорема экзистенциальности универсального класса</u>

<u>(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)</u>

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей аксиому пустого множества, существование пустого множества является достаточным условием для доказательства существования универсального класса U .

$$\exists\varnothing \Rightarrow \exists U((U = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\})) \tag{20}$$

Доказательство

В соответствии с самим определением (19) универсального класса, он содержит пустое множество в качестве элемента. Следовательно универсальный класс является непустым. Это обстоятельство и означает конструктивное существование универсального класса U . Теорема доказана.

<u>Вторая теорема экзистенциальности универсального класса</u>

<u>(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)</u>

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей аксиому пустого множества, отрицание существования универсального класса U, влечет за собой отрицание существования пустого множества $\varnothing$. Следовательно универсальный класс U существует.

Доказательство

Доказательство приведенной выше теоремы опирается на логический закон контрапозиции. На основании справедливости формулы (20) и логического закона контрапозиции можно заключить:

$$\begin{gathered}(\exists\varnothing \Rightarrow \exists U((U = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\})) \Leftrightarrow \\ (\neg\exists U((U = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\})) \Rightarrow \neg\exists\varnothing)\end{gathered} \tag{21}$$

Из соотношения (21) непосредственно видно, что отрицание существования универсального класса, приводит к отрицанию пустого множества, а это противоречит аксиоме существования пустого множества. Следовательно универсальный класс U существует. Теорема доказана.

Теорема экзистенциальности универсального множества

(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)

Универсальный класс U является множеством.

Доказательство

Из теоремы экзистенциональности универсального класса U и формального определения (19) универсального класса U следует, что любой класс, определяемый некоторым характеристическим свойством $C(x)$, является элементом универсального класса U. Поэтому для универсального класса U выполняется формальное определение множества (18). Следовательно универсальный класс U является множеством.

Таким образом, вопреки широко распространенному мнению о не существовании универсального класса, - в настоящей работе показано,что наоборот, - универсальный класс U существует и является множеством.

Докажем теперь следующее утверждение.

Теорема о принадлежности R-класса Рассела универсальному U множеству (Ахвледиани А.Н. – 2011)

R - класс Рассела является элементом универсального U множества.

Доказательство

В соответствии с определениями множества и универсального класса U, класс U удовлетворяет определению множества, следовательно он является множеством. Нами также были доказаны утверждения о непустоте и конструктивном существовании R-класса Рассела. Поскольку по определению универсального класса, U - класс включает в себя все классы, как пустые так и непустые, то R- класс Рассела также является элементом универсального класса U. Теорема доказана.

Приведем теперь формулировку «Аксиомы регулярности в соответствии с /3/.

Аксиома регулярности

В *любом непустом* семействе множеств a есть по меньшей мере одно множество b, каждый элемент c которого не принадлежит данному семейству a, или формально:

$$\forall a(a \neq \varnothing \Rightarrow \exists b(b \in a \wedge \forall c(c \in b \Rightarrow c \notin a))) \quad (22)$$

Докажем теперь следующее утверждение:

<u>Парадокс логической конъюнкции «Аксиомы пустого множества» и «Аксиомы регулярности» в системах ZF и ZFC (Ахвледиани А.Н. -2011)</u>

Каждое множество типа b, формализуемое в системах ZF и ZFC на основе логической коньюнкции «Аксиомы пустого множества» и «Аксиомы регулярности», принадлежит логически трансцендентному R - классу Рассела. Отрицание существования логически трансцендентных объектов и классов, а также универсального U - класса-множества в системах ZF и ZFC является тождественно недоказуемым в силу «Аксиомы пустого множества».

Описание парадокса

Рассмотрим сперва логико-аналитическую природу объектов b, формализуемых в рамках «Аксиомы регулярности». Зададимся вопросом, может ли для объекта b выполнятся следующее соотношение:

$$b \in b \tag{23}$$

Если имеет место соотношение (23), то из (23) и аксиомы регулярности (22) и следует:

$$(b \in a) \wedge (b \in b) \Rightarrow (b \notin a) \tag{24}$$

Формула (24) свидетельствует о том, что из предположения (23) мы получили противоречие с «Аксиомой регулярности», согласно которой $b \in a$. Таким образом остается только второй вариант, а именно:

$$b \notin b \tag{25}$$

Из (25) и определения R - класса Рассела (3) следует:

$$b \in R \tag{26}$$

Таким образом, каждый объект типа b, определяемый «Аксиомой регулярности» является элементом *логически трансцендентного* R - класса Рассела. В этом и заключается «Парадокс аксиом пустого множества и регулярности».

С другой стороны рассмотрим вопрос, - возможно ли отрицание существования логически трансцендентного R - класса Рассела и универсального класса-множества - U. Как было показано в теоремах экзистенциальности универсального класса-множества U и R класса Рассела, отрицание существования упомянутых классов влечет за собой отрицание существования пустого множества, что противоречит «Аксиоме пустого множества». Следовательно отрицание существования универсального класса-множества U и R класса Рассела является логически недоказуемым в системах ZF и ZFC.

Используемые источники:

1. **Википедия. Аксиома пустого множества.**
2. **Ахвледиани А.Н. Теорема экзистенциальности универсального класса в аксиоматической теории множеств. Энциклопедический Фонд Russika. 2011.**
3. **Википедия. Аксиоматика теории множеств.**

11.ОБОСНОВАНИЕ ЛОГИЧЕСКОЙ ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ ТЕОРИИ КЛАССОВ И МНОЖЕСТВ

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе представлен анализ и обоснование существования явления логико-математической трансценденции в основаниях классической теории множеств. При этом под формально-логической трансценденцией понимается выход за пределы классической традиционной аристотелевской логики, наблюдаемый конструктивно и формально доказуемый в рамках современной глобально непротиворечивой классической формальной логики нулевого порядка.

Исследование логической природы теории классов и множеств мы начнем с рассмотрения особенностей основных законов классической аристотелевской традиционной логики. Как известно, система классической аристотелевской традиционной логики, состоит из трех основных законов, закона тождества, закона о непротиворечии и закона об исключенном третьем. Далее приводятся основные законы классической аристотелевской логики для аристотелевских высказываний.

Закон тождества

Каждое аристотелевское высказывание логически равно самому себе:

$$A \equiv A \tag{1}$$

Закон о непротиворечии

Каждое аристотелевское высказывание логически не равно своему отрицанию:

$$\neg(A \equiv \neg A) \tag{2}$$

Закон об исключенном третьем

Для каждого аристотелевского высказывания, либо само высказывание истинно а его отрицание ложно, либо само высказывание ложно, а его отрицание истинно:

$$A \oplus \neg A \tag{3}$$

К числу неформальных законов классической аристотелевской традиционной логики относится «Принцип достаточного основания», сформулированный выдающимся немецким логиком и математиком – Г.В.Лейбницем. Применительно к логико-математическим объектам упомянутый выше принцип можно выразить следующим образом.

Принцип достаточного основания

Каждое логическое и математическое утверждение должно быть логически и аналитически доказано.

В число законов классической аристотелевской традиционной логики принадлежит также логический закон Дунса Скота, который имеет предупредительный смысл.

Закон Дунса Скота

Из противоречивого или ложного суждения следует любое суждение, истинное или ложное:

$$(0 \Rightarrow B) \wedge ((B = 0) \vee (B = 1)) \qquad (4)$$

Предупредительный смысл закона Дунса Скота заключается в том, что в случае появления в той или иной логической или логико-математической теории T ложного или противоречивого суждения, становится доказуемым практически любое суждение, как истинное, так и противоречивое или ложное.

Рассмотрим определение логически трансцендентных формул. В данном случае под логической трансценденцией мы понимаем выход за пределы первых трех основных законов классической аристотелевской традиционной логики. Слово «трансценденция» происходит от латинского «transcendentis» – перешагивающий, выходящий за пределы /1/.

Определение логически предельно трансцендентных логических формул

Логически предельно трансцендентными по отношению к классической аристотелевской традиционной логике, называются такие логические формулы F и $\neg F$, в отношении которых можно с достоверностью доказать конструктивное существование логических утверждений, являющиеся логически инверсными по отношению ко второму и третьему законам аристотелевской логики, в том числе:

$$F \equiv \neg F$$

$$\neg(F \oplus \neg F)$$

$$F \wedge \neg F$$

$$\neg F \wedge \neg\neg F$$

$$F \Leftrightarrow \neg F$$

$$\neg(F \vee \neg F) \tag{5}$$

$$(F \Rightarrow 0) \wedge (\neg F \Rightarrow 0)$$

Приведенное выше определение нуждается в некоторых пояснениях. Как известно, одним из основных логических операторов классической формальной логики является оператор логической инверсии, обозначаемый как $\neg$. Исходя из самих основ классической формальной аристотелевской традиционной логики прямо следует, что для каждого конструктивно существующего логически истинного или тождественно непротиворечивого высказывания A, и одновременно с ним, существует и контрадикторно ему противоположное ложное или тождественно противоречивое высказывание $\neg A$. Поэтому наряду с конструктивным существованием законов классической традиционной аристотелевской логики и одновременно с ними, существуют также и их логически инверсные логические формулы. Это обстоятельство является неотъемлимым свойством классической аристотелевской традиционной логики.

Непосредственно из основных законов классической аристотелевской традиционной логики и закона Дунса Скота следует следующее утверждение, которое мы сформулируем и докажем в виде следующей теоремы.

Теорема о генезисе и существовании логически предельно трансцендентных формул в классической формальной аристотелевской логике

(Ахвледиани А.Н. – 2011)

Конструктивное существование совокупности основных законов классической аристотелевской традиционной логики и закона Дунса Скота является достаточным условием для генезиса и конструктивного существования логически предельно трансцендентных формул внутри истинных логических формул классической формальной аристотелевской логики.

Доказательство

В соответствии с основными тремя законами классической формальной аристотелевской логики (1)-(3) имеем:

$$(A \vee \neg A) \equiv 1 \qquad (6)$$

В соответствии с логическим законом Дунса Скота, из сопоставления (6) и (4) следует:

$$((A \Rightarrow (F \equiv \neg F)) \vee (\neg A \Rightarrow (F \equiv \neg F))) \equiv 1 \qquad (7)$$

$$((A \Rightarrow \neg(F \oplus \neg F)) \vee (\neg A \Rightarrow \neg(F \oplus \neg F))) \equiv 1 \qquad (8)$$

$$((A \Rightarrow (F \Leftrightarrow \neg F)) \vee (\neg A \Rightarrow (F \Leftrightarrow \neg F))) \equiv 1 \qquad (9)$$

Необходимо отметить, что все формулы (7)-(9) являются истинными формулами классической формальной логики. Таким образом классическая формальная аристотелевская логика истинно признает конструктивное существование логически предельно трансцендентных логических формул внутри истинных формул классической формальной аристотелевской логики. Теорема доказана.

Из доказанной выше теоремы следует, что классическая формальная аристотелевская логика истинно признает существование явления логической трансценденции. Поэтому *доказательство обратного становится логически и аналитически невозможным*.

Рассмотрим теперь вопросы формирования основных положений теории множеств и классов.

В современных исследованиях по теории множеств имеется достаточно подробно разработанная классификация тех или иных теоретико-множественных объектов классов и множеств. Приведем некоторые основные моменты упомянутой классификации по книге /2/ известного чешского специалиста по теории множеств – доктора П.Вопенки.

Пусть даны какие-либо уже созданные объекты и указан некоторый способ, с помощью которого можно выделить эти объекты среди остальных объектов. Упомянутый способ выделения объединяет эти объекты. Если на выделенные таким образом объекты можно смотреть, как на вполне равноправные, то говорят, что выделена *совокупность объектов*. Если же по условиям рассматриваемого вопроса необходимо признать за выделенными объектами различные позиции и не представляется возможным игнорировать то обстоятельство, что они имеют различные свойства, или вступают в различные отношения, то говорят, что *выделено сообщество объектов*.

Выделение группы объектов из совокупности других объектов происходит на основе задания так называемого характеристического свойства, которое представляет собой признак, по которому та или иная группа объектов выделяется из совокупности других объектов.

Определение класса

Классом называется некоторая совокупность объектов, выделенных на основе характеристического свойства $C(x)$ (характеристическое свойство может представлять собой также логическую конъюнкцию свойств, которым должны удовлетворять элементы определяемого класса) символьная запись определяемого класса имеет следующий вид:

$$Cls(Cx) = \{x : (\forall x)(C(x))\} \tag{10}$$

Одним из основных понятий теории классов является понятие пустого множества. Пустым множеством называется такой класс, который не содержит ни одного элемента. Пустое множество обозначается символом $\varnothing$. В теории классов пустое множество является аналогом арифметического 0 множества действительных чисел. По определению существует только одно пустое множество. Формула $A = \varnothing$ означает, что множество A не имеет ни одного элемента, что оно пусто, что оно «исчезает». Если не вводить понятия пустого множества, то при определении того или иного конкретного класса С пришлось бы часто делать оговорку: если он существует. Это происходит из-за того, что часто элементы класса определены так, что заранее бывает неизвестно, существуют они или нет. В аксиоматических теориях множеств, существование самого пустого множества утверждается специальной *аксиомой существования пустого множества*, которая формулируется следующим образом.

Аксиома пустого множества

Существует множество, не содержащее ни одного элемента. Упомянутое множество называется пустым и обозначается $\varnothing$. Имеет место сотношение

$$(\exists x)(\forall y)(y \notin x) = \varnothing \tag{11}$$

Как правило, множество оказывается пустым, в том случае, когда характеристическое свойство множества - $C(x)$, определяющее совокупность элементов множества, является логически, математически или физически неосуществимым.

Необходимо отметить, что введение понятия пустого множества, и в особенности, связанной с ним «Аксиомы пустого множества», оказывает значительное воздействие на сами логические выводы, получаемые в рамках теории классов и множеств.

До создания теории множеств, в классическом математическом анализе, проблема существования или не существования тех или иных логических или математических объектов была тесно связана с непротиворечивостью или противоречивостью определяемых объектов. Исходя из основных законов аристотелевской логики, при построении той или иной математической теории, в нее включались и в ней *признавались существующими* только те объекты, непротиворечивость которых была установлена с достоверностью. Те же объекты, которые по своей логической или математической природе являлись противоречивыми и не соответствовали классической традиционной аристотелевской логике, - исключались из дальнейшего рассмотрения в этой теории, т.е. признавались *не существующими в этой теории*.

С созданием теории множеств, и введения в нее понятия пустого множества совместно с «Аксиомой пустого множества», прежняя концепция существования или не существования тех или иных объектов в рамках той или иной математической теории кардинально изменилась. Ниже, для каждой аксиоматической теории множеств, содержащей «Аксиому пустого множества», будет сформулирована и доказана теорема о существовании любого класса с наперед заданным характеристическим свойством.

<u>Теорема экзистенциальности классов (Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)</u>

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей аксиому пустого множества, существование пустого множества является достаточным условием для доказательства существование каждого класса, определяемого наперед заданным характеристическим свойством (или совокупностью свойств) $C(x)$.

Доказательство

Рассмотрим следующие случаи. Первый случай: характеристическое свойство $C(x)$ является логически, математически или физически неосуществимым. Тогда не существует ни одного элемента x, удовлетворяющего этому свойству. В этом случае класс со свойством $C(x)$ является пустым. Однако в силу «Аксиомы пустого множества» (11) – пустое множество существует. Это означает, что в рассматриваемом случае класс со свойством $C(x)$ хотя и является пустым , но тем не менее существует, как пустое множество.

Второй случай: характеристическое свойство $C(x)$ является осуществимым, т.е. существуют элементы x, удовлетворяющие характеристическому свойству $C(x)$. В этом случае, согласно (10), класс $Cls(Cx)$ является непустым, а следовательно - тем более существующим.

Из приведенного выше рассуждения следует, что в любом случае, невзирая на осуществимость или неосуществимость характеристического свойства $C(x)$, класс $Cls(Cx)$ существует или в виде непустого класса, или же в виде пустого множества. Это означает, что если с существованием класса $Cls(Cx)$ возникают противоречивые суждения, *то мы вынуждены признать также и факт их существования*. Это обстоятельство является неотъемлимым свойством каждой теории классов или теории множеств, содержащей «Аксиому существования пустого множества», и является прямым следствием принятия упомянутой аксиомы.

В классической аристотелевской традиционной логике приняты следующие критерии материальной и формальной истинности высказываний /3/.

Материальный критерий истинности

Некоторое высказывание A об исследуемом объекте B называется материально истинным, если справедливость, содержащегося в нем утверждения об объекте B подтверждена достоверной логико-аналитической информацией, соответствующей «Принципу достаточного основания».

Формальный критерий истинности

Некоторое высказывание A называется формально истинным, если оно соответствует первым трем законам классической аристотелевской традиционной логики.

Постольку поскольку в классической аристотелевской логике приняты два критерия истинности, материальный и формальный, то в упомянутой логической системе принят так называемый «Принцип доминирования (предпочтения) материального критерия истинности», сущность которого излагается ниже.

Принцип доминирования материального критерия истинности

Материальный критерий истинности доминирует над формальным.

Необходимо отметить, что «Принцип доминирования материального критерия истинности, является краеугольным камнем классической аристотелевской традиционной логики. Он означает в том числе, что если мы получили формальное противоречие в результате рассмотрения некоторого вопроса, то мы должны признать факт получения формального противоречия.

Как известно, идея выделения класса $Cls(Cx)$ с помощью указания его характеристического свойства $C(x)$, принадлежит создателю теории множеств – выдающемуся немецкому математику Георгу Кантору. Однако, уже на начальном этапе развития теории множеств, другим знаменитым математиком, логиком и философом Бертраном Расселом было выдвинуто возражение против выделения класса с помощью любого характеристического свойства $C(x)$. Им был построен теоретико-множественный парадокс, так называемый «Парадокс Рассела», который доказывает выводимость противоречивого суждения на множестве суждений канторовской теории множеств. Ниже приводятся формулировка упомянутого парадокса и соответствующее рассуждение, приводящее к антиномии.

<u>Парадокс Рассела</u>

Класс Z назовем регулярным, если для него выполняется соотношение:

$$Z \notin Z \tag{12}$$

Класс Y назовем нерегулярным, если для него выполняется соотношение:

$$Y \in Y \tag{13}$$

Сформируем класс R следующим образом:

$$R = Cls(Z) = \{Z : Z \notin Z\} \tag{14}$$

Зададимся вопросом, является ли класс R регулярным либо нет?

Если класс R является регулярным, то выполняется условие:

$$R \notin R \tag{15}$$

Тогда класс R удовлетворяет определению (14), и в силу самого определения (14) класса R следует:

$$R \in R \tag{16}$$

Таким образом:

$$(R \notin R) \Rightarrow (R \in R) \tag{17}$$

Рассмотрим теперь вторую возможность, а именно:

$$R \in R \tag{18}$$

Тогда в силу определения принадлежности объекта классу, класс R является элементом самого себя, и в силу определения (14) для него выполняется характеристическое свойство, согласно которому:

$$R \notin R \tag{19}$$

Таким образом имеем:

$$(R \in R) \Rightarrow (R \notin R) \tag{20}$$

Из сопоставления (17) и (20) следует:

$$(R \notin R) \Leftrightarrow (R \in R) \tag{21}$$

Мы видим, что соотношение (21) вступает в логическую контрадикцию с законом о непротиворечии аристотелевской класической логики.

Назовем класс R - классом Рассела. Возникает естественный вопрос: является ли класс Рассела непустым? Для того, чтобы показать, что класс Рассела является непустым, достаточно показать, что он содержит хотя бы один элемент. Для этого рассмотрим пустое множество $\varnothing$. В силу формулы (11) имеем:

$$\{x : (\forall y)(y \notin x)\} = \varnothing \qquad (22)$$

В силу формулы (22) имеем:

$$\varnothing \notin \varnothing \qquad (23)$$

Из сопоставления (14) и (23) следует:

$$\varnothing \in R \qquad (24)$$

Из (24) следует, что класс Рассела является непустым. Поэтому в силу «Теоремы экзистенциальности классов», - класс Рассела существует. Доказанное утверждение можно сформулировать в виде следующей теоремы.

<u>Первая теорема экзистенциальности класса Рассела</u>

<u>(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)</u>

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей аксиому пустого множества, существование пустого множества является достаточным условием для доказательства существования класса Рассела - R.

$$\exists\varnothing \Rightarrow \exists R((R = \{Z : Z \notin Z\}) \wedge (R \neq \varnothing)) \qquad (25)$$

На основании логического закона контрапозиции, приведенную выше теорему можно сформулировать иным образом.

<u>Вторая теорема экзистенциальности класса Рассела</u>

<u>(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)</u>

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей аксиому существования пустого множества, отрицание существования класса Рассела - R, влечет за собой отрицание существования пустого множества $\varnothing$:

$$\neg\exists R((R = \{Z : Z \notin Z\}) \wedge (R \neq \varnothing)) \Rightarrow \neg\exists\varnothing \qquad (26)$$

Доказательство

В силу соотношения (25) и логического закона контрапозиции имеем:

$$\begin{aligned}&(\exists\varnothing \Rightarrow \exists R((R=\{Z : Z \notin Z\}) \wedge (R \neq \varnothing))) \Leftrightarrow \\ &(\neg\exists R((R=\{Z : Z \notin Z\}) \wedge (R \neq \varnothing)) \Rightarrow \neg\exists\varnothing)\end{aligned} \tag{27}$$

Соотношение (27) доказывает сформулированную гипотезу.

Полученное в формуле (21) противоречие побуждает к поиску такого ограничения на характеристическое свойство класса $C(x)$, которое способствовало бы избежанию противоречия при формировании того или иного класса. Формула (21) показывает, что получаемое в ней противоречие, нарушает также выполнимость закона об исключенном третьем. Известно, что закон о непротиворечии является необходимым условием для закона об исключенном третьем. Это означает, что соблюдение закона об исключенном третьем, является достаточным условием для выполнимости закона о непротиворечии. Кроме этого, формально логически, упомянутые законы равноистинны в соответствии с формальным критерием истинности. На этих обстоятельствах и основаны ограничения, накладываемые на характеристическое свойство $C(x)$. На совокупности всех возможных классов выделяют так называемые множества на основании следующего определения.

Определение множества

Множеством называется класс, удовлетворяющий следующему условию:

$$Set(Cx) = \{x : (\forall x)(C(x)) \wedge (\forall y(C(y) \oplus \neg C(y)\} \tag{28}$$

Формула (28) означает, что множеством является такой класс, элементы которого удовлетворяют характеристическому свойству $C(x)$, и, кроме этого для каждого объекта y на основании закона об исключенном третьем можно решить, удовлетворяет ли он характеристическому свойству $C(x)$, либо нет.

Таким образом мы видим, что понятие множества не принадлежит к числу самоочевидных понятий. Выдающийся чешский математик Бернард Больцано, который ввел понятие множества, должен был приложить немало усилий, чтобы объяснить читателю, что совокупность каких либо объектов, а тем более сообщество объектов зачастую разнородных, можно представить себе, как самостоятельную сущность. Формула (28) позволяет рассматривать множества, как вполне определенные, логически четко выделенные классы в сответствии с классической аристотелевской традиционной логикой.

Из приведенных выше рассуждений выявляется существенная разница между классами и их элементами. В зависимости от характеристического свойства класса, элементы класса могут и не существовать в качестве входящих в него объектов. Классы же существуют всегда, или в качестве непустого класса, или же в качестве пустого множества.

Перейдем теперь к определению универсального класса.

Определение универсального класса

Класс U называется универсальным, если любой пустой или непустой объект является его элементом.

Формальное определение универсального класса

$$U = Cls(u) = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\} \tag{29}$$

Формула (29) означает, что элементами универсального класса U являются, как пустое множество, так и любой непустой класс.

Первая теорема экзистенциальности универсального класса

(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей аксиому пустого множества, существование пустого множества является достаточным условием для доказательства существования универсального класса U .

$$\exists\varnothing \Rightarrow \exists U((U = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\})) \tag{30}$$

Доказательство

В соответствии с самим определением (29) универсального класса, он содержит пустое множество в качестве элемента. Следовательно универсальный класс является непустым. В силу «Теоремы экзистенциальности классов», это обстоятельство означает существование универсального класса U . Теорема доказана.

Вторая теорема экзистенциальности универсального класса

(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей аксиому пустого множества, отрицание существования универсального класса U, влечет за собой отрицание существования пустого множества $\varnothing$. Следовательно универсальный класс U существует.

Доказательство

Доказательство приведенной выше теоремы опирается на логический закон контрапозиции. На основании справедливости формулы (30) и логического закона контрапозиции можно заключить:

$$(\exists\varnothing \Rightarrow \exists U((U = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\})) \Leftrightarrow$$
$$(\neg\exists U((U = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\})) \Rightarrow \neg\exists\varnothing) \tag{31}$$

Из соотношения (31) непосредственно видно, что отрицание существования универсального класса, приводит к отрицанию пустого множества, а это противоречит «Аксиоме существования пустого множества». Следовательно универсальный класс U существует. Теорема доказана.

Теорема экзистенциальности универсального множества

(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)

Универсальный класс U является множеством.

Доказательство

Из теоремы экзистенциональности классов и формального определения (29) универсального класса U следует, что любой класс, определяемый некоторым характеристическим свойством $C(x)$, является элементом универсального класса U. Поэтому для универсального класса U выполняется формальное определение множества (28). Следовательно универсальный класс U является множеством.

Таким образом, вопреки широко распространенному мнению о не существовании универсального класса, - в настоящей работе показано,что наоборот, - универсальный класс U существует и является множеством.

Одной из основных аксиом теории множеств является «Аксиома экстенсиональности» для тех классов и множеств, которые не являются строго упорядоченными в соответствии с натуральным рядом $N_+ = \langle 1,2,3,4,5,6,7,......,n,......\rangle$. Ниже приводится формулировка «Аксиомы экстенсиональности» для множеств.

Аксиома экстенсиональности

Пустое множество $\varnothing$ равно самому себе. Два непустых множества $Set(x)$ и $Set(y)$ равны друг другу в том и только в том случае, если для них выполняется сотношение:

$$(Set(x) = Set(y)) \Leftrightarrow (\forall z : (z \in Set(x)) \Leftrightarrow z \in Set(y)) \tag{32}$$

Рассмотрим следующие определения.

<u>Определение логически предельно трансцендентного объектов, классов и множеств</u>

Каждый объект, класс или множество, конструктивно существующие в теории T, называются логически предельно трансцендентными в этой теории, если на множестве TS суждений этой теории, в отношении упомянутых объекта, класса или множества существуют предельно трансцендентные логические формулы F и ⌐F. Предельно трансцендентный объект, класс или множество обозначим - LTC.

Приведенное выше определение совместно с теоремами экзистенциальности класса Рассела позволяют выразить полученные в приведенных выше рассуждениях результаты в виде теоремы.

<u>Теорема экзистенциальности логически предельно трансцендентных объектов и классов (Ахвледиани А.Н. - 2011)</u>

Существует по крайней мере один предельно трансцендентный объект и класс. R-класс Рассела является предельно трансцендентным объектом и классом.

Таким образом, мы видим, что экзистенциальность R-класса является прямым следствием «Аксиомы пустого множества, что можно выразить в виде следующей теоремы.

<u>Теорема о достаточном условии генезиса логически предельно трансцендентных объектов (Ахвледиани А.Н. - 2011)</u>

Принятие «Аксиомы пустого множества» является достаточным условием генезиса логически предельно трансцендентных объектов и классов, одним из которых является R-класс Рассела .

Приведенные выше теоремы означают, что существование трансцендентных объектов и классов предопределяется «Аксиомой пустого множества» и не зависит от других аксиом теории множеств.

Докажем теперь следующее утверждение.

<u>Теорема о принадлежности R-класса Рассела универсальному U классу-множеству (Ахвледиани А.Н. – 2011)</u>

R - класс Рассела является элементом универсального U класса-множества.

$$R \in U \tag{33}$$

Доказательство

В соответствии с определениями множества и универсального класса U, класс U удовлетворяет определению множества, следовательно он является множеством. Нами также были доказаны утверждения о непустоте и конструктивном существовании R-класса Рассела. Поскольку по определению универсального класса, U - класс включает в себя все классы, как пустые так и непустые, то R- класс Рассела также является элементом универсального класса U. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь полученные результаты с позиций классической аристотелевской традиционной логики.

В соответствии с «Принципом доминирования материального критерия истинности», принятым в аристотелевской логике мы вынуждены признать, что в теории классов и множеств существует логически предельно трансцендентная формула (21), существует непустой логически предельно трансцендентный R- класс Рассела , который к тому же является элементом универсального класса-множества U. Это означает, что кроме аристотелевской логики существует, логически трансцендентная по отношению к классической аристотелевской логике, - *трансцендентная логика, логически инверсная по отношению к закону о непротиворечии и закону об исключенном третьем и вытекающая из основных понятий и аксиом теории классов и множеств*. Кроме этого из приведенных выше результатов прямо следует, что теория классов и множеств имеет логически предельно трансцендентную основу. Полученные в настоящей работе результаты и являются обоснованием логической трансцендентности теории классов и множеств.

Используемые источники:

1. **Википедия. Трансценденция (философия).**

2. **Вопенка П. Альтернативная теория множеств. Издательство Института математики. Новосибирск. 2004.**

3. **Маковельский А.О. История логики.**

12.КОНТР-АРГУМЕНТ К ТЕОРЕМЕ КАНТОРА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ КЛАССОВ И МНОЖЕСТВ

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе приведен контр-аргумент к «Теореме Кантора» для бесконечных классов и множеств. Показано, что в общем случае «Теорема Кантора» не является верной.

В теории множеств основополагающее значение имеет отношение принадлежности объекта объекту. Для его обозначения в теории множеств выбран символ $\in$. С использованием символов для обозначения объектов, факт принадлежности объекта X объекту Y выражается следующей формулой:

$$X \in Y \tag{1}$$

Наоборот, факт непринадлежности объекта X объекту Y выражается следующей формулой:

$$X \notin Y \tag{2}$$

Формула (1) читается следующим образом: объект X принадлежит объекту Y. Формула (2) читается следующим образом: объект X не принадлежит объекту Y.

В теории множеств для сокращенного символического обозначения языковых логических конструкций и их логической формализации применяются так называемые кванторы. Например $\exists$ - является квантором существования и применяется для обозначения существования тех или иных объектов.

Факт существования объекта X выражается следующим образом:

$$\exists X \tag{3}$$

Факт не существования объекта X выражается следующим образом:

$$\neg(\exists X) \tag{4}$$

Формула (3) читается следующим образом: существует объект X. Формула (4) читается следующим образом: не верно, что существует объект X, или, что то же самое – объекта X не существует.

Другим основным квантором теории множеств является квантор всеобщности, который обозначается $\forall$. Формула:

$$\forall X \tag{5}$$

означает – для всех объектов X .

Формула:

$$\neg(\forall X) \tag{6}$$

означает – не верно, что для всех объектов X .

В современных исследованиях по теории множеств имеется достаточно подробно разработанная классификация тех или иных объектов и классов. Приведем некоторые основные моменты упомянутой классификации по книге /1/ известного чешского специалиста по теории множеств – доктора П.Вопенки.

Пусть даны какие-либо уже созданные объекты и указан некоторый способ, с помощью которого можно выделить эти объекты среди остальных объектов. Упомянутый способ выделения объединяет эти объекты. Если на выделенные таким образом объекты можно смотреть, как на вполне равноправные, то говорят, что выделена *совокупность объектов*. Если же по условиям рассматриваемого вопроса необходимо признать за выделенными объектами различные позиции и не представляется возможным игнорировать то обстоятельство, что они имеют различные свойства, или вступают в различные отношения, то говорят, что *выделено сообщество объектов*.

Выделение группы объектов из совокупности других объектов происходит на основе задания так называемого характеристического свойства, которое представляет собой признак, по которому та или иная группа объектов выделяется из совокупности других объектов.

При определении некоторого класса на основе характеристического свойства $C(x)$ (характеристическое свойство может представлять собой также совокупность свойств, которым должны удовлетворять элементы определяемого класса) символьная запись определяемого класса имеет следующий вид:

$$Cls(Cx) = \{x : (\forall x)(C(x))\} \tag{7}$$

Одним из основных понятий теории классов является понятие пустого множества. Пустым множеством называется такой класс, который не содержит ни одного элемента. Пустое множество обозначается символом $\varnothing$. В теории классов пустое множество является аналогом арифметического 0 множества действительных чисел. По определению существует только одно пустое множество. Формула $A = \varnothing$ означает, что множество A не имеет ни одного элемента, что оно пусто, что оно «исчезает». Если не вводить понятия пустого множества, то при определении того или иного конкретного класса С пришлось бы часто делать оговорку: если он существует. Это происходит из-за того, что часто элементы класса определены так, что заранее бывает неизвестно, существуют они или нет. В аксиоматических теориях множеств, существование самого пустого множества утверждается специальной «Аксиомой пустого множества», которая в символьном виде имеет следующий вид:

$$(\exists x)(\forall y)(y \notin x) \tag{8}$$

Как правило, множество оказывается пустым, в том случае, когда характеристическое свойство множества - $C(x)$, определяющее совокупность элементов множества, является логически, математически или физически неосуществимым.

Необходимо отметить, что введение понятия пустого множества, и в особенности, связанной с ним «Аксиомы пустого множества», оказывает значительное воздействие на сами логические выводы, получаемые в рамках теории классов.

До создания теории множеств, в классическом математическом анализе, проблема существования или не существования тех или иных логических или математических объектов была тесно связана с непротиворечивостью или противоречивостью определяемых объектов в рамках классической аристотелевской традиционной логики. Исходя из основных законов аристотелевской логики, при построении той или иной математической теории, в нее включались и в ней *признавались существующими* только те объекты, непротиворечивость которых была установлена с достоверностью. Те же объекты, которые по своей логической или математической природе являлись противоречивыми, - исключались из дальнейшего рассмотрения в этой теории, т.е. признавались *не существующими в этой теории*.

С созданием теории множеств, и введения в нее понятия пустого множества совместно с «Аксиомой существования пустого множества», прежняя концепция существования или не существования тех или иных объектов в рамках той или иной математической теории кардинально изменилась. Ниже, для каждой аксиоматической теории множеств, содержащей «Аксиому пустого множеств», будет сформулирована и доказана теорема о существовании любого класса с наперед заданным характеристическим свойством.

<u>**Теорема экзистенциальности классов (Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)**</u>

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей «Аксиому пустого множества», существование пустого множества является достаточным условием для доказательства существование каждого класса, определяемого наперед заданным характеристическим свойством (или совокупностью свойств) $C(x)$.

Доказательство

Рассмотрим следующие случаи. Первый случай: характеристическое свойство $C(x)$ является логически, математически или физически неосуществимым. Тогда не существует ни одного элемента x , удовлетворяющего этому свойству. В этом случае класс со свойством $C(x)$ является пустым. Однако в силу «Аксиомы пустого множества» - (8), пустое множество существует. Это означает, что в рассматриваемом случае класс с свойством $C(x)$ хотя и является пустым , но тем не менее существует, как пустое множество.

Второй случай: характеристическое свойство $C(x)$ является осуществимым, т.е. существуют элементы x, удовлетворяющие характеристическому свойству $C(x)$. В этом случае, согласно (7), класс $Cls(Cx)$ является непустым, а следовательно - тем более существующим.

Из приведенного выше рассуждения следует, что в любом случае, невзирая на осуществимость или неосуществимость характеристического свойства $C(x)$, класс $Cls(Cx)$ существует или в виде непустого класса, или же в виде пустого множества. Это означает, что если с существованием класса $Cls(Cx)$ возникают противоречивые суждения, *то мы вынуждены признать также и факт их существования*. Это обстоятельство является неотъемлимым свойством каждой теории классов или теории множеств, *содержащей* «Аксиому пустого множества», и является прямым следствием принятия упомянутой аксиомы.

Определение множества

Множеством называется класс, удовлетворяющий следующему условию:

$$Set(Cx) = \{x : (\forall x)(C(x)) \wedge (\forall y(C(y) \oplus \neg C(y)\} \qquad (9)$$

Формула (9) означает, что множеством является такой класс, элементы которого удовлетворяют характеристическому свойству $C(x)$, и, кроме этого для каждого объекта y на основании закона об исключенном третьем можно решить, удовлетворяет ли он характеристическому свойству $C(x)$, либо нет. Этим самым осуществляется требование одного из основных законов классической традиционной аристотелевской логики – закона об исключенном третьем.

Таким образом мы видим, что понятие множества не принадлежит к числу самоочевидных понятий. При этом то или иное конкретное множество может обозначать сообщество объектов. Выдающийся чешский математик Бернард Больцано, который ввел понятие множества, должен был приложить немало усилий, чтобы объяснить читателю, что совокупность каких либо объектов, а тем более сообщество объектов, зачастую разнородных, можно представить себе, как самостоятельную сущность. Формула (9) позволяет рассматривать множества, как вполне определенные, логически четко выделенные классы.

Из приведенных выше рассуждений выявляется существенная разница между классами и их элементами. В зависимости от характеристического свойства класса, элементы класса могут и не существовать в качестве входящих в него объектов. Классы же существуют всегда, или в качестве непустого класса, или же в качестве пустого множества.

Перейдем теперь к определению универсального класса.

Определение универсального класса

Класс U называется универсальным, если каждый пустой или непустой класс или множество является его элементом.

Формальное определение универсального класса

$$U = Cls(u) = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\} \tag{10}$$

Формула (10) означает, что элементами универсального класса U являются, как пустое множество, так и любой непустой класс.

Первая теорема экзистенциальности универсального класса

(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей аксиому пустого множества, существование пустого множества является достаточным условием для доказательства существования универсального класса U .

$$\exists \varnothing \Rightarrow \exists U((U = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\})) \tag{11}$$

Доказательство

В соответствии с самим определением (10) универсального класса U, он содержит пустое множество в качестве элемента. Следовательно универсальный класс является непустым. В силу теоремы экзистенциальности классов, это обстоятельство означает существование универсального класса U . Теорема доказана.

Вторая теорема экзистенциальности универсального класса

(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей аксиому пустого множества, отрицание существования универсального класса U, влечет за собой отрицание существования пустого множества $\varnothing$. Следовательно универсальный класс U существует.

Доказательство

Доказательство приведенной выше теоремы опирается на логический закон контрапозиции. На основании справедливости формулы (11) и логического закона контрапозиции можно заключить:

$$(\exists\varnothing \Rightarrow \exists U((U = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\}))) \Leftrightarrow \\ (\neg\exists U((U = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\})) \Rightarrow \neg\exists\varnothing) \tag{12}$$

Из соотношения (12) непосредственно видно, что отрицание существования универсального класса, приводит к отрицанию пустого множества, а это противоречит «Аксиоме пустого множества». Следовательно универсальный класс U существует. Теорема доказана.

<u>Теорема экзистенциальности универсального множества</u>

<u>(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)</u>

Универсальный класс U является множеством.

Доказательство

Из теоремы экзистенциональности классов и формального определения (10) универсального класса U следует, что любой класс, определяемый некоторым характеристическим свойством $C(x)$, является элементом универсального класса U. Поэтому для универсального класса U выполняется формальное определение множества (9). Следовательно универсальный класс U является множеством.

Таким образом, вопреки широко распространенному мнению о не существовании универсального класса и множества, - в настоящей работе показано, что наоборот, - универсальный класс U существует и является множеством.

Одной из первых основных аксиом теории классов и множеств является «Аксиома экстенсиональности», определяющая отношение равенства между двумя классами или множествами. Ниже приведена ее формулировка.

<u>Аксиома экстенсиональности</u>

Пустое множество $\varnothing$ равно самому себе. Два непустых множества $Set(x)$ и $Set(y)$ равны друг другу в том и только в том случае, если для них выполняется сотношение:

$$(Set(x) = Set(y)) \Leftrightarrow (\forall z : (z \in Set(x)) \Leftrightarrow z \in Set(y)) \tag{13}$$

Одним из основных понятий в теории классов и множеств является понятие равномощности классов и множеств. Имеет место следующее определение.

Определение равномощности двух классов или множеств

Пустое множество равномощно себе. Два равных класса или множества равномощны друг другу. Два различных непустых класса или множества X, Y называются равномощными, если для них существует функция F , обеспечивающая взаимнооднозначное отображение X на Y:

$$Y = F(X) \tag{14}$$

Определение кардинального числа

Мощность конечного или бесконечного класса или множества называется кардинальным числом этого множества. Для конечных множеств, кардинальное число совпадает с числом элементов множества. Кардинальное число пустого множества $\varnothing$ равно 0. Кардинальное число непустого бесконечного класса или множества является бесконечно большой величиной.

Для мощности (кардинального числа) класса или множества Y принято следующее обозначение:

$$CardY = |Y| \tag{15}$$

Одной из важных аксиом в теории множеств является так называемая «Аксиома степени», формулировка которой приведена ниже.

Аксиома степени

Для каждого множества X существует множество Y, являющееся множеством всех подмножеств множества X :

$$\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \Leftrightarrow z \subseteq X) \tag{16}$$

Множество или класс Y, являющееся множеством (классом) всех подмножеств (подклассов) множества или класса X , обозначается следующим образом:

$$Y = P(X) \tag{17}$$

Одним из ключевых моментов в логическом развитии основ теории классов и множеств представляет собой логически корректное решение вопроса – является ли пустое множество $\varnothing$ подмножеством непустого класса Z. Этот вопрос мы будем рассматривать на основании логически корректного формального определения понятия подмножества, данного в работе /2/.

<u>Определение понятия подмножества</u>

Класс или множество X называется подклассом или подмножеством класса или множества Z тогда и только тогда, когда не существует ни одного такого элемента X, который не являлся бы элементом Z, или формально:

$$(X \subseteq Z) \Leftrightarrow \neg(\exists x : (x \in X \wedge x \notin Z)) \tag{18}$$

Пустое множество $\varnothing$ равно самому себе и является своим собственным подмножеством. Рассмотрим теперь тот случай, когда имеется пустое множество и непустой класс или множество Z. Подставим приведенные выше символы в соотношение (18) и произведем истинностную оценку полученной формулы:

$$[(\varnothing \subseteq Z) \Leftrightarrow \neg(\exists x : (x \in \varnothing \wedge x \notin Z))] \equiv 1 \tag{19}$$

Из соотношения (19) следует, что для классов или множеств $\varnothing$ и Z - соотношение (18) выполняется. Следовательно имеет место соотношение:

$$\varnothing \subseteq Z \tag{20}$$

Таким образом мы видим, что вне канторовской теории множеств существует такое формально-логически корректное определение подмножества, которое позволяет считать пустое множество $\varnothing$, - подмножеством каждого пустого или непустого класса или множества Z.

Рассмотрим теперь характер отношения эквивалентности или неэквивалентности между универсальным классом-множеством U и множеством всех его подмножеств $P(U)$. Рассмотрим следующее определение.

<u>Определение сингулярного кардинального числа и сингулярного класса</u>

Кардинальное число $SCardX$ класса или множества X, называется сингулярным в том, и только в том случае, если выполняется соотношение:

$$SCardX = CardX = CardP(X) = |X| = |P(X)| \tag{21}$$

где $P(X)$ - множество всех подмножеств класса или множества. Класс или множество, имеющее сингулярное кардинальное число,также называется сингулярным

Докажем следующее утверждение.

Теорема о сингулярном множестве и сингулярном кардинальном числе

(Ахвледиани А.Н. – 2011)

Существует по крайней мере одно бесконечное непустое сингулярное множество, имеющее сингулярное кардинальное число. Универсальный класс-множество U является сингулярным.

Доказательство

Рассмотрим универсальный класс-множество U и множество его подмножеств $P(U)$. В соответствии с определением (10), каждый элемент класса $P(U)$ одновременно принадлежит и U. Поэтому имеет место соотношение:

$$(\forall x : x \in P(U) \Rightarrow x \in U) \Rightarrow (P(U) \subseteq U) \qquad (22)$$

В соответствии с определением (10) универсальный класс содержит в качестве элементов все классы, как пустой класс, так и каждый непустой, конечный или бесконечный. Поэтому каждый класс X, принадлежащий классу U, является его подмножеством и вследствие этого одновременно является элементом класса $P(U)$ т.е. имеет место соотношение:

$$(\forall X : (X \in U \Rightarrow X \subseteq U) \Rightarrow (X \in P(U)) \Rightarrow (U \subseteq P(U)) \qquad (23)$$

Из сопоставления соотношений (22) и (23) и «Аксиомы экстенсиональности» следует:

$$U = P(U) \qquad (24)$$

Из соотношения (24) следует:

$$CardU = CardP(U) = SCardU = SCardP(U) = |U| = |P(U)| \qquad (25)$$

Соотношение (25) доказывает выдвинутую гипотезу о существовании бесконечного сингулярного множества и сингулярного кардинального числа. Теорема доказана.

Перейдем теперь к «Теореме Кантора», которая формулируется следующим образом.

Теорема Кантора

Любое множество менее мощно, чем множество всех его подмножеств.

Как уже было доказано прежде, универсальный класс U является сингулярным множеством, обладающим свойством равенства и равномощности множеству всех его подмножеств. Из этого обстоятельства прямо следует, что в общем случае «Теорема Кантора» не является верной.

Используемые источники:

1. **Вопенка П. Альтернативная теория множеств. Новый взгляд на бесконечность (стр.49-51). Новосибирск. Издательство Института математики. 2004 г.**

2. **Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика.(стр.135). МЦНМО. 2000.**

13.ЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ «ТЕОРЕМЫ КАНТОРА»

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе приведен логический анализ «Теоремы Кантора» для бесконечных классов и множеств. Показано, что в случае сингулярного множества U «Теорема Кантора» не является верной.

Рассмотрение логических свойств «Теоремы Кантора» о мощности всех подмножеств данного множества предварим некоторыми основными положениями теории множеств. Одной из первых основных аксиом теории множеств является «Аксиома экстенсиональности», содержание которой приведено ниже в соответствии с /1/.

<u>Аксиома экстенсиональности</u>

Любое множество однозначно определяется своими элементами. Для равенства двух непустых множеств необходимо и достаточно, чтобы элементы каждого из них, были элементами и другого. Пустое множество равно самому себе.

$$\forall X, Y(\forall z(z \in X \Leftrightarrow z \in Y) \Rightarrow X = Y) \tag{1}$$

В теории множеств рассматривают, как конечные, так и бесконечные множества. Преимущественное внимание уделяется рассмотрению бесконечных множеств. Среди конечных множеств выделяют также такие множества, которые содержат единственный элемент $\{a\}$. Если объект a является пустым множеством, то рассматривают также множество $\{\varnothing\}$, единственным элементом которого является пустое множество $\varnothing$.

Одной из наиболее важных акиом теории множеств является «Аксиома степени». Приведем ее формулировку в соответствии с /1/.

Аксиома степени

Для каждого множества X существует множество Y, являющееся множеством всех подмножеств множества X:

$$\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \Leftrightarrow z \subseteq X) \tag{2}$$

Приведем некоторые базовые положения теории множеств, связанные с различием конечных и бесконечных множеств, а также с понятиями соответствия и эквивалентности множеств.

Рассмотрим сперва множество всех целых положительных чисел в десятичной системе счисления с присоединенным к нему особым числом, называемым нулем 0.

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{3}$$

Из множества (3) можно выделить множество натуральных чисел или натуральный ряд, который имеет следующий вид:

$$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{4}$$

Необходимо отметить, что вопрос принадлежности 0 множеству натуральных чисел является неоднозначным, весьма нетривиальным и спорным. Поскольку 0 обладает особыми логико-аналитическими свойствами в теории действительных и комплексных чисел, мы в дальнейшем не будем причислять 0 к множеству натуральных чисел. С другой стороны без 0 невозможна запись натуральных чисел в десятичной системе счисления. Исходя из вышесказанного, мы будем рассматривать множество (3) целых положительных чисел с присоединенным к нему 0, как базовое, и выделим из него множество натуральных чисел (4).

Понятие соответствия относится к основным понятиям теории множеств. Говорят, что между двумя множествами установлено соответствие, если определено правило, по которому для каждого элемента одного множества выбирается определенный элемент другого множества. На основе понятия соответствия между множествами, вводится также понятие отображения множеств. При этом различают понятия отображения «множества в множество», и отображения «множества на множество.

Определение понятия отображения множества в множество

Соответствие, при котором каждому элементу непустого множества X отвечает единственный элемент непустого множества Y, называется отображением множества X в множество Y.

Определение понятия отображения множества на множество

Соответствие, при котором каждому элементу непустого множества X отвечает единственный элемент непустого множества Y, и кроме того, каждому элементу множества Y отвечает хотя бы один элемент множества X называется отображением множества X на множество Y.

Отображения множеств обычно обозначают буквами $f, g, h.....$ Если при отображении f элементу $x \in X$, соответствует элемент $y \in Y$, то элемент y называют образом элемента x, а элемент x называют прообразом элемента y и пишут:

$$y = f(x) \tag{5}$$

Множество всех прообразов элемента y называют его полным прообразом. В случае отображения множества X на множество Y пишут также:

$$Y = f(X) \tag{6}$$

Отображение $f : X \to Y$ называется инъективным, если разные элементы множества X имеют различные образы.

Определение эквивалентности множеств

Отображение множества X *на множество* Y называется взаимно однозначным, если разным элементам множества X, соответствуют разные элементы множества Y. Если множество X взаимнооднозначно отображается на множество Y, то множества X и Y называются множественно эквивалентными, что выражается следующим образом /2/:

$$X \cong Y \tag{7}$$

Определение отрезка натурального ряда

Множество всех натуральных чисел, меньших или равных некоторому натуральному числу n, называется отрезком натурального ряда. Отрезок натурального ряда обозначается как $|1,n|$. В частном случае имеем $|1,1|$.

Определение конечного множества и класса

Множество или класс, эквивалентные отрезку натурального ряда, называются конечными множествами.

Определение бесконечного множества и класса

Множество или класс, не являющиеся эквивалентными никакому отрезку натурального ряда называются бесконечными.

Определение мощности конечного множества и класса

Мощностью конечного множества или класса называется количество его элементов n.

Определение равномощности конечных множеств и классов

Два конечных множества или класса являются равномощными тогда и только тогда, когда количество их элементов выражается одним и тем же натуральным числом n.

Определение равномощности бесконечных множеств и класов

Два множественно эквивалентные друг другу бесконечные множества (или классы) называются равномощными.

Определение общего порядкового кардинального числа для бесконечных множеств и классов

Если два бесконечных множества или класса множественно эквивалентны, то говорят, что они имеют бесконечное общее порядковое кардинальное число (бесконечный порядковый кардинал).

Последнее определение нуждается в пояснении. Необходимо отметить, что имеются существенные логические различия в логической природе мощностей конечных и бесконечных множеств и классов. Мощность заданного конечного множества является постоянным конечным натуральным числом, в то время как бесконечный порядковый кардинал определяется в результате установления порядка взаимнооднозначного соответствия между двумя бесконечными множествами и классами. Вследствие этого обстоятельства аналитическое выражение бесконечного порядкового кардинала может *существенно зависеть от характера и свойств рассматриваемого соответствия*.

В теории множеств и классическом математическом анализе исследование бесконечности осуществляется с помощью бесконечных величин, которые являются носителями свойств, как актуальной так и потенциальной бесконечности. Бесконечные порядковые кардиналы выражают актуально-бесконечный характер бесконечного множества. Но одновременно с этим в классическом математическом анализе существует понятие бесконечно большой величины (которая выражает свойство бесконечного количества), логико-аналитический характер которой раскрывает приводимое ниже определение.

Определение бесконечно большой величины

Переменная $s(n)$ называется бесконечно большой, если она для достаточно больших натуральных значений n становится, и остается по абсолютной величине большей сколь угодно большого наперед заданного числа $E > 0$:

$$|s(n)| > E, (n > N_0) \tag{8}$$

Необходимо подчеркнуть, что в приведенном выше определении мы имеем дело с переменной величиной, которая лишь в процессе своего изменения может сделаться большей сколь угодно большого произвольно взятого числа $E > 0$.

Бесконечно большая величина характеризуется стремлением к бесконечности:

$$|s(n)| \to \infty \tag{9}$$

С целью логического распространения количественного характера мощности конечных множеств на бесконечные множества примем следующее определение.

Определение количественного кардинального числа для бесконечных множеств и классов

Количественным кардинальным числом бесконечного множества или класса, количество элементов которого выражается натуральной функцией $|c(n)|$ натурального аргумента n, стремящаяся к бесконечности при стремлении $n \to \infty$, называется бесконечно большая величина

$$C_n = |c(n)| (n \to \infty)$$

Необходимо отметить, что количественные и порядковые кардинальные числа имеют различную логико-аналитическую природу. Первые из них выражают бесконечное количество, а вторые – отношения порядка для двух или более бесконечных множеств или классов.

В классическом математическом анализе бесконечные количественные кардинальные числа называют «несобственными числами».

Первой, из так называемых элементарных бесконечных мощностей, в классической теории множеств рассматривается мощность всех натуральных чисел. Кардинальное число множества всех натуральных чисел обозначается как $\aleph_0$ (алеф-нуль, алеф – первая буква ивритского алфавита). Согласно /3/ - $\aleph_0$ выражается следующим соотношением:

$$\aleph_0 = 1+1+1+1+\ldots\ldots\ldots \qquad (10)$$

Таким образом, с одной стороны $\aleph_0$ является количественным кардинальным числом. В соответствии с классическим математическим анализом, формула (10) означает, что $\aleph_0$ является бесконечной суммой бесконечного ряда единиц и является по терминологии канторовской теории множеств $\aleph_0$ является *первым трансфинитным числом*.

С другой стороны, в соответствии с классической канторовской теорией множеств, $\aleph_0$ является порядковым кардинальным числом. Если некоторое бесконечное множество взаимнооднозначно отображается на множество натуральных чисел, то говорят, что это множество счетно, равномощно множеству натуральных чисел и имеет порядковое кардинальное число $\aleph_0$, или что то же самое - мощность $\aleph_0$.

Если X множество, то множество, являющееся множеством его подмножеств обозначается как $P(X)$. Мощность множества X обозначается $|X|$, мощность множества $P(X)$ обозначается через $|P(X)|$.

Перейдем к рассмотрению «Теоремы Кантора» /4/. Красным цветом выделены фрагменты доказательства, на которые следует обратить самое пристальное внимание при анализе логических свойств доказательства «Теоремы Кантора».

Теорема Кантора

Любое множество менее мощно, чем множество всех его подмножеств.

Доказательство

Допустим, что существует множество A, равномощное множеству всех его подмножеств $P(A)$. ***Тогда существует взаимнооднозначное соответствие (биекция)*** f, ***ставящая в соответствие каждому элементу*** множества A, некоторое его подмножество Y, что может быть выражено в следующем виде:

$$\exists A \exists C \exists f \exists Y \forall C (C \in A) \exists Y : \left(Y = f(C)\right) \wedge (Y \subseteq A) \qquad (11)$$

(*Обратим внимание на существенную деталь. Прежде чем перейти к дальнейшему доказательству,необходимо удостоверится в существовании объектов, перечисленных в соотношении* (11), *и удостоверится для рассматриваемых классов в существовании хотя бы одного отображения*, из класса отображений, определяемых соотношением (11). *Однако в стандартных версиях доказательства «Теоремы Кантора» эта формула отсутствует вовсе. Тем более, как правило не рассматривается и вопрос существования подобных отображений).*

Рассмотрим множество B, удовлетворяющее соотношению :

$$B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin f(x))\} \tag{12}$$

(В формуле (12) *не доказано существование объектов* x, *удовлетворяющих сформулированному характеристическому свойству, поскольку не приведена реальная структура взаимнооднозначного соответствия между множествами* A *и* $P(A)$. *В классической аристотелевской традиционной логике это характеризуется как логическая ошибка «petitio principii» - «предвосхищение основания»)*

f биективно, а для B выполняется соотношение:

$$B \subseteq A \tag{13}$$

Поэтому существует такой объект y , ***для которого***:

$$(y \in A) \wedge (f(y) = B) \tag{14}$$

(В (14) *также содержится «petitio principii», поскольку не доказано существование объекта* y *).*

Теперь посмотрим, может ли y принадлежать B.

Если $y \in B$, то в соответствии с (12) - $y \in A$, поэтому в соответствии с (12) :

$$y \notin f(y) \tag{15}$$

С другой стороны в соответствии с (11), поскольку $y \in A$, то существует Y для которого

$$Y = f(y) \tag{16}$$

Из сопоставления (15) и (16) следует:

$$y \notin Y \tag{17}$$

Из сопоставления (11) и (17) следует:

$$y \notin f(C) \tag{18}$$

Из сопоставления сотношений (11), (12), (14), (17), (18) следует, что объект $y \in A$, определяемый соотношением (14), не принадлежит взаимнооднозначному соответствию, определяемому соотношением (11). Это означает, что из сделанного допущения $y \in B$, в рассматриваемом случае мы пришли к противоречию с исходным предположением о существовании взаимнооднозначного соответствия между множеством A и множеством всех его подмножеств $P(A)$.

Рассмотрим теперь вторую возможность, а именно:

$$y \notin B \tag{19}$$

Тогда из сопоставления (14) и (19) следует:

$$y \notin f(y) \tag{20}$$

Из сопоставления соотношений (14) и (20) следует:

$$(y \in A) \wedge (y \notin f(y)) \tag{21}$$

Из сопоставления сотношений (12) и (21) следует:

$$y \in B \tag{22}$$

Очевидно, что полученное соотношение (22) противоречит соотношению (19) . Таким образом и в этом рассматриваемом случае мы пришли к другому противоречию, а именно из предположения (19) мы пришли к его отрицанию (22). Именно к такому двойному противоречию и приходят при стандартном доказательстве «Теоремы Кантора».

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса, - является ли «Теорема Кантора» верной в общем случае. Критерием истинности в этом вопросе, с точки зрения классической аристотелевской традиционной логики, в данном случае служит следующее правило опровержения, формулировка которого приведена ниже.

Правило опровержения

Если истинность некоторого суждения утверждается для всех возможных случаев из числа рассматриваемых, и тем самым содержит логический квантор всеобщности по отношению к всем случаям из числа рассматриваемых, то для его истинного опровержения достаточно найти хотя бы один случай из числа рассматриваемых, для которого упомянутое суждение является ложным.

Для адекватного решения вопроса об истинности «Теоремы Кантора» в первую очередь необходимо уточнить определение понятия множества. Это можно сделать с помощью определения, предложенного в /5/.

Определение множества

Множеством называется класс, удовлетворяющий следующему условию:

$$Set(Cx) = \{x : (\forall x)(C(x)) \wedge (\forall y(C(y) \oplus \neg C(y)\} \tag{23}$$

Формула (23) означает, что множеством является такой класс, элементы которого удовлетворяют характеристическому свойству $C(x)$, и, кроме этого для каждого объекта y на основании закона об исключенном третьем можно решить, удовлетворяет ли он характеристическому свойству $C(x)$, либо нет. Этим самым осуществляется требование одного из основных законов классической традиционной аристотелевской логики – закона об исключенном третьем.

Одной из основных аксиом теории множеств является «Аксиома пустого множества» постулирующая существование пустого множества.

Аксиома пустого множества

Существует множество не содержащее ни одного элемента.

$$(\exists x)(\forall y)(y \notin x) \tag{24}$$

Из приведенных выше рассуждений выявляется существенная разница между классами и их элементами. В зависимости от характеристического свойства класса, элементы класса могут и не существовать в качестве входящих в него объектов. Классы же существуют всегда, или в качестве непустого класса, или же в качестве пустого множества.

Перейдем теперь к определению универсального класса.

Определение универсального класса

Класс U называется универсальным, если каждый пустой или непустой класс или множество является его элементом.

Формальное определение универсального класса

$$U = Cls(u) = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\} \tag{25}$$

Формула (25) означает, что элементами универсального класса U являются, как пустое множество, так и любой непустой класс.

Первая теорема экзистенциальности универсального класса

(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей аксиому пустого множества, существование пустого множества является достаточным условием для доказательства существования универсального класса U .

$$\exists\varnothing \Rightarrow \exists U((U = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\})) \tag{26}$$

Доказательство

В соответствии с самим определением (25) универсального класса U, он содержит пустое множество в качестве элемента. Следовательно универсальный класс является непустым. В силу теоремы экзистенциальности классов, это обстоятельство означает существование универсального класса U . Теорема доказана.

Вторая теорема экзистенциальности универсального класса

(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей аксиому пустого множества, отрицание существования универсального класса U, влечет за собой отрицание существования пустого множества $\varnothing$. Следовательно универсальный класс U существует.

Доказательство

Доказательство приведенной выше теоремы опирается на логический закон контрапозиции. На основании справедливости формулы (26) и логического закона контрапозиции можно заключить:

$$\begin{gathered}(\exists\varnothing \Rightarrow \exists U((U = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\})) \Leftrightarrow \\ (\neg\exists U((U = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\})) \Rightarrow \neg\exists\varnothing)\end{gathered} \tag{27}$$

Из соотношения (27) непосредственно видно, что отрицание существования универсального класса, приводит к отрицанию пустого множества, а это противоречит

«Аксиоме пустого множества». Следовательно универсальный класс U существует. Теорема доказана.

Приведем определение для понятия класса.

<u>Определение понятия класса</u>

Классом называется группа объектов, выделенная из совокупности других объектов на основе задания так называемого характеристического свойства $C(x)$, которое представляет собой признак, по которому та или иная группа объектов выделяется из совокупности других объектов.

При определении некоторого класса $Cls(Cx)$ на основе характеристического свойства $C(x)$ (характеристическое свойство может представлять собой также совокупность свойств, которым должны удовлетворять элементы определяемого класса) символьная запись определяемого класса имеет следующий вид:

$$Cls(Cx) = \{x : (\forall x)(C(x))\} \tag{28}$$

В общем случае имеет место теорема экзистенциальности классов.

<u>Теорема экзистенциальности классов (Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)</u>

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей «Аксиому пустого множества», существование пустого множества $\varnothing$ является достаточным условием для доказательства существование каждого класса, определяемого наперед заданным характеристическим свойством (или совокупностью свойств) $C(x)$.

Доказательство

Рассмотрим следующие случаи. Первый случай: характеристическое свойство $C(x)$ является логически, математически или физически неосуществимым. Тогда не существует ни одного элемента x , удовлетворяющего этому свойству. В этом случае класс со свойством $C(x)$ является пустым. Однако в силу «Аксиомы пустого множества» - (24), пустое множество существует. Это означает, что в рассматриваемом случае класс с свойством $C(x)$ хотя и является пустым , но тем не менее существует, как пустое множество.

Второй случай: характеристическое свойство $C(x)$ является осуществимым, т.е. существуют элементы x, удовлетворяющие характеристическому свойству $C(x)$. В этом случае, согласно (24) и (28), класс $Cls(Cx)$ является непустым, а следовательно - тем более существующим.

Из приведенного выше рассуждения следует, что в любом случае, невзирая на осуществимость или неосуществимость характеристического свойства $C(x)$, класс $Cls(Cx)$ существует или в виде непустого класса, или же в виде пустого множества. Это означает, что если с существованием класса $Cls(Cx)$ возникают противоречивые суждения, *то мы вынуждены признать также и факт их существования*. Это обстоятельство является неотъемлимым свойством каждой теории классов или теории множеств, *содержащей* «Аксиому пустого множества», и является прямым следствием принятия упомянутой аксиомы.

Теорема экзистенциальности универсального множества

(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)

Универсальный класс U является множеством.

Доказательство

Из «Теоремы экзистенциональности классов» и формального определения (25) универсального класса U следует, что любой класс, определяемый некоторым характеристическим свойством $C(x)$, является элементом универсального класса U. Поэтому для универсального класса U выполняется формальное определение множества (23). Следовательно универсальный класс U является множеством.

Таким образом, вопреки широко распространенному мнению о не существовании универсального класса и множества, - в настоящей работе показано, что наоборот, - универсальный класс U существует и является множеством.

Определение равномощности двух классов или множеств

Пустое множество равномощно себе. Два равных класса или множества равномощны друг другу. Два различных непустых класса или множества X,Y называются равномощными, если для них существует функция F, обеспечивающая взаимнооднозначное отображение X на Y:

$$Y = F(X) \tag{29}$$

Определение кардинального числа

Мощность конечного или бесконечного класса или множества называется кардинальным числом этого множества. Для конечных множеств, кардинальное число совпадает с числом элементов множества. Кардинальное число пустого множества $\varnothing$ считается равным 0. Кардинальное число непустого бесконечного класса или множества является бесконечно большой величиной.

Для мощности (кардинального числа) класса или множества Y принято следующее обозначение:

$$CardY = |Y| \tag{30}$$

Множество или класс Y, являющееся множеством (классом) всех подмножеств (подклассов) множества или класса X, обозначается следующим образом:

$$Y = P(X) \tag{31}$$

Одним из ключевых моментов в логическом развитии основ теории классов и множеств представляет собой логически корректное решение вопроса – является ли пустое множество $\varnothing$ подмножеством непустого класса Z. Этот вопрос мы будем рассматривать на основании логически корректного формального определения понятия подмножества, данного в работе /6/.

<u>Определение понятия подмножества и подкласса</u>

Класс или множество X называется подклассом или подмножеством класса или множества Z тогда и только тогда, когда не существует ни одного такого элемента X, который не являлся бы элементом Z, или формально:

$$(X \subseteq Z) \Leftrightarrow \neg(\exists x : (x \in X \wedge x \notin Z)) \tag{32}$$

Пустое множество $\varnothing$ равно самому себе и является своим собственным подмножеством. Рассмотрим теперь тот случай, когда имеется пустое множество и непустой класс или множество Z. Подставим приведенные выше символы в соотношение (32) и произведем истинностную оценку полученной формулы:

$$[(\varnothing \subseteq Z) \Leftrightarrow \neg(\exists x : (x \in \varnothing \wedge x \notin Z))] \equiv 1 \tag{33}$$

Из соотношения (33) следует, что для классов или множеств $\varnothing$ и Z - соотношение (32) выполняется. Следовательно имеет место соотношение:

$$\varnothing \subseteq Z \tag{34}$$

Таким образом мы видим, что существует такое формально-логически корректное определение подмножества, которое позволяет считать пустое множество $\varnothing$, - подмножеством каждого пустого или непустого класса или множества Z.

Рассмотрим теперь характер отношения эквивалентности или неэквивалентности между универсальным классом-множеством U и множеством всех его подмножеств $P(U)$. Рассмотрим следующее определение.

<u>Определение сингулярного кардинального числа и сингулярного класса</u>

Кардинальное число $SCardX$ класса или множества X, называется сингулярным в том, и только в том случае, если выполняется соотношение:

$$SCardX = CardX = CardP(X) = |X| = |P(X)| \tag{35}$$

где $P(X)$ - множество всех подмножеств класса или множества. Класс или множество, имеющее сингулярное кардинальное число,- называется сингулярным

Докажем следующее утверждение.

<u>Теорема о сингулярном множестве и сингулярном кардинальном числе</u>

<u>(Ахвледиани А.Н. – 2011)</u>

Существует по крайней мере одно бесконечное непустое сингулярное множество, имеющее сингулярное кардинальное число. Универсальный класс-множество U является

сингулярным.

Доказательство

Рассмотрим универсальный класс-множество U и множество его подмножеств $P(U)$. В соответствии с определением (25), каждый элемент класса $P(U)$ одновременно принадлежит и U. Поэтому имеет место соотношение:

$$(\forall x : x \in P(U) \Rightarrow x \in U) \Rightarrow (P(U) \subseteq U) \tag{36}$$

В соответствии с определением (25) универсальный класс содержит в качестве элементов все классы, как пустой класс, так и каждый непустой, конечный или бесконечный. Поэтому каждый класс X, принадлежащий классу U, является его подмножеством и вследствие этого одновременно является элементом класса $P(U)$ т.е. имеет место соотношение:

$$(\forall X : (X \in U \Rightarrow X \subseteq U) \Rightarrow (X \in P(U)) \Rightarrow (U \subseteq P(U)) \tag{37}$$

Из сопоставления соотношений (36) и (37) и «Аксиомы экстенсиональности» следует:

$$U = P(U) \tag{38}$$

Из соотношения (38) следует:

$$CardU = CardP(U) = SCardU = SCardP(U) = |U| = |P(U)| \tag{39}$$

Соотношение (39) доказывает выдвинутую гипотезу о существовании бесконечного сингулярного множества и сингулярного кардинального числа. Теорема доказана.

Таким образом мы видим, что U - является сингулярным классом-множеством, равным и равномощным множеству всех своих подмножеств $P(U)$. Кроме этого,для утверждения об эквивалентности сингулярных множеств U и $P(U)$ нам не понадобилось строить множественную эквиваленцию между ними, поскольку вопрос об их эквивалентности разрешился непосредственно, путем установления равенства между ними. Равенство и равномощность множеств U и $P(U)$ и является контр-примером, опровергающим «Теорему Кантора». Таким образом, в общем случае – «Теорема Кантора» не является верной.

Тем не менее, представляет определенный интерес рассмотрение логических особенностей доказательства «Теоремы Кантора» с учетом полученных нами результатов. Возвращаясь к рассмотренному нами доказательству «Теоремы Кантора» мы видим, что с учетом полученных нами результатов, формула (12) в случае сингулярного универсального класса-множества U, содержит *«petitio principii»*, которое перерастает в *«error fundamentalis» (ложное основное положение в доказательстве)*, которое заключается в том, что в случае универсального класса U, элемента x не существует вовсе, поскольку для универсального класса U, каждый его элемент принадлежит и $P(U) = U$. В этом случае, множество B оказывается пустым:

$$B = \varnothing \tag{40}$$

Что же касается формулы (14), то в случае универсального класса $U = P(U)$, мы имеем отображение класса $U = P(U)$ - на себя самого, причем это отображение является одновременно эквиваленцией. Поэтому вместо соотношения (14), мы будем иметь:

$$(y \in U) \wedge (f(y) = y) \tag{41}$$

В том случае, когда $y = \varnothing$, будем иметь:

$$(\varnothing \in U) \wedge (f(\varnothing) = \varnothing) \tag{42}$$

В этом случае формула (14) выполняется.

Однако в том случае, когда $y \neq \varnothing$, то мы имеем:

$$y = f(y) \neq \varnothing \tag{43}$$

В этом случае справедлива формула (41), а формула (14) – принимает вид:

$$(y \in U) \wedge (f(y) = \varnothing) \quad (44)$$

Мы видим, что в рассматриваемом случае формула (44) содержит подформулу, несовместную с истинным соотношением (43). Таким образом можно заключить, что именно формулы (12) и (14) стандартного доказательства «Теоремы Кантора» содержат *«petitio principii»(«предвосхищение основания»)* и являются источниками возникновения серьезных логических проблем, возникающих в связи с доказательством и дальнейшим применением «Теоремы Кантора».

Используемые источники:

1. **Коэн П.Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. (стр.89,93). URSS. Москва 2009 .**

2. **Вопенка П. Альтернативная теория множеств, новый взгляд на бесконечность. (стр.91). Новосибирск. Издательство Института математики. 2004.**

3. **Хаусдорф Ф. Теория множеств.(стр.30). URSS. Москва. 2007.**

4. **Википедия. «Теорема Кантора».**

5. **Ахвледиани А.Н. Теорема экзистенциальности универсального класса. Энциклопедический фонд Russika.2011.**

6. **Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика.(стр.135). МЦНМО. 2000.**

14.ЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ «ПАРАДОКСА КАНТОРА»

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе приведен логический анализ «Парадокса Кантора». Показано, что данный парадокс возникает из-за того. Что в общем случае «Теорема Кантора» не является верной.

В теории множеств «Парадокс Кантора» наряду с « Теоремой Кантора» играет важную роль в дальнейших логико-аналитических построениях. Как известно, теорема Кантора формулируется следующим образом.

<u>Теорема Кантора</u>

Любое множество менее мощно, чем множество всех его подмножеств.

В работе /1/ было показано, что в случае сингулярного универсального класса-множества U «Теорема Кантора» не является верной. А именно, имеет место следующее утверждение, - универсальный сингулярный класс-множество U, является равным и равномощным множеству всех своих подмножеств $P(U)$, что формально выражается следующим соотношением в кардинальных числах /1/:

$$CardU = CardP(U) = SCardU = SCardP(U) = \left|U\right| = \left|P(U)\right| \quad (1)$$

Как будет показано далее, это обстоятельство позволяет разрешить так называемый «Парадокс Кантора» , суть которого изложена ниже в соответствии с /2/, с добавленными нашими комментариями, выделенными курсивом. Фрагменты логического анализа, на которые надо обратить пристальное внимание при исследовании логической природы «Парадокса Кантора», и которые в конечном счете и приводят к парадоксу, выделены красным цветом.

<u>Парадокс Кантора</u>

Предположим, что класс всех самотождественных множеств существует и выражается соотношением:

$$V = \{x : x = x\} \quad (2)$$

(Обратим внимание на то обстоятельство, что согласно (2)*, класс* V *является классом всех самотождественных множеств)*.

В этом случае для множеств x и $t \neq \varnothing$, удовлетворяющих (2), справедливо следующее соотношение:

$$\forall x \forall t (x \in t \Rightarrow x \in V) \qquad (3)$$

Соотношение (3) означает, что t является подмножеством множества V .

$$t \subseteq V \qquad (4)$$

Из (4) следует:

$$\forall t : |t| \leq |V| \qquad (5)$$

(5) означает, что мощность множества t не превышает мощности множества V :

Но в силу аксиомы степени, для множества V , как и для всякого множества существует множество всех его подмножеств $P(V)$, ***и по теореме Кантора:***

$$|P(V)| > |V| \qquad (6)$$

Соотношение (6) вступает в противоречие с соотношением (5). ***Следовательно сделанное предположение неверно и множества*** V ***не существует.***

Однако, как упоминалось выше, в работе /1/ было показано, что «Теорема Кантора» не является верной в случае универсального класса-множества U . Это означает, что соотношение (6) в общем случае не имеет места. Таким образом, именно то обстоятельство, что «Теорема Кантора» в общем случае не является верной и является одной из причин возникновения «Парадокса Кантора. Кроме этого в силу справедливости соотношений (3) и (4), - соотношение (5) является безусловно верным и его отрицание является логически недоказуемым.

Рассмотрим вопрос, насколько возможно в принципе, в рамках аристотелевской классической традиционной логики отвергать существование класса V всех самотождественных множеств. С этой целью обратимся к книге /3/ известного чешского специалиста по теории множеств – доктора П.Вопенки.

«Уяснение самотождественности какого либо явления, т.е. понимание того, что в разных обстоятельствах мы имеем дело с тем же самым явлением, принадлежит к наиболее примечательным, но и трудно определимым способностям нашего восприятия. В нашем мировосприятии понимание самотождественности играет ключевую роль.

Этот принцип тождества сообщает членораздельность нашему знанию о мире, что дает возможность вычленить из него некую прочную структуру, на которую можно опираться в дальнейших исследованиях».

Таким образом мы видим, что понятие самотождественности играет ключевую роль в основаниях теории множеств. Это обстоятельство согласуется и с первым законом классической аристотелевской традиционной логики – законом тождества. Это означает, что отрицание существования всего класса самотождественных множеств является логически невозможным с точки зрения классической традиционной аристотелевской логики.

Используемые источники:

1. **Ахвледиани А.Н. Логический анализ «Теоремы Кантора».Энциклопедический фонд Russika. 2011.**
2. **Википедия. «Парадокс Кантора».**
3. **Вопенка П. Альтернативная теория множеств, новый взгляд на бесконечность. (стр.38). Новосибирск. Издательство Института математики. 2004.**

15.ТЕОРЕМЫ О ЛОГИЧЕСКОЙ ТРАНСЦЕНДЕНЦИИ В КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКЕ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе сформулированы и доказаны теоремы о логической трансценденции в основаниях формальной логики нулевого порядка. Показано, что логическая трансценденция по отношению к классической аристотелевской традиционной логике, представляет собой закономерное явление, непосредственно вытекающее из самих основ современной классической формальной логики нулевого порядка, глобальная непротиворечивость которой установлена выдающимся австрийским логиком – Куртом Геделем.

Одним из первых, кто логически и математически строго показал существование слабо трансцендентных логических формул в достаточно богатых формальных и полуформальных математических теориях, содержащих аксиоматику Пеано, был выдающийся австрийский логик Курт Гедель. Для упомянутых выше теорий было показано существование в них таких логических формул F и ¬F, что не представляется возможным доказать или опровергнуть ни одну из формул F или ¬F, при условии, что упомянутые выше теории являются логически непротиворечивыми. Этим самым, Куртом Геделем было показано существование в этих теориях таких трансцендентных по отношению к классической аристотелевской традиционной логике, логических формул F и ¬F, которые с одной стороны хотя и не отрицают закона об исключенном третьем, но с другой стороны и не удовлетворяют ему. При этом первая теорема Геделя по существу означает, что если достаточно богатая формальная или полуформальная математическая теория, содержащая аксиоматику Пеано, является непротиворечивой, то в ней существуют трансцендентные логические формулы F и ¬F, которые не могут быть ни доказаны, ни опровергнуты на основании классической аристотелевской традиционной логики и аксиоматической системы Пеано.

В целях обеспечения логической адекватности дальнейшего анализа вопросов логической трансценденции в основаниях формальной логики, необходимо рассмотреть ряд определений, связанных с классической формальной логикой нулевого порядка и понятием логической трансценденции.

Основной задачей классической формальной логики нулевого порядка является установление истинностного значения формулы, если определены истинностные значения входящих в нее переменных. Истинностное значение формулы в таком случае определяется индуктивно, с шагами, которые использовались при построении формулы с использованием таблиц истинности логических связок.

Критерий противоречивости и непротиворечивости формул классического исчисления высказываний

Пусть A – некоторая формула классического исчисления высказываний, а $x_1,x_2,\ldots,x_n$ – перечень входящих в нее переменных. Вычислим $R_{a1,a2,..,an}(A)$ на множестве всех наборов значений a_1, $a_2,\ldots,a_n$ входящих в нее переменных. Если при этом $R_{a1,a2,..,an}(A)=0$, на всех наборах a_1, $a_2,\ldots,a_n$, то формула A – *признается тождественно противоречивой*.

Если же существует набор значений переменных такой, что условие $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$ выполняется хотя бы в одном случае из рассматриваемых, то формула A – *признается выполнимой и непротиворечивой*.

Критерий доказуемости и недоказуемости формул классического формального исчисления высказываний

Пусть A – некоторая формула классического исчисления высказываний, а $x_1,x_2,\ldots,x_n$ – перечень входящих в нее переменных. Вычислим $R_{a1,a2,..,an}(A)$ на множестве всех наборов значений a_1, $a_2,\ldots,a_n$ входящих в нее переменных. Если при этом $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$, на всех наборах a_1, $a_2,\ldots,a_n$, то формула A – тождественно истинна, *такая формула признается доказуемой*.

Если же существует набор значений переменных такой, что условие $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$ не выполняется , то формула A – не тождественно истинная, *такая формула признается недоказуемой.*

Определение глобальной формальной непротиворечивости логического исчисления высказываний нулевого порядка

Логическое исчисление высказываний в рамках классической формальной логики нулевого порядка называется глобально формально непротиворечивым, если в нем не доказуемы никакие две внешние формулы, из которых одна является отрицанием другой. Иначе говоря, логическое исчисление называется формально непротиворечивым, если в нем не существует такая внешняя формула A, что тождественно доказуема как формула A, так и формула $\neg A$. В противном случае логическое исчисление является противоречивым.

Проблема глобальной формальной непротиворечивости заключается в выяснении вопроса: является данное исчисление непротиворечивым или нет? Если в исчислении обнаруживаются внешние, тождественно доказуемые формулы вида A и $\neg A$, то такое исчисление является глобально формально противоречивым.

Известна следующая, *логически неопровержимо* доказанная Куртом Геделем теорема.

Теорема о глобальной непротиворечивости классического формального исчисления нулевого порядка

Классическое формальное исчисление нулевого порядка обладает свойством глобальной формальной непротиворечивости.

Сказанное выше означает, что моделирование тех или иных логических формул в рамках классической формальной логики нулевого порядка, в соответствии с правилами упомянутой теории, будет являться объективным и будет адекватно отражать логическую природу исследуемых с ее помощью логических формул.

В классической формальной логике нулевого порядка все формализуемые законы классической аристотелевской традиционной логики являются истинными логическими формулами. Как известно, система классической аристотелевской традиционной логики, состоит из трех основных законов, - закона тождества, закона о непротиворечии и закона об исключенном третьем. Далее приводятся основные законы классической аристотелевской логики для аристотелевских высказываний.

Закон тождества

Каждое аристотелевское высказывание логически равно самому себе:

$$A \equiv A \tag{1}$$

Закон о непротиворечии

Каждое аристотелевское высказывание логически не равно своему отрицанию:

$$\neg(A \equiv \neg A) \tag{2}$$

Закон об исключенном третьем

Для каждого аристотелевского высказывания, либо само высказывание истинно а его отрицание ложно, либо само высказывание ложно, а его отрицание истинно, третья возможность исключена:

$$(A \equiv 1) \oplus (\neg A \equiv 1) \tag{3}$$

К числу неформальных законов классической аристотелевской традиционной логики относится «Принцип достаточного основания», сформулированный выдающимся немецким логиком и математиком – Г.В.Лейбницем. Применительно к логико-математическим объектам упомянутый выше принцип можно выразить следующим образом.

<u>Принцип достаточного основания</u>

Каждое логическое и математическое утверждение должно быть логически и аналитически доказано.

Рассмотрим определение аристотелевской истинной формулы.

<u>Определение аристотелевской истинной формулы</u>

Логическая формула, полностью удовлетворяющая трем основным законам классической аристотелевской традиционной логики, значения истинности которой равны логической **1** при всех значениях, входящих в нее логических переменных, называется аристотелевской истинной логической формулой.

Перейдем к рассмотрению понятия логической трансценденции. Под логической трансценденцией (от лат. transcendentis – перешагивающий, выходящий за пределы) по отношению к классической аристотелевской формальной логике мы понимаем существование и выводимость в рамках современной класической формальной логики нулевого порядка таких логических формул, которые не соответствуют второму и третьему основным законам классической аристотелевской традиционной логики и тем самым выходят за пределы упомянутой логической системы.

Рассмотрим определение слабо трансцендентной логической формулы.

<u>Определение логически слабо трансцендентной формулы</u>

Логическая формула G классической формальной логики нулевого порядка называется логически слабо трансцендентной по отношению к классической аристотелевской традиционной логике, если и сама формула G и ее отрицание $\neg G$ являются непротиворечивыми и вместе с тем недоказуемыми.

Рассмотрим определение сильно трансцендентной логической формулы.

<u>Определение логически сильно трансцендентной формулы</u>

Логическая формула G классической формальной логики нулевого порядка называется логически сильно трансцендентной по отношению к классической аристотелевской традиционной логике, если в рамках классической формальной логики нулевого порядка существует такая система формального вывода, что по отдельности непротиворечиво выводима, как сама формула G , так и ее отрицание $\neg G$.

<u>Определение логически предельно трансцендентной формулы</u>

Логическая формула F классической формальной логики нулевого порядка называется логически предельно трансцендентной по отношению к классической аристотелевской традиционной логике, если формула F и логически инверсная по отношению к ней формула $\neg F$, удовлетворяют одному из следующих сотношений:

(4)

$$F \equiv \neg F$$

$$\neg(F \oplus \neg F)$$

$$F \wedge \neg F$$

$$\neg F \wedge \neg\neg F$$

$$F \Leftrightarrow \neg F$$

$$\neg(F \vee \neg F)$$

$$(F \Rightarrow 0) \wedge (\neg F \Rightarrow 0)$$

$$F \Rightarrow 0$$

Одной из составных частей классической формальной логики нулевого порядка является, определенное в ее рамках множество унарных логических операций, выражаемых приведенной ниже **Таблицей 1.**

Таблица 1. Унарные логические операции

Унарные логические операции				
x	**g1(x)Ξ(¬)**	**g2x Ξ(=)**	**g3(1) Ξ (1)**	**g4(0)Ξ (0)**
0	**1**	**0**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**1**	**0**

В **Таблице 1** унарных логических операций приняты следующие обозначения: **x** – логическая переменная, **g1(x)** – функция отрицания (негации), **g2(x)** – функция тождества, **g3(1)** – тождественная функция логической единицы, **g4(0)** – тождественная функция логического нуля. **0** и **1** — логические, тождественные нуль и единица соответственно.

Сформулируем и докажем следующее утверждение.

Теорема о слабой логической трасценденции (Ахвледиани А.Н. - 2011)

На множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка существуют логически слабо трансендентные формулы G и $\neg G$ по отношению к классической традиционной аристотелевской логике.

Доказательство

Пусть логическая формула G определена следующим образом:

$$G \equiv g2x \equiv \langle 0,1 \rangle \tag{5}$$

Тогда ее отрицание $\neg G$ имеет следующий вид:

$$\neg G \equiv g1x \equiv \langle 1,0 \rangle \tag{6}$$

Из соотношений (5) и (6), а также правил классической формальной логики нулевого порядка следует, что каждая из формул G и $\neg G$ является непротиворечивой и вместе с тем недоказуемой. Это означает, что в отношении ни одной из них в отдельности мы не можем утверждать об ее истинности. Действительно:

$$(G \equiv g2x \equiv 1) = \langle 0,1 \rangle \tag{7}$$

$$(\neg G \equiv g1x \equiv 1) = \langle 1,0 \rangle \tag{8}$$

Формула (7) означает, что утверждение об истинности логической формулы G является недоказуемым. Формула (8) означает, что утверждение об истинности логической формулы $\neg G$ является недоказуемым. Таким образом мы видим, что ни одна из логических формул G, $\neg G$ по отдельности не является тождественно истинной аристотелевской формулой. Кроме этого, логические формулы $G, \neg G$ не удовлетворяют третьему основному закону классической традиционной аристотелевской логики. С другой стороны они удовлетворяют определению логически слабо трансцендентных логических формул. Таким образом мы видим, что на множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка, существуют логически слабо трансцендентные формулы G и $\neg G$. Теорема доказана.

Рассмотрим определение логически предельно трансцендентной формальной системы.

Определение логически предельно трансцендентной формальной системы

Формальная логическая система называется логически предельно трансцендентной, если является тождественно доказуемым, что на множестве логических формул этой системы выводима хотя бы одна из логически предельно трансцендентных логических формул вида (4), что формально может быть выражено следующим образом:

$$[(B1 \wedge B2 \wedge B3 \wedge ...Bm \wedge ...BM) \Rightarrow (C \wedge \neg C)] \equiv 1 \qquad (9)$$

$$[(B1 \wedge B2 \wedge B3 \wedge ...Bm \wedge ...BM) \Rightarrow (\neg C \wedge \neg\neg C)] \equiv 1 \qquad (10)$$

Сформулируем и докажем следующее утверждение.

Теорема о предельной логической трансценденции (Ахвледиани А.Н. – 2011)

Классическая формальная логика нулевого порядка является логически предельно трансцендентной формальной логической системой. На множестве унарных логических операций выводима по крайней мере одна логически предельно трансцендентная формула.

Доказательство

Из рассмотрения **Таблицы 1** следует, что каждая из формул $g1x$ и $g2x$ по отдельности, является непротиворечивой. Однако, несмотря на это, их конъюнкция является тождественно противоречивой:

$$(g1x \wedge g2x) \equiv \langle 1{,}0\rangle \wedge \langle 0{,}1\rangle \equiv \langle 0{,}0\rangle \qquad (11)$$

Из соотношения (11) и логического закона Дунса Скота следует:

$$[(g1x \wedge g2x) \Rightarrow (\neg g1x \wedge \neg\neg g1x)] \equiv [\langle 0{,}0\rangle \Rightarrow \langle 0{,}0\rangle] \equiv \langle 1{,}1\rangle \qquad (12)$$

Из формулы (12) и определения логически предельно трансцендентной формальной системы следует, что выводимость логически предельно трансцендентной формулы на множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка является тождественно доказуемой. Поэтому классическая формальная логика нулевого порядка является логически предельно трансцендентной формальной логической системой. Теорема доказана.

16.ТЕОРЕМА О ГЕНЕЗИСЕ ЛОГИЧЕСКОЙ ТРАНСЦЕНДЕНЦИИ В ОСНОВАНИИ КЛАССИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе, с учетом известных результатов Курта Геделя и Герхарда Генцена в отношениии классической логико-математической аксиоматической системы PA Джзузеппе Пеано, сформулирована и доказана «Теорема о генезисе логической трансценденции в основании классической математики». Показано, что сочетание «Метода математической индукции» с глобально непротиворечивой классической формальной логикой нулевого порядка и «Аксиомой выбора» является достаточным условием для генезиса логически предельно трансцендентной формальной системы в основании классической математики.

Как известно, выдающимся австрийским логиком Куртом Геделем было показано существование в классических математических теориях, содержащих аксиоматическую логико-математическую систему PA выдающегося итальянского математика Джузеппе Пеано, таких трансцендентных по отношению к классической аристотелевской традиционной логике, логических формул F и ⌐F, которые с одной стороны хотя и не отрицают закона об исключенном третьем, но с другой стороны и не удовлетворяют ему. При этом первая теорема Геделя по существу означает, что если достаточно богатая формальная или полуформальная математическая теория, содержащая аксиоматику Пеано, является непротиворечивой, то в ней существуют трансцендентные логические формулы F и ⌐F, которые не могут быть ни доказаны, ни опровергнуты на основании классической аристотелевской традиционной логики и аксиоматической системы Пеано.

Приведем формулировки теорем Курта Геделя о неполноте формальных и полуформальных логико-математических систем, содержащих систему PA.

<u>Первая теорема Геделя</u>

Существует такое суждение F в аксиоматической системе PA, что ни F, ни ⌐F не могут быть доказаны посредством аксиом из PA, если система PA непротиворечива.

<u>Вторая теорема Геделя</u>

Непротиворечивость аксиоматической системы PA (ConsisPA), не может быть доказана в PA, если PA является непротиворечивой.

Ниже приводится содержание традиционной версии аксиоматической системы Пеано - PA.

Аксиомы Пеано

1. **1** есть натуральное число.
2. Для каждого натурального числа n имеется точно одно натуральное число, называемое его последующим и обозначаемое $S(n)$.
3. Всегда имеет место сотношение $S(n) \neq 1$.
4. Из равенства $S(n) = S(m)$ следует $m = n$.
5. Принцип полной индукции. Множество N_+ натуральных чисел, содержащее **1** и для каждого из n элементов следующий за ним элемент $S(n)$, содержит все натуральные числа.

Арифметика Пеано

Сложение и умножение натуральных чисел определяется формулами:

$$S(n) = n + 1 \qquad (1)$$

$$S(m+n) = m + S(n) \qquad (2)$$

$$n \cdot 1 = n \qquad (3)$$

$$n \cdot S(m) = n \cdot m + n \qquad (4)$$

Необходимо отметить, что кроме аксиоматической системы Пеано, - PA, включающей в себя «Аксиомы Пеано» и «Арифметику Пеано», основания классической математики включают в себя «Метод математической индукции», формулировка которого приводится ниже в соответствии с /1/.

Метод математической индукции

Если некоторое утверждение $A(n), n = 1,2,3..........$ справедливо для $n = 1$, и для каждого n из справедливости $A(n)$ при значении n следует справедливость $A(n+1)$ при $n+1$, то утверждение $A(n)$ - справедливо для всех натуральных n, или формально:

$$(\forall n \in N_+)((\forall i \in \{1,...n\})A(n) \equiv 1 \Rightarrow A(n+1) \equiv 1) \Rightarrow (\forall n \in N_+)(A(n) \equiv 1) \qquad (5)$$

Как известно выдающимся немецким математиком Герхардом Генценом в 1936 году была доказана совместность аксиом Пеано и непротиворечивость арифметики, однако для этого ему пришлось добавить к логике первого порядка дополнительную аксиому (бескванторную индукцию). Тем самым Герхардом Генценом была завершена программа Давида Гильберта по формализации оснований математики. Необходимо подчеркнуть, что результаты, полученные Герхардом Генценом не вступают в противоречие с теоремами Геделя, наоборот исследование и результаты Герхарда Генцена являются косвенным подтверждением «Второй теоремы Геделя» поскольку Генцену для обоснования непротиворечивости аксиоматической системы РА пришлось добавить к логике первого порядка дополнительную аксиому о бескванторной индукции.

Из сопоставления результатов Курта Геделя и Герхарда Генцена в отношении аксиоматической системы РА вытекает важное следствие – можно утверждать, что аксиоматическая система РА является внутренне непротиворечивой в смысле логической совместности основных аксиом системы, а это в соответствии с «Первой теоремой Геделя» означает, что в каждой математической теории первого порядка, основанной на системе РА существуют трансцендентные по отношению к аристотелевской традиционной формальной логике формулы F и $\neg$F, которые не могут быть ни доказаны, ни опровергнуты на основании классической аристотелевской традиционной логики и аксиоматической системы Пеано.

В целях обеспечения логической адекватности дальнейшего анализа вопросов логической трансценденции в основаниях формальной логики и классической математики, необходимо рассмотреть ряд определений, связанных с классической формальной логикой нулевого порядка и понятием логической трансценденции.

Основной задачей классической формальной логики нулевого порядка является установление истинностного значения формулы, если определены истинностные значения входящих в нее переменных. Истинностное значение формулы в таком случае определяется индуктивно, с шагами, которые использовались при построении формулы с использованием таблиц истинности логических связок.

Критерий противоречивости и непротиворечивости формул классического исчисления высказываний

Пусть А – некоторая формула классического исчисления высказываний, а $x_1,x_2,\dots,x_n$ – перечень входящих в нее переменных. Вычислим $R_{a1,a2,..,an}(A)$ на множестве всех наборов значений a_1, $a_2,\dots,a_n$ входящих в нее переменных. Если при этом $R_{a1,a2,..,an}(A)=0$, на всех наборах a_1, $a_2,\dots,a_n$, то формула А – *признается тождественно противоречивой*.

Если же существует набор значений переменных такой, что условие $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$ выполняется хотя бы в одном случае из рассматриваемых, то формула А – *признается выполнимой и непротиворечивой*.

<u>Критерий доказуемости и недоказуемости формул классического формального исчисления высказываний</u>

Пусть А – некоторая формула классического исчисления высказываний, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – перечень входящих в нее переменных. Вычислим $R_{a1,a2,..,an}(A)$ на множестве всех наборов значений a_1, $a_2, \ldots, a_n$ входящих в нее переменных. Если при этом $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$, на всех наборах a_1, $a_2, \ldots, a_n$, то формула А – тождественно истинна, *такая формула признается доказуемой*.

Если же существует набор значений переменных такой, что условие $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$ не выполняется , то формула А – не тождественно истинная, *такая формула признается недоказуемой.*

<u>Определение глобальной формальной непротиворечивости логического исчисления высказываний нулевого порядка</u>

Логическое исчисление высказываний в рамках классической формальной логики нулевого порядка называется глобально формально непротиворечивым, если в нем не доказуемы никакие две внешние формулы, из которых одна является отрицанием другой. Иначе говоря, логическое исчисление называется формально непротиворечивым, если в нем не существует такая внешняя формула А, что тождественно доказуема как формула А, так и формула ¬А . В противном случае логическое исчисление является противоречивым.

Проблема глобальной формальной непротиворечивости заключается в выяснении вопроса: является данное исчисление непротиворечивым или нет? Если в исчислении обнаруживаются внешние, тождественно доказуемые формулы вида А и ¬А , то такое исчисление является глобально формально противоречивым.

Известна следующая, *логически неопровержимо* доказанная Куртом Геделем теорема.

<u>Теорема о глобальной непротиворечивости классического формального исчисления нулевого порядка</u>

Классическое формальное исчисление нулевого порядка обладает свойством глобальной формальной непротиворечивости.

Сказанное выше означает, что моделирование тех или иных логических формул в рамках классической формальной логики нулевого порядка, в соответствии с правилами упомянутой теории, будет являться объективным и будет адекватно отражать логическую природу исследуемых с ее помощью логических формул.

В классической формальной логике нулевого порядка все формализуемые законы классической аристотелевской традиционной логики являются истинными логическими формулами. Как известно, система классической аристотелевской традиционной логики, состоит из трех основных законов, - закона тождества, закона о непротиворечии и закона об исключенном третьем. Далее приводятся основные законы классической аристотелевской логики для аристотелевских высказываний.

Закон тождества

Каждое аристотелевское высказывание логически равно самому себе:

$$A \equiv A \tag{6}$$

Закон о непротиворечии

Каждое аристотелевское высказывание логически не равно своему отрицанию:

$$\neg(A \equiv \neg A) \tag{7}$$

Закон об исключенном третьем

Для каждого аристотелевского высказывания, либо само высказывание истинно а его отрицание ложно, либо само высказывание ложно, а его отрицание истинно, третья возможность исключена:

$$(A \equiv 1) \oplus (\neg A \equiv 1) \tag{8}$$

К числу неформальных законов классической аристотелевской традиционной логики относится «Принцип достаточного основания», сформулированный выдающимся немецким логиком и математиком – Г.В.Лейбницем. Применительно к логико-математическим объектам упомянутый выше принцип можно выразить следующим образом.

Принцип достаточного основания

Каждое логическое и математическое утверждение должно быть логически и аналитически доказано.

Рассмотрим определение аристотелевской истинной формулы.

Определение аристотелевской истинной формулы

Логическая формула, полностью удовлетворяющая трем основным законам классической аристотелевской традиционной логики, и значения истинности которой равны логической **1** при всех значениях, входящих в нее логических переменных, называется аристотелевской истинной логической формулой.

Перейдем к рассмотрению понятия логической трансценденции. Под логической трансценденцией (от лат. transcendentis – перешагивающий, выходящий за пределы) по отношению к классической аристотелевской формальной логике мы понимаем существование и выводимость в рамках современной класической формальной логики нулевого порядка таких логических формул, которые не соответствуют второму и третьему основным законам классической аристотелевской традиционной логики и тем самым выходят за пределы упомянутой логической системы.

Рассмотрим определение слабо трансцендентной логической формулы.

Определение логически слабо трансцендентной формулы

Логическая формула G классической формальной логики нулевого порядка называется логически слабо трансцендентной по отношению к классической аристотелевской традиционной логике, если и сама формула G и ее отрицание $\neg G$ являются непротиворечивыми и вместе с тем недоказуемыми.

Рассмотрим определение сильно трансцендентной логической формулы.

Определение логически сильно трансцендентной формулы

Логическая формула G классической формальной логики нулевого порядка называется логически сильно трансцендентной по отношению к классической аристотелевской традиционной логике, если в рамках классической формальной логики нулевого порядка существует такая система формального вывода, что по отдельности непротиворечиво выводима, как сама формула G , так и ее отрицание $\neg G$.

Определение логически предельно трансцендентной формулы

Логическая формула F классической формальной логики нулевого порядка называется логически предельно трансцендентной по отношению к классической аристотелевской традиционной логике, если формула F и логически инверсная по отношению к ней формула $\neg F$, удовлетворяют одному из следующих сотношений:

(9)

$$F \equiv \neg F$$

$$\neg(F \oplus \neg F)$$

$$F \wedge \neg F$$

$$\neg F \wedge \neg\neg F$$

$$F \Leftrightarrow \neg F$$

$$\neg(F \vee \neg F)$$

$$(F \Rightarrow 0) \wedge (\neg F \Rightarrow 0)$$

$$F \Rightarrow 0$$

Одной из составных частей классической формальной логики нулевого порядка является, определенное в ее рамках множество унарных логических операций, выражаемых приведенной ниже **Таблицей 1.**

Таблица 1. Унарные логические операции

Унарные логические операции				
x	**g1(x)Ξ(¬)**	**g2x Ξ(=)**	**g3(1) Ξ (1)**	**g4(0)Ξ (0)**
0	**1**	**0**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**1**	**0**

В **Таблице 1** унарных логических операций приняты следующие обозначения: **x** – логическая переменная, **g1(x)** – функция отрицания (негации), **g2(x)** – функция тождества,

g3(1) – тождественная функция логической единицы, **g4(0)** – тождественная функция логического нуля. **0** и **1** — логические, тождественные нуль и единица соответственно.

Сформулируем и докажем следующее утверждение.

<u>Теорема о слабой логической трасценденции (Ахвледиани А.Н. - 2011)</u>

На множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка существуют логически слабо трансендентные формулы G и $\neg G$ по отношению к классической традиционной аристотелевской логике.

Доказательство

Пусть логическая формула G определена следующим образом:

$$G \equiv g2x \equiv \langle 0,1 \rangle \tag{10}$$

Тогда ее отрицание $\neg G$ имеет следующий вид:

$$\neg G \equiv g1x \equiv \langle 1,0 \rangle \tag{11}$$

Из соотношений (10) и (11), а также правил классической формальной логики нулевого порядка следует, что каждая из формул G и $\neg G$ является непротиворечивой и вместе с тем недоказуемой. Это означает, что в отношении ни одной из них в отдельности мы не можем утверждать об ее истинности. Действительно:

$$(G \equiv g2x \equiv 1) = \langle 0,1 \rangle \tag{12}$$

$$(\neg G \equiv g1x \equiv 1) = \langle 1,0 \rangle \tag{13}$$

Формула (12) означает, что утверждение об истинности логической формулы G является недоказуемым. Формула (13) означает, что утверждение об истинности логической формулы $\neg G$ является недоказуемым. Таким образом мы видим, что ни одна из логических формул G, $\neg G$ по отдельности не является тождественно истинной аристотелевской формулой. Кроме этого, логические формулы $G, \neg G$ не удовлетворяют третьему основному закону классической традиционной аристотелевской логики. С другой стороны они удовлетворяют определению логически слабо трансцендентных логических формул. Таким образом мы видим, что на множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка, существуют логически слабо трансцендентные формулы G и $\neg G$. Теорема доказана.

Рассмотрим определение логически предельно трансцендентной формальной системы.

Определение логически предельно трансцендентной формальной системы

Формальная логическая система называется логически предельно трансцендентной, если является тождественно доказуемым, что на множестве логических формул этой системы выводима хотя бы одна из логически предельно трансцендентных логических формул вида (9), что формально может быть выражено следующим образом:

$$[(B1 \wedge B2 \wedge B3 \wedge ...Bm \wedge ...BM) \Rightarrow (C \wedge \neg C)] \equiv 1 \qquad (14)$$

$$[(B1 \wedge B2 \wedge B3 \wedge ...Bm \wedge ...BM) \Rightarrow (\neg C \wedge \neg\neg C)] \equiv 1 \qquad (15)$$

Сформулируем и докажем следующее утверждение.

Теорема о предельной логической трансценденции (Ахвледиани А.Н. – 2011)

Классическая формальная логика нулевого порядка является логически предельно трансцендентной формальной логической системой. На множестве унарных логических операций выводима по крайней мере одна логически предельно трансцендентная формула.

Доказательство

Из рассмотрения **Таблицы 1** следует, что каждая из формул $g1x$ и $g2x$ по отдельности, является непротиворечивой. Однако, несмотря на это, их конъюнкция является тождественно противоречивой:

$$(g1x \wedge g2x) \equiv \langle 1{,}0 \rangle \wedge \langle 0{,}1 \rangle \equiv \langle 0{,}0 \rangle \qquad (16)$$

Из соотношения (16) и логического закона Дунса Скота следует:

$$[(g1x \wedge g2x) \Rightarrow (\neg g1x \wedge \neg\neg g1x)] \equiv [\langle 0{,}0 \rangle \Rightarrow \langle 0{,}0 \rangle] \equiv \langle 1{,}1 \rangle \qquad (17)$$

Из формулы (17) и определения логически предельно трансцендентной формальной системы следует, что выводимость логически предельно трансцендентной формулы на множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка является тождественно доказуемой. Поэтому классическая формальная логика нулевого порядка является логически предельно трансцендентной формальной логической системой. Теорема доказана.

Для дальнейшего изложения нам понадобится «Аксиома выбора» из системы ZFC теории множеств, формулировка которой приводится ниже в соответствии с /2/.

<u>Аксиома выбора</u>

Для каждого семейства B непустых непересекающихся множеств существует по меньшей мере одно непустое множество D, которое имееет только один общий элемент c с каждым из множеств $b \in B$ данного семейства.

Рассмотрим следующее определение.

<u>Определение логического коллапса</u>

Логическим коллапсом (тотальным ослаблением истинности) называется такая логическая ситуация, когда в некоторой формальной или полуформальной логико-математической теории T, становится логически конструктивно осуществимым выведение на основе непротиворечивых логических формул, - тождественно противоречивой логической формулы на множестве унарных, бинарных, тернарных или в общем случае n - арных логических операций.

Сформулируем и докажем следующую теорему.

<u>Теорема о логическом коллапсе в основании классической математики (Ахвледиани А.Н. – 2011)</u>

Сочетание классической формальной логики нулевого порядка, «Метода математической индукции» и «Аксиомы выбора», является достаточным условием для конструктивной осуществимости множественного логического коллапса в каждой формальной или полуформальной логико-математической теории, содержащей классическую формальную логику нулевого порядка, «Метод математической индукции» и «Аксиому выбора».

Доказательство

Пусть B - непустое семейство непустых непересекающихся множеств $b1, b2, b3,$ логических формул, определенных на множестве унарных логических операций следующим образом.

$b1$ - есть счетное множество непротиворечивых, логически слабо трансцендентных формул $a11, a12, a13, ... a1n, ...$, логическая структура каждой из которых совпадает с логической структурой непротиворечивой формулы $g1(x)$ на множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка**.**

$b2$ - есть счетное множество непротиворечивых, логически слабо трансцендентных формул $a21, a22, a23, ...a2n, ...$, логическая структура каждой из которых совпадает с логической структурой непротиворечивой формулы $g2(x)$ на множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка.

$b3$ - есть счетное множество тождественно истинных логических формул $a31, a32, a33, ...a3n, ...$, логическая структура каждой из которых совпадает с логической структурой тождественно истинной формулы $g3(1)$ на множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка.

Кортежи $d1, d2, d3, ..., ..., dn, ...$ логических формул, удовлетворяющие условиям «Аксиомы выбора» определим следующим образом:

$$d1 = \langle a11, a21, a31 \rangle \tag{18}$$

$$d2 = \langle a12, a22, a32 \rangle \tag{19}$$

$$d3 = \langle a13, a23, a33 \rangle \tag{20}$$

....

$$dn = \langle a1n, a2n, a3n \rangle \tag{21}$$

....

Определим кортеж $LCU = \langle lc1, lc2, lc3, ..., lcn, ... \rangle$ логических формул следующим образом.

$$lc1 \equiv (a11 \wedge a21 \wedge a31) \tag{22}$$

$$lc2 \equiv (a12 \wedge a22 \wedge a32) \tag{23}$$

$$lc3 \equiv (a13 \wedge a23 \wedge a33) \tag{24}$$

....

$$lcn \equiv (a1n \wedge a2n \wedge a3n) \tag{25}$$

....

Из способа определения множеств $b1, b2, b3$ непротиворечивых логических формул множества унарных логических операций глобально непротиворечивой классической формальной логики нулевого порядка и формул (22)-(25) следует:

$$lc1 \equiv (\langle 1,0\rangle \wedge \langle 0,1\rangle \wedge \langle 1,1\rangle) \equiv \langle 0,0\rangle \quad (26)$$

$$lc2 \equiv (\langle 1,0\rangle \wedge \langle 0,1\rangle \wedge \langle 1,1\rangle) \equiv \langle 0,0\rangle \quad (27)$$

$$lc3 \equiv (\langle 1,0\rangle \wedge \langle 0,1\rangle \wedge \langle 1,1\rangle) \equiv \langle 0,0\rangle \quad (28)$$

....

$$lcn \equiv (\langle 1,0\rangle \wedge \langle 0,1\rangle \wedge \langle 1,1\rangle) \equiv \langle 0,0\rangle \quad (29)$$

....

Из определения кортежа $LCU = \langle lc1, lc2, lc3, ..., lcn, ...\rangle$ и формул (26) - (29) следует:

$$LCU = \langle\langle 0,0\rangle, \langle 0,0\rangle, \langle 0,0\rangle, ..., \langle 0,0\rangle, ...\rangle \quad (30)$$

Формула (30) и означает конструктивное существование множественного логического коллапса, полученного на основе конъюнкции непротиворечивых логических формул множества унарных логических операций, законов глобально непротиворечивой классической формальной логики нулевого порядка и «Аксиомы выбора». Теорема доказана.

Рассмотрим следующее определение.

Определение счетного кортежа логического коллапса на множестве унарных логических операций

Кортеж, определяемый формулой (30):

$$LCU = \langle\langle 0,0\rangle, \langle 0,0\rangle, \langle 0,0\rangle, ..., \langle 0,0\rangle, ...\rangle$$

называется счетным кортежем логического коллапса на множестве унарных логических операций.

Рассмотрим следующее определение.

Определение счетного истинного кортежа на множестве унарных логических операций

Кортеж $U1$, определяемый формулой:

$$U1 = \langle \langle 1,1 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 1,1 \rangle, ..., \langle 1,1 \rangle, ... \rangle \tag{31}$$

называется счетным кортежем истинности на множестве унарных логических операций.

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема о генезисе логической трансценденции в основании классической математики (Ахвледиани А.Н. – 2011)

Конструктивное существование счетного кортежа LCU логического коллапса на множестве унарных логических операций является достаточным условием для генезиса и счетного кортежа истинности $U1$, свидетельствующего о конструктивной осуществимости генезиса логической трансценденции на множестве унарных логических операций в каждой логико-математической формальной или полуформальной теории, содержащей классическую формальную логику нулевого порядка, «Метод математической индукции» и «Аксиому выбора».

Доказательство

Рассмотрим множество логических формул, определенных следующим образом:

$$S1 \equiv [(a11 \wedge a21 \wedge a31) \Rightarrow (\neg g1(x) \wedge \neg\neg g1(x))] \equiv \langle 0,0 \rangle \Rightarrow \langle 0,0 \rangle \equiv \langle 1,1 \rangle \tag{32}$$

$$S2 \equiv [(a12 \wedge a22 \wedge a32) \Rightarrow (\neg g1(x) \wedge \neg\neg g1(x))] \equiv \langle 0,0 \rangle \Rightarrow \langle 0,0 \rangle \equiv \langle 1,1 \rangle \tag{33}$$

$$S3 \equiv [(a13 \wedge a23 \wedge a33) \Rightarrow (\neg g1(x) \wedge \neg\neg g1(x))] \equiv \langle 0,0 \rangle \Rightarrow \langle 0,0 \rangle \equiv \langle 1,1 \rangle \tag{34}$$

....

$$Sn \equiv [(a1n \wedge a2n \wedge a3n) \Rightarrow (\neg g1(x) \wedge \neg\neg g1(x))] \equiv \langle 0,0 \rangle \Rightarrow \langle 0,0 \rangle \equiv \langle 1,1 \rangle \tag{35}$$

....

Кортеж, составленный из логических векторов, полученных в результате формул (32)-(35) равен счетному кортежу истинности $U1$:

$$\langle\langle 1,1\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 1,1\rangle,...,\langle 1,1\rangle,...\rangle = U1 \tag{36}$$

Полученное соотношение (36) означает доказательство теоремы. Теорема доказана.

Приведенные выше результаты и соотношения (15), (32)-(36) и являются обоснованием генезиса логически предельно трансцендентной формальной системы в основании классической математики. Таким образом, мы получили неопровержимое свидетельство о конструктивной осуществимости логического коллапса и генезиса логической трансценденции на множестве унарных логических операций в каждой логико-математической формальной или полуформальной теории, содержащей классическую формальную логику нулевого порядка, «Метод математической индукции» и «Аксиому выбора».

Используемые источники:

1. **Математическая индукция. Википедия.**
2. **Википедия. Аксиома выбора.**

17. «ПЕРВЫЙ ПРИНЦИП ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТРАНСЦЕНДЕНЦИИ» СИСТЕМЫ «INCOL&TAMLA»

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе формулируется и доказывается «Первый принцип логико-математической трансценденци», свидетельствующий о том, что второй и третий основные законы классической аристотелевской традиционной логики носит частный характер.

Как известно, в современной классической формальной логике нулевого порядка основные логические законы, получаемые в пределах классической аристотелевской традиционной логики, являются тождественно-истинными логическими формулами. Известно также, что глобальная формально-логическая непротиворечивость классической формальной логики нулевого порядка неопровержимо установлена выдающимся австрийским логиком и математиком Куртом Геделем и не подлежит сомнению. Однако исследование логических свойств классической формальной логики нулевого порядка показало, что несмотря на это обстоятельство, в ней существуют и такие логические утверждения и логические формулы, которые хотя прямо и не отрицают закон о непротиворечии и закон исключенного третьего, однако в сильной степени отличаются от классических аристотелевских высказываний в смысле соответствия их законам о непротиворечии и исключенного третьего. Упомянутые логические утверждения и логические формулы классической формальной логики нулевого порядка были названы логически трансцендентными. Система INCOL&TAMLA разработана для эффективного исследования именно трансцендентных формально-логических и логико-аналитических формул в различных формальных и полуформальных математических теориях.

В рамках международного научно-технического общества «INCOL», группа специалистов под руководством израильского ученого, работающего в области формальной логики, теории множеств, прикладной математики и механики - Александра Ахвледиани, - успешно завершила многолетнюю работу по созданию и применению трансцендентной многоуровневой формально-логической и теоретико-множественной математической системы «INCOL&TAMLA» («Incolumitas & Transcendent Multilevel Logical Analysis»). Слово incolumitas на латыни обозначает безопасность. Тем самым, в названии упомянутой логико-математической и теоретико-множественной системы «INCOL&TAMLA» подчеркивается, что знание трансцендентных логических свойств формальной классической логики нулевого порядка, позволяет содействовать логически безопасному ее применению в той или иной формальной или полуформальной математической теории, что не может быть гарантировано при стандартном ее использовании.

Логическим ядром упомянутой логико-математической технологии является «ноу-хау», сформулированное и обоснованное в 1990 году совместно Александром и Нодаром Ахвледиани в виде «Принципов логико-математической трансценденции». В течении последующих 20 лет, Александром Ахвледиани на основе упомянутых принципов, были осуществлены многочисленные логико-математические, научно-технические, мультидисциплинарные и логико-философские исследования, которые привели к разработке трансцендентной теоретико-множественной логико-математической системы «INCOL&TAMLA».

Одним из первых, кто логически и математически строго показал существование слабо трансцендентных логических формул в достаточно богатых формальных и полуформальных математических теориях, содержащих аксиоматику Пеано, был выдающийся австрийский логик Курт Гедель. Для упомянутых выше теорий было показано существование в них таких логических формул F и ¬F, что не представляется возможным доказать или опровергнуть ни одну из формул F или ¬F, при условии, что упомянутые выше теории логически непротиворечивы. Этим самым Куртом Геделем было показано существование в этих теориях таких трансцендентных логических формул F и ¬F, которые с одной стороны хотя и не отрицают закона об исключенном третьем, но с другой стороны и не удовлетворяют ему. При этом первая теорема Геделя в интерпретации системы «INCOL&TAMLA означает, что если достаточно богатая формальная или полуформальная математическая теория, содержащая аксиоматику Пеано, является непротиворечивой, то в ней согласно теории Курта Геделя существуют трансцендентные логические формулы F и ¬F.

Известно, что глобальная формально-логическая непротиворечивость классической формальной логики нулевого порядка установлена Куртом Геделем. Формально-логическая непротиворечивость классической формальной логики нулевого порядка означает, что в ней невыводимы две такие внешние тождественно истинные логические формулы, которые вместе с тем отрицали бы друг друга. Однако, тем не менее, в рамках формально-логической и теоретико-множественной системы INCOL&TAMLA удалось существенно развить теорию Курта Геделя, в том смысле, что было доказано существование в самой глобально формально-логически непротиворечивой классической формальной логике нулевого порядка существование таких сильно трансцендентных утверждений и формул этой теории A и ¬A, что по отдельности логически непротиворечиво выводимо, как A так и ¬A. Необходимо отметить,что при доказательстве существования сильно трансцендентных логических формул A и ¬A не был использован логический закон Дунса Скота, согласно которому из тождественно противоречивой формулы выводима любая формула, в том числе и противоречие вида A&¬A. Наоборот, представленное в рамках INCOL&TAMLA формально-логическое доказательство сильной трансцендентности утверждений А и ¬А, подразумевает именно непротиворечивый формальный логический вывод, не содержащий в себе тождественно противоречивых формул.

В основе приведенных выше результатов лежат «Принципы логико-математической трансценденции» сформулированные и доказанные совместно Александром и Нодаром Ахвледиани в 1990 году. Они состоят из следующих четырех утверждений, которые были формально логически строго доказаны в рамках классической формальной логики нулевого порядка, как теоремы, причем без применения косвенных методов доказательства.

Первый принцип логико-математической трансценденции

В классической формальной логике нулевого порядка существуют такие логически сильно трансцендентные формулы А и ¬А, что по отдельности логически непротиворечиво выводимы, как А так и ¬А.

Второй принцип логико-математической трансценденции

В классической формальной логике нулевого порядка конструктивно существует логически инверсное хаусдорфово общее топологическое логическое пространство, в котором множество логических законов классической аристотелевской логики высказываний является лишь его собственным подклассом, а кроме него в упомянутом общем топологическом логическом пространстве, в качестве собственного подкласса содержится также и класс слабо и сильно трансцендентных логических утверждений и формул.

Третий принцип логико-математической трансценденции

В классической формальной логике нулевого порядка конструктивно существует логически инверсное аристотелевское, метризуемое по Хаусдорфу топологическое логическое пространство, содержащее локальные, внешне формально непротиворечивые логические подпространства формального классического исчисления Гильберта, внутри которых выводимы предельно трансцендентные логические формулы, эквивалентные отрицанию закона о непротиворечии и закона об исключенном третьем.

Четвертый принцип логико-математической трансценденции

Каждая, достаточно богатая формальная или полуформальная математическая теория, содержащая теорию рациональных чисел, определение бесконечно большой величины и определение взаимно однозначного соответствия классов или множеств (в том числе и бесконечных), содержит такие сильно трансцендентные логико-математические утверждения А и ¬А, что по отдельности, формально логически и аналитически непротиворечиво выводимо, как утверждение А, так и утверждение ¬А.

В настоящее время система «INCOL&TAMLA» позволяет эффективно осуществлять многоуровневые мультидисциплинарные, междисциплинарные и монодисциплинарные исследования в различных областях науки и техники с учетом особенностей классической аристотелевской силлогистики, аристотелевской классической формальной логики, современной классической логики нулевого порядка, современной классической логики первого порядка, а также булевой алгебры.

Для дальнейшего логически адекватного рассмотрения вопросов логической трансцендfestенци в рамках классической формальной логики нулевого порядка необходимо рассмотреть некоторые основные положения классической формальной логики нулевого порядка.

Основной задачей классической формальной логики нулевого порядка является установление истинностного значения формулы, если определены истинностные значения входящих в нее переменных. Истинностное значение формулы в таком случае определяется индуктивно, с шагами, которые использовались при построении формулы с использованием таблиц истинности логических связок.

<u>Критерий противоречивости и непротиворечивости формул классического исчисления высказываний</u>

Пусть A – некоторая формула классического исчисления высказываний, а $x_1,x_2,\ldots,x_n$ – перечень входящих в нее переменных. Вычислим $R_{a1,a2,..,an}(A)$ на множестве всех наборов значений a_1, $a_2,\ldots,a_n$ входящих в нее переменных. Если при этом $R_{a1,a2,..,an}(A)=0$, на всех наборах a_1, $a_2,\ldots,a_n$, то формула A – *признается тождественно противоречивой*.

Если же существует набор значений переменных такой, что условие $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$ выполняется хотя бы в одном случае из рассматриваемых, то формула A – *признается выполнимой и непротиворечивой.*

<u>Критерий доказуемости и недоказуемости формул классического формального исчисления высказываний</u>

Пусть A – некоторая формула классического исчисления высказываний, а $x_1,x_2,\ldots,x_n$ – перечень входящих в нее переменных. Вычислим $R_{a1,a2,..,an}(A)$ на множестве всех наборов значений a_1, $a_2,\ldots,a_n$ входящих в нее переменных. Если при этом $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$, на всех наборах a_1, $a_2,\ldots,a_n$, то формула A – тождественно истинна, *такая формула признается доказуемой.*

Если же существует набор значений переменных такой, что условие $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$ не выполняется , то формула А – не тождественно истинная, *такая формула признается недоказуемой.*

Определение глобальной формальной непротиворечивости логического исчисления высказываний нулевого порядка

Логическое исчисление высказываний в рамках классической формальной логики нулевого порядка называется глобально формально непротиворечивым, если в нем не доказуемы никакие две внешние формулы, из которых одна является отрицанием другой.

Проблема глобальной формальной непротиворечивости заключается в выяснении вопроса: является данное исчисление непротиворечивым или нет? Если в исчислении обнаруживаются внешние, тождественно доказуемые формулы вида А и ¬А , то такое исчисление является глобально формально противоречивым.

Известна следующая, *логически неопровержимо* доказанная Куртом Геделем теорема.

Теорема о глобальной непротиворечивости классического формального исчисления нулевого порядка

Классическое формальное исчисление нулевого порядка обладает свойством глобальной формальной непротиворечивости.

Сказанное выше означает, что моделирование тех или иных логических формул в рамках классической формальной логики нулевого порядка, в соответствии с правилами упомянутой теории, будет являться объективным и будет адекватно отражать логическую природу исследуемых с ее помощью логических формул.

В **Таблице 1** рассматриваются логические формулы, определенные на множестве бинарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка.

Таблица 1. Основные формулы бинарных логических операций.

Бинарные логические операции										
x	**y**		**F_1(x,y)**	**F_2(x,y)**	**F_3(x,y)**	**F_4(x,y)**	**F_5(x,y)**	**F_6(x,y)**	**F_7(x,y)**	**F_8(x,y)**
0	**0**		**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**		**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
1	**0**		**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
1	**1**		**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
x	**y**		**F_9(x,y)**	**F_{10}(x,y)**	**F_{11}(x,y)**	**F_{12}(x,y)**	**F_{13}(x,y)**	**F_{14}(x,y)**	**F_{15}(x,y)**	**F_{16}(x,y)**
0	**0**		**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
0	**1**		**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
1	**0**		**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
1	**1**		**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**

x и **y** – логические переменные;

0 и **1** — логические ,тождественные нуль и единица соответственно,

F_1(x, y) — конъюнкция **(F_1(x, y) = x&y = $x \wedge y$ = min(x, y)),**

F_2(x, y) — дизъюнкция **(F_2(x, y) = $x \vee y$ = max(x, y)),**

F_3(x, y) — эквивалентность **(F_3(x, y) = $x \sim y$ = $x \equiv y$ = $x \leftrightarrow y$),**

F_4(x, y) — сумма по модулю два **(F_4(x, y) = $x \oplus y$),**

F_5(x, y) — импликация от **y** к **x** **(F_5(x, y)** = **$x \leftarrow y$ = $x \subset y$),**

F_6(x, y) — импликация от **x** к **y** **(F_6(x, y) = $x \rightarrow y$ = $x \supset y$),**

F_7(x, y) — стрелка Пи́рса = функция Да́ггера = функция Ве́бба («антидизъюнкция») (**F_7(x, y) = $x \downarrow y$**).

F_8(x, y) — штрих Ше́ффера («антиконъюнкция») (**F_8(x, y) = $x | y$**),

F_9(x, y), **F_{10}(x, y)** — инверсии импликаций **F_5** и **F_6**,

F_{11}— F_{14} — функции только одного аргумента,

F_{15}(x, y), F_{16}(x, y) — тождества

Рассмотрим некоторые основные определения формальной логики, связанные с понятием доказательства в соответствии с /1/.

Определение формального логического доказательства

В логике и математике формальным логическим доказательством логической или математической формулы L при наперед заданных исходных посылках, называется цепочка логических и математических умозаключений, логически истинно свидетельствующая о том, что при наперед заданном наборе аксиом и правил вывода, а также при заданных исходных посылках формула L выводима из исходных посылок.

Определение формального вывода

Формальным выводом называется конечное, упорядоченное множество строк, написанных на формальном языке, таких, что каждая из них является либо аксиомой, либо получена из предыдущих строк применением одного изх правил вывода.

Определение формального доказательства

Формальным доказательством утверждения или логической формулы называется формальный вывод, последней строкой которого является данное утверждение.

Определение теоремы

Утверждение, имеющее формальное доказательство, называется теоремой.

Определение формальной теории

Множество всех теорем в данной формальной модели, рассматриваемое вместе с алфавитом формального языка, множествами аксиом и правил вывода, называется формальной теорией.

Определение логически сильно трансцендентных утверждения и формулы

Логическое или математическое утверждение или формула A называется логически сильно трансцендентной по отношению к классической аристотелевской традиционной логике, если по отдельности непротиворечиво выводимы как формула A так и $\neg$A.

Определение сильно трансцендентной теории

Формальная или полуформальная теория называется сильно трансцендентной, если в ней существуют сильно трансцендентные формулы A так и $\neg$A.

Теперь сформулируем и докажем «Первый принцип логико-математической трансценденции».

Первый принцип логико-математической трансценденции(Ахвледиани А.Н. - 2011)

В классической формальной логике нулевого порядка существуют такие логически сильно трансцендентные формулы А и ⌐А, что по отдельности логически непротиворечиво выводимы, как А так и ⌐А.

Доказательство

Определим формулу A на множестве бинарных логических операций следующим образом:

$$[A \equiv (x \equiv 1)] \equiv \langle 0,0,1,1 \rangle \tag{1}$$

Покажем, что на множестве бинарных операций существует непротиворечивый формальный вывод формулы (1) такой, что упорядоченное множество строк формального вывода содержит только непротиворечивые логические формулы, и кроме того вектор истинности упомянутого выше формального вывода является тождественно доказуемым. Упомянутый выше формальный вывод основан на свойствах множества бинарных логических операций, приведенных в **Таблице 1.**

С учетом (1) имеет место следующий формальный вывод:

$$\{[(x \vee y) \wedge (x \Leftrightarrow y)] \equiv [\langle 0,1,1,1 \rangle \wedge \langle 1,0,0,1 \rangle] \equiv \langle 0,0,0,1 \rangle \Rightarrow [(x \equiv 1)]\} \equiv \langle 1,1,1,1 \rangle \tag{2}$$

Формула (2) показывает, что представленный формальный вывод формулы A является тождественно доказуемым.

Рассмотрим теперь формулу:

$$[\neg A \equiv \neg (x \equiv 1)] \equiv \langle 1,1,0,0 \rangle \tag{3}$$

Покажем, что на множестве бинарных операций существует непротиворечивый формальный вывод формулы (3) такой, что упорядоченное множество строк формального вывода содержит только непротиворечивые логические формулы, и кроме того вектор истинности упомянутого выше формального вывода является тождественно доказуемым.

$$\{[(x \oplus y) \wedge (x \Rightarrow y)] \equiv [\langle 0,1,1,0 \rangle \wedge \langle 1,1,0,1 \rangle] \equiv \langle 0,1,0,0 \rangle \Rightarrow [\neg (x \equiv 1)]\} \equiv \langle 1,1,1,1 \rangle \tag{4}$$

Формула (4) показывает, что представленный формальный вывод формулы $\neg A$ является тождественно доказуемым.

Итак, тождественно доказуемые формулы (2) и (4) свидетельствуют о том, что формулы A и $\neg A$ выводимы непротиворечиво. Теорема доказана.

Доказанный нами «Принцип логико-математической трансценденции» свидетельствует о том, что глобально непротиворечивая классическая формальная логика нулевого порядка является сильно трансцендентной формально-логической теорией.

Используемые источники:

1.Википедия. Математическое доказательство.

18.СИНГУЛЯРНОЕ РЕШЕНИЕ «ВТОРОЙ ПРОБЛЕМЫ ГИЛЬБЕРТА»

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе в дополнение к результатам Курта Геделя и Герхарда Генцена в отношении логической и арифметической природы аксиоматической системы Джузеппе Пеано, представлено логически сингулярное решение «Второй проблемы Гильберта»

Как известно, в начале 20-го века на Международном математическом конгрессе в Париже, выдающимся немецким математиком Давидом Гильбертом была представлена программа из 23, весьма сложных математических проблем, решение которых представляло большой интерес для математического научного сообщества того времени. Исторически известно, что Давид Гильберт отличался весьма широким математическим кругозором, и работая в различных областях математики, он во многих из них добился выдающихся научных результатов. Это обстоятельство и позволило ему сформулировать ставшие впоследствии знаменитыми 23 математические проблемы в различных областях математики.

Известно, что первые две проблемы Гильберта принадлежат к классу проблем оснований математики. В частности вторая проблема Гильберта заключается в установлении непротиворечивости, либо противоречивости системы элементарной арифметики, где в качестве основной аксиоматической арифметической системы традиционно рассматривается арифметическая система выдающегося итальянского математика Джузеппе Пеано.

Один из наиболее значимых результатов в решении второй проблемы Гильберта был достигнут ставшим впоследствии знаменитым – тогда еще молодым австрийским математиком Куртом Геделем. Как известно, Куртом Геделем в 1931 году было доказано существование в классических математических теориях, содержащих аксиоматическую логико-математическую систему PA выдающегося итальянского математика Джузеппе Пеано, таких трансцендентных по отношению к классической аристотелевской традиционной логике, логических формул F и ⌐F, которые с одной стороны хотя и не отрицают закона об исключенном третьем, но с другой стороны и не удовлетворяют ему. При этом первая теорема Геделя по существу означает, что если достаточно богатая формальная или полуформальная математическая теория, содержащая аксиоматику Пеано, является непротиворечивой, то в ней существуют логически трансцендентные по отношению к классической традиционной аристотелевской логике логические формулы F и ¬F, которые не могут быть ни доказаны, ни опровергнуты на основании классической аристотелевской традиционной логики и аксиоматической системы Пеано.

Приведем формулировки теорем Курта Геделя о неполноте формальных и полуформальных логико-математических систем, содержащих систему PA.

Первая теорема Геделя

Существует такое суждение F в аксиоматической системе PA, что ни F, ни ¬F не могут быть доказаны посредством аксиом из PA, если система PA непротиворечива.

Вторая теорема Геделя

Непротиворечивость аксиоматической системы PA (ConsisPA), не может быть доказана в PA, если PA является непротиворечивой.

Ниже приводится содержание традиционной версии аксиоматической системы Пеано - PA.

Аксиомы Пеано

1. 1 есть натуральное число.

2. Для каждого натурального числа n имеется точно одно натуральное число, называемое его последующим и обозначаемое $S(n)$.

3. Всегда имеет место сотношение $S(n) \neq 1$.

4. Из равенства $S(n) = S(m)$ следует $m = n$.

5. Принцип полной индукции. Множество натуральных чисел, содержащее **1** и для каждого из n элементов следующий за ним элемент $S(n)$, содержит все натуральные числа.

Арифметика Пеано

Сложение и умножение натуральных чисел определяется формулами:

$$S(n) = n + 1 \tag{1}$$

$$S(m+n) = m + S(n) \tag{2}$$

$$n \cdot 1 = n \tag{3}$$

$$n \cdot S(m) = n \cdot m + n \tag{4}$$

Необходимо отметить, что кроме аксиоматической системы Пеано, - PA, включающей в себя «Аксиомы Пеано» и «Арифметику Пеано», основания классической математики включают в себя «Метод математической индукции».

Метод математической индукции

Если некоторое утверждение $A(n), n = 1,2,3..........$ справедливо для $n = 1$, и для каждого n из справедливости $A(n)$ при значении n следует справедливость $A(n+1)$ при $n+1$, то утверждение $A(n)$ - справедливо для всех натуральных n, или формально:

$$(\forall n \in N_+)((\forall i \in \{1,...n\})A(n) \equiv 1 \Rightarrow A(n+1) \equiv 1) \Rightarrow (\forall n \in N_+)(A(n) \equiv 1) \qquad (5)$$

Для дальнейшего логически адекватного рассмотрения вопросов логической трансценденции в рамках классической формальной логики нулевого порядка необходимо рассмотреть некоторые основные положения классической формальной логики нулевого порядка.

Основной задачей классической формальной логики нулевого порядка является установление истинностного значения формулы, если определены истинностные значения входящих в нее переменных. Истинностное значение формулы в таком случае определяется индуктивно, с шагами, которые использовались при построении формулы с использованием таблиц истинности логических связок.

Критерий противоречивости и непротиворечивости формул классического исчисления высказываний

Пусть A – некоторая формула классического исчисления высказываний, а $x_1,x_2,\ldots,x_n$ – перечень входящих в нее переменных. Вычислим $R_{a1,a2,..,an}(A)$ на множестве всех наборов значений a_1, $a_2,\ldots,a_n$ входящих в нее переменных. Если при этом $R_{a1,a2,..,an}(A)=0$, на всех наборах a_1, $a_2,\ldots,a_n$, то формула A – *признается тождественно противоречивой*.

Если же существует набор значений переменных такой, что условие $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$ выполняется хотя бы в одном случае из рассматриваемых, то формула A – *признается выполнимой и непротиворечивой*.

Критерий доказуемости и недоказуемости формул классического формального исчисления высказываний

Пусть A – некоторая формула классического исчисления высказываний, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – перечень входящих в нее переменных. Вычислим $R_{a1,a2,..,an}(A)$ на множестве всех наборов значений a_1, $a_2, \ldots, a_n$ входящих в нее переменных. Если при этом $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$, на всех наборах a_1, $a_2, \ldots, a_n$, то формула A – тождественно истинна, *такая формула признается доказуемой*.

Если же существует набор значений переменных такой, что условие $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$ не выполняется , то формула A – не тождественно истинная, *такая формула признается недоказуемой.*

Определение глобальной формальной непротиворечивости логического исчисления высказываний нулевого порядка

Логическое исчисление высказываний в рамках классической формальной логики нулевого порядка называется глобально формально непротиворечивым, если в нем не доказуемы никакие две внешние формулы, из которых одна является отрицанием другой.

Проблема глобальной формальной непротиворечивости заключается в выяснении вопроса: является данное исчисление непротиворечивым или нет? Если в исчислении обнаруживаются внешние, тождественно доказуемые формулы вида A и ¬A , то такое исчисление является глобально формально противоречивым.

Известна следующая, *логически неопровержимо* доказанная Куртом Геделем теорема.

Теорема о глобальной непротиворечивости классического формального исчисления нулевого порядка

Классическое формальное исчисление нулевого порядка обладает свойством глобальной формальной непротиворечивости.

Сказанное выше означает, что моделирование тех или иных логических формул в рамках классической формальной логики нулевого порядка, в соответствии с правилами упомянутой теории, будет являться объективным и будет адекватно отражать логическую природу исследуемых с ее помощью логических формул.

Рассмотрим некоторые основные определения формальной логики, связанные с понятием доказательства в соответствии.

Определение логического доказательства

В логике и математике доказательством логической или математической формулы L при наперед заданных исходных посылках, называется цепочка логических и математических умозаключений, логически истинно свидетельствующая о том, что при наперед заданном наборе аксиом и правил вывода, а также при заданных исходных посылках формула L выводима из исходных посылок.

Определение формального вывода

Формальным выводом называется конечное, упорядоченное множество строк, написанных на формальном языке, таких, что каждая из них является либо аксиомой, либо получена из предыдущих строк применением одного изх правил вывода.

Определение формального доказательства

Формальным доказательством утверждения или логической формулы называется формальный вывод, последней строкой которого является данное утверждение.

Определение теоремы

Утверждение, имеющее формальное доказательство, называется теоремой.

Определение формальной теории

Множество всех теорем в данной формальной модели, рассматриваемое вместе с алфавитом формального языка, множествами аксиом и правил вывода, называется формальной теорией.

В классической формальной логике нулевого порядка все формализуемые законы классической аристотелевской традиционной логики являются истинными логическими формулами.

Как известно, система классической аристотелевской традиционной логики, состоит из трех основных законов, - закона тождества, закона о непротиворечии и закона об исключенном третьем. Далее приводятся основные законы классической аристотелевской логики для аристотелевских высказываний.

Закон тождества

Каждое аристотелевское высказывание логически равно самому себе:

$$A \equiv A \qquad (6)$$

Закон о непротиворечии

Каждое аристотелевское высказывание логически не равно своему отрицанию:

$$\neg(A \equiv \neg A) \qquad (7)$$

Закон об исключенном третьем

Для каждого аристотелевского высказывания, либо само высказывание истинно а его отрицание ложно, либо само высказывание ложно, а его отрицание истинно, третья возможность исключена:

$$(A \equiv 1) \oplus (\neg A \equiv 1) \qquad (8)$$

К числу неформальных законов классической аристотелевской традиционной логики относится «Принцип достаточного основания», сформулированный выдающимся немецким логиком и математиком – Г.В.Лейбницем. Применительно к логико-математическим объектам упомянутый выше принцип можно выразить следующим образом.

Принцип достаточного основания

Каждое логическое и математическое утверждение должно быть логически и аналитически доказано.

Рассмотрим определение аристотелевской истинной формулы.

Определение аристотелевской истинной формулы

Логическая формула, полностью удовлетворяющая трем основным законам классической аристотелевской традиционной логики, и значения истинности которой равны логической **1** при всех значениях, входящих в нее логических переменных, называется аристотелевской истинной логической формулой.

Перейдем к рассмотрению понятия логической трансценденции. Под логической трансценденцией (от лат. transcendentis – перешагивающий, выходящий за пределы) по отношению к классической аристотелевской формальной логике мы понимаем существование и выводимость в рамках современной класической формальной логики нулевого порядка таких логических формул, которые не соответствуют второму и третьему основным законам классической аристотелевской традиционной логики и тем самым выходят за пределы упомянутой логической системы.

Рассмотрим определение слабо трансцендентной логической формулы.

Определение логически слабо трансцендентной формулы

Логическая формула G классической формальной логики нулевого порядка называется логически слабо трансцендентной по отношению к классической аристотелевской традиционной логике, если и сама формула G и ее отрицание $\neg G$ являются непротиворечивыми и вместе с тем недоказуемыми.

Рассмотрим определение сильно трансцендентной логической формулы.

Определение логически сильно трансцендентной формулы

Логическая формула G классической формальной логики нулевого порядка называется логически сильно трансцендентной по отношению к классической аристотелевской традиционной логике, если в рамках классической формальной логики нулевого порядка существует такая система формального вывода, что по отдельности непротиворечиво выводима, как сама формула G , так и ее отрицание $\neg G$.

Определение логически предельно трансцендентной формулы

Логическая формула F классической формальной логики нулевого порядка называется логически предельно трансцендентной по отношению к классической аристотелевской традиционной логике, если формула F и логически инверсная по отношению к ней формула $\neg F$, удовлетворяют одному из следующих сотношений:

(9)

$$F \equiv \neg F$$

$$\neg(F \oplus \neg F)$$

$$F \wedge \neg F$$

$$\neg F \wedge \neg\neg F$$

$$F \Leftrightarrow \neg F$$

$$\neg(F \vee \neg F)$$

$$(F \Rightarrow 0) \wedge (\neg F \Rightarrow 0)$$

$$F \Rightarrow 0$$

Одной из составных частей классической формальной логики нулевого порядка является, определенное в ее рамках множество унарных логических операций, выражаемых приведенной ниже **Таблицей 1.**

Таблица 1. Унарные логические операции

Унарные логические операции				
x	**g1(x)Ξ(¬)**	**g2x Ξ(=)**	**g3(1) Ξ (1)**	**g4(0)Ξ (0)**
0	**1**	**0**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**1**	**0**

В **Таблице 1** унарных логических операций приняты следующие обозначения: **x** – логическая переменная, **g1(x)** – функция отрицания (негации), **g2(x)** – функция тождества, **g3(1)** – тождественная функция логической единицы, **g4(0)** – тождественная функция логического нуля. **0** и **1** — логические, тождественные нуль и единица соответственно.

Определение логически сильно трансцендентной теории

Формальная или полуформальная теория называется предельно трансцендентной, если в ней существуют хотя бы одна пара сильно трансцендентных формул G и $\neg$G.

Определение логически предельно трансцендентной теории

Формальная или полуформальная теория называется предельно трансцендентной, если в ней существуют хотя бы одна пара предельно трансцендентных формул F и $\neg$F, удовлетворяющих одному из соотношений (9).

Перейдем теперь к рассмотрению принципиальной схемы доказательства «Первой теоремы Геделя». Здесь необходимо подчеркнуть, что нас в данном случае интересует именно логические компоненты этого доказательства. Известно, что Геделем была выдвинута логическая формула, которая затем была превращена в арифметическую формулу на основе так называемой «геделевой нумерации», позволяющей перевести исходную логическую формулу в арифметическую. Однако, естественно, что процесс геделевской арифметизации логической формулы не меняет ее исходной логической структуры.

Итак рассмотрим вопрос, какая же логическая формула была выдвинута Куртом Геделем. Являясь блестящим логиком Гедель понимал, что выдвигаемая им формула с одной стороны не должна быть тождественно противоречивой, поскольку такая основа доказательства была бы признана, как «error fundamentalis» в основании доказательства на основании логического закона Дунса Скота, согласно которому из тождественно противоречивой формулы следует любая формула, включая и тождественно противоречивую. С другой стороны Гедель должен был иметь твердую гарантию того, что выдвигаемая им формула, равно как и ее отрицание не могут быть доказаны ни в одной непротиворечивой логико-аналитической формальной или полуформальной системе, содержащей аксиоматическую арифметическую систему Пеано.

Ниже мы покажем, что на множестве унарных операций классической формальной логики нулевого порядка действительно существует непротиворечивая логическая формула, удовлетворяющая сформулированным выше условиям. Именно такой формулой является следующая логическая формула:

$$\neg(x \equiv 1) = \neg\left(\langle 0,1\rangle \equiv \langle 1,1\rangle\right) = \langle 1,0\rangle \tag{10}$$

Языковым эквивалентом рассмотренной в (10) формулы является утверждение: «неверно, что формула x является доказуемой». Из (10) и правил классической формальной логики нулевого порядка следует, что логическая формула выдвинутого утверждения является недоказуемой, но вместе с тем и непротиворечивой, следовательно и само утверждение является с одной стороны недоказуемым, а с другой стороны непротиворечивым. Истинностная оценка (10) представленной формулы свидетельствует о том, что с точки зрения классической формальной логики нулевого порядка утверждение «неверно, что формула x является доказуемой» является недоказуемым, и вместе с тем непротиворечивым.

Рассмотрим теперь отрицание логической формулы (10), а именно:

$$\neg(\neg(x \equiv 1)) = \neg\langle 1,0 \rangle = \langle 0,1 \rangle \tag{11}$$

Из (11) и правил классической формальной логики нулевого порядка следует, что и эта логическая формула, с одной стороны является недоказуемой, а с другой стороны непротиворечивой. Языковым эквивалентом рассмотренной в (11) формулы является утверждение: неверно, что «неверно, что формула x является доказуемой». По правилу снятия двойного отрицания классической формальной логики, последнее утверждение логически эквивалентно утверждению: «формула x является доказуемой». Согласно истинностной оценки (11) представленная формула является с одной стороны недоказуемой, а с другой стороны непротиворечивой.

Из приведенного выше рассуждения мы получаем *две непротиворечивые* логические формулы, выражаемые следующими утверждениями.

G: «неверно, что формула x является доказуемой». (12)

¬G: «формула x является доказуемой». (13)

Итак мы получили два результата. Первый результат рассматривается Геделем с позиций классической формальной логики нулевого порядка и заключается в том, что представленные контрадикторно противоположные друг другу логические формулы классической формальной логики нулевого порядка – (10) и (11) одновременно являются с одной стороны непротиворечивыми, а с другой стороны недоказуемыми. Этот результат и доказывает «Первую теорему Геделя».

Второй результат рассматривается Геделем уже с позиций классической аристотелевской традиционной логики, в которой действует закон исключенного третьего, где непротиворечивость утверждений означает их истинность. То есть, поскольку формулы (12) и (13) непротиворечивы, то с точки зрения аристотелевской традиционной логики они являются истинными. Но в таком случае возникает антиномия:

«неверно, что формула x является доказуемой» - истинно

и одновременно (14)

«формула x является доказуемой» - истинно

Логическая ситуация, определяемая парой утверждений (14) в классической аристотелевской традиционной логике квалифицируется как антиномия, т.е. противоречие.

Мы знаем, что в рамках аксиоматической арифметической системы Пеано, с помощью геделевской нумерации логических формул и утверждений, Геделем были переведены сответствующие логические формулы и утверждения в логически эквивалентные арифметические формулы. Поскольку (14) с точки зрения классической аристотелевской традиционной логики является антиномией, т.е. противоречием, то и соответствующие им арифметические формулы также выражают противоречие. А это означает, что с использованием аксиоматической арифметической системы Пеано, *Геделем была выведена антиномия, т.е. противоречие на множестве высказыаний арифметической аксиоматической теории Пеано*. Совершенно естественно и понятно, что поскольку противоречие получено, - *аристотелевская непротиворечивость арифметической аксиоматической теории Пеано не может быть доказана*, поскольку уже доказано обратное. Именно этот смысл имеет «Вторая теорема Геделя», с учетом приведенного выше логического анализа фактически говорящая о том, что *непротиворечивость противоречивой теории может быть доказана только в противоречивой теории, а теория в которой выведена антиномия не может уже считаться непротиворечивой в аристотелевском понимании непротиворечивости*.

Таким образом, *истинный смысл* «Второй теоремы Геделя» заключается в том, что классическая аристотелевская непротиворечивость каждой формальной или полуформальной теории, включающей аксиоматическую арифметическую систему **PA**, классическую формальную логику нулевого порядка, а также классическую формальную логику первого порядка *не может быть доказана непротиворечиво,* поскольку метод Курта Геделя *доказывает прямо обратное* для самой системы **PA** *с присоединенными к ней классической формальной логикой нулевого порядка и классической формальной логикой первого порядка*.

Исторически известно, что открытие Геделя явилось настоящим потрясением для математического научного сообщества того времени. Дело в том, что «Теоремы Геделя» касаются не только оснований математики, - а также, и может быть в первую очередь, - оснований самой классической формальной логики нулевого и первого порядков, и аристотелевской логики. Если с позиций классической формальной логики нулевого порядка геделевские формулы (10) и (11) являются непротиворечивыми, то их точные логические образы в классической аристотелевской традиционной логике в виде утверждений (12) и (13) образуют антиномию, т.е. аристотелевское формальное противоречие. При этом рассматриваемая нами геделевская антиномия получена заведомо финитными методами, без рассмотрения вопросов, связанных с бесконечностью. Это означает, что *сочетание* классической аристотелевской традиционной логики с классической формальной логикой нулевого и первого порядка *может генерировать логические антиномии*.

Приведенные выше результаты подтверждаются исследованиями, проведенными с применением методов формально-логической и теоретико-множественной системы **INCOL&TAMLA /1/**.

В частности в работе /2/ были сформулированы и доказаны следующие теоремы.

Теорема о слабой логической трасценденции (Ахвледиани А.Н. - 2011)

На множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка существуют логически слабо трансендентные формулы G и $\neg G$ по отношению к классической традиционной аристотелевской логике.

Теорема о предельной логической трансценденции (Ахвледиани А.Н. – 2011)

Классическая формальная логика нулевого порядка является логически предельно трансцендентной формальной логической системой. На множестве унарных логических операций выводима по крайней мере одна логически предельно трансцендентная формула.

В работе /3/ сформулирован и доказан на множестве бинарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка «Первый принцип логико-математической трансценденции».

Первый принцип логико-математической трансценденции (Ахвледиани А.Н. - 2011)

В классической формальной логике нулевого порядка существуют такие логически сильно трансцендентные формулы А и ¬А, что по отдельности логически непротиворечиво выводимы, как А так и ¬А.

Таким образом, приведенные выше результаты, полученные в рамках системы **INCOL&TAMLA** раскрывают *истинный смысл «Теорем Геделя»*, и доказывают существование явления логико-математической трансценденции в основаниях классической теоретико-множественной математики, а также в основаниях классической формальной логики.

В целях дальнейшего адекватного описания реального положения дел в основаниях классической формальной логики и теории множеств, мы обратимся к методу выдающегося немецкого математика Феликса Хаусдорфа, позволяющего при соблюдении определенных условий преобразовывать те или иные исходные множества в топологические пространства.

Метод преобразования исходных множеств в общие топологические пространства будем описывать в соответствии с /3/.

Определение операции замыкания по Хаусдорфу

Говорят, что в множестве R установлена операция замыкания, если каждому подмножеству $M \subset R$ поставлено в соответствие некоторое множество $\overline{M} \subset R$. $\overline{M}$ называется замыканием множества M.

Определение общего топологического пространства по Хаусдорфу

Множество R, в котором установлена операция замыкания, называется общим топологическим пространством по Хаусдорфу (или по другому – общим топологическим хаусдорфовым пространством). Элементы общего топологического пространства называются его точками. Подмножества пространства R называются точечными множествами. Элементы замыкания $\overline{M}$ называются точками прикосновения множества M.

Если в одном и том же множестве установлены две разных операции замыкания, то мы имеем два разных топологических пространства.

Рассмотрим теперь процесс построения логических общих топологических хаусдорфовых пространств в классической формальной логике нулевого порядка. Пусть в общем случае определены логические операции на множестве всех $n(n = 1,...,m,...,N)$ - арных логических отношений, где N - сколь угодно большое конечное натуральное число. Обозначим через $x_j(m)$ - j $(j = 1,...J)$ - ый вектор значений логического аргумента на множестве m - арных логических операций классической формальной логики нулевого порядка. Для пояснения, в качестве примера рассмотрим следующий частный случай фиксированного вектора :

$$x_j(3) \equiv \langle 0,1,1 \rangle \tag{15}$$

Формула (15) означает, что в данном случае рассматривается фиксированный вектор значений логического аргумента на множестве тернарных логических операций.

Определение явной логической формулы

Явной логической формулой на множестве m - арных логических операций классической формальной логики нулевого порядка называется формула вида

$$G\langle x_j \rangle \equiv g\langle x_1,..., x_j,...x_J \rangle \tag{16}$$

в общем случае выражающая логическую функциональную связь между логическими аргументами $\langle x_j \rangle$ и функцией $G\langle x_j \rangle$ на основе принятых в классической формальной логике правил применения логических операторов.

Определение неявной логической формулы

Неявными логическими формулами на множестве m - арных логических операций классической формальной логики нулевого порядка называются формулы вида

$$g\langle x_1,..., x_j,...x_J \rangle = 1 \tag{17}$$

$$g\langle x_1,..., x_j,...x_J \rangle = 0 \tag{18}$$

Из рассмотрения формул (16)-(18) можно сделать вывод, что существуют определенные различия между явными и неявными логическими формулами. А именно, при определении явной логической формулы был применен логический оператор тождества, тогда как при определени неявной логической формулы применен оператор равенства значений истинности, а это означает, что в данном случае рассматриваемая неявная логическая функция определяет множество комбинаций векторов логических аргументов, удовлетворяющих данному равенству. В частном случае формулы (17) и (18) могут принимать следующий вид:

$$g\langle x_1,..., x_j,...x_{2J} \rangle \equiv 1 \tag{19}$$

$$g\langle x_1,..., x_j,...x_J \rangle \equiv 0 \tag{20}$$

Определение логически инверсной формулы

Для формулы (16) логически инверсной является формула

$$\neg g\langle x_1,..., x_j,...x_J \rangle \tag{21}$$

Логические формулы (17) и (18) являются взаимно логически инверсными. Логические формулы (19) и (20) также являются взаимно логически инверсными.

Определение общего топологического инверсного логического пространства и его элементов

Общее топологическое инверсное логическое пространство SL определяется на основании введения операции замыкания на множестве всех $n(n = 1,\dots, m, \dots N)$ - арных логических операций классической формальной логики нулевого порядка. Упомянутая операция замыкания определена следующем образом.

a. Каждой логической формуле на каждом множестве m арных логических операций ставится во взаимнооднозначное соответствие логически инверсная ей формула.
b. Из пункта (а) непосредственно следует, что каждому подмножеству L логических формул множества SL всех логических формул классической формальной логики нулевого порядка сответствует его замыкание $\overline{L}$.
c. SL - называется общим топологическим инверсным пространством классической формальной логики нулевого порядка.
d. Логические формулы пространства SL называются его обобщенными логическими точками или по иному – его логическими элементами.
e. Каждое подмножество L пространства SL называется точечным логическим множеством.
f. Множество логических формул $\overline{L}$ называется логическим замыканием L.
g. Логические точки (или что то же самое – логические элементы) логического замыкания $\overline{L}$ называются логическими точками соприкосновения точечного логического множества L.

Введеное нами определение и построение общего топологического логического пространства SL позволяет рассматривать достаточно широкий спектр вопросов, связанных с изучением логических и топологических свойств классической формальной логики нулевого порядка.

Нами было дано определение истинной аристотелевской логической формулы. Дадим также определение аристотелевски противоречивой логической формулы.

Определение аристотелевски противоречивой логической формулы

Логическая формула, полностью удовлетворяющая трем основным законам классической аристотелевской традиционной логики, и значения истинности которой равны логической **0** при всех значениях, входящих в нее логических переменных, называется аристотелевской истинной логической формулой.

Определение аристотелевской логической формулы

Логическая формула, являющаяся или истинной аристотелевской логической формулой, или аристотелевски противоречивой логической формулой называется аристотелевской логической формулой.

Определение неаристотелевской логической формулы

Каждая логическая формула, не являющаяся аристотелевской логической формулой, называется неаристотелевской логической формулой.

Из определения логически слабо трансценедентной формулы, формул (10)-(11), иллюстрирующих доказательство «Теорем Геделя» и определения логического пространства SL, следует, что в пространстве SL существуют логически слабо трансцендентные формулы, имеющие точные логические образы G и ¬G, удовлетворяющие определениям предельно трансцендентных логических формул. Это обстоятельство означает, что в логическом пространстве SL кроме аристотелевских логических формул, существуют также неаристотелевские логические формулы, являющиеся логически трансцендентными.

Определение логически сингулярного пространства

Логическое пространство, содержащее в качестве элементов как аристотелевские, так и логически трансцендентные формулы называется логически сингулярным.

Таким образом логически инверсное общее топологическое пространство SL является логически сингулярным.

Как это следует из «Первого принципа логико-математической трансценденции» /4/, в пространстве SL на множестве бинарных логических операций существуют такие логически сильно трансцендентные формулы A и ¬A, что по отдельности непротиворечиво доказуемы, как формула A, так и ¬A.

Сказанное выше позволяет нам дать следующую классификацию логических формул логически сингулярного пространства SL.

Классификация логических формул логически сингулярного пространства SL

1. Аристотелевские логические формулы.
2. Логически слабо трансцендентные формулы.
3. Логически сильно трансцендентные формулы.
4. Логически предельно трансцендентные формулы.

Таким образом мы видим, что в классической формальной логике нулевого порядка кроме аристотелевской формальной логики существует также логически трансцендентная по отношению к аристотелевской логике – трансцендентная формальная логика. Совокупность аристотелевской формальной логики и трансцендентной формальной логики образует сингулярную формальную логику.

В работе /5/ сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема о генезисе логической трансценденции в основании классической математики (Ахвледиани А.Н. – 2011)

Конструктивное существование счетного кортежа LCU логического коллапса на множестве унарных логических операций является достаточным условием для генезиса и счетного кортежа истинности $U1$, свидетельствующего о конструктивной осуществимости генезиса логической трансценденции на множестве унарных логических операций в каждой логико-математической формальной или полуформальной теории, содержащей классическую формальную логику нулевого порядка, «Метод математической индукции» и «Аксиому выбора».

Приведенная выше теорема является неопровержимым свидетельством о конструктивной осуществимости логического коллапса и генезиса логической трансценденции на множестве унарных логических операций в каждой логико-математической формальной или полуформальной теории, содержащей классическую формальную логику нулевого порядка, «Метод математической индукции» и «Аксиому выбора». Это означает, что в основаниях классической теоретико-множественной математики существует трансцендентная логика, являющаяся логически инверсной по отношению к классической аристотелевской традиционной логике.

Таким образом, с учетом приведенных выше доказательств мы можем заключить, что в основаниях классической формальной логики нулевого порядка и основаниях классической теоретико-множественной математики кроме аристотелевской классической традиционной логики существует также трансцендентная формальная логика. Совокупность аристотелевской классической традиционной логики и трансцендентной формальной логики образует сингулярную формальную логику в основаниях классической теоретико-множественной математики, содержащей классическую формальную логику нулевого порядка, «Метод математической индукции» и «Аксиому выбора», что и является логически сингулярным решением «Второй проблемы Гильберта» для оснований классической теоретико-множественной математики.

Используемые источники:

1.Ахвледиани А.Н. О трансцендентной формально-логической и теоретико-множественной системе INCOL&TAMLA. Энциклопедический фонд Russika. 2011.

2.Ахвледиани А.Н. Теоремы о генезисе логической трансценденции в основаниях классической математики. Энциклопедический фонд Russika. 2011.

3.Ф. Хаусдорф. Теория множеств (стр101). URSS. Москва. 2007.

4.Ахвледиани А.Н. Первый принцип логико-математической трансценденци системы INCOL&TAMLA. Энциклопедический фонд Russika. 2011.

5.Ахвледиани А.Н. Теорема о генезисе логической трансценденции в основании классической математики. Энциклопедический фонд Russika. 2011.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

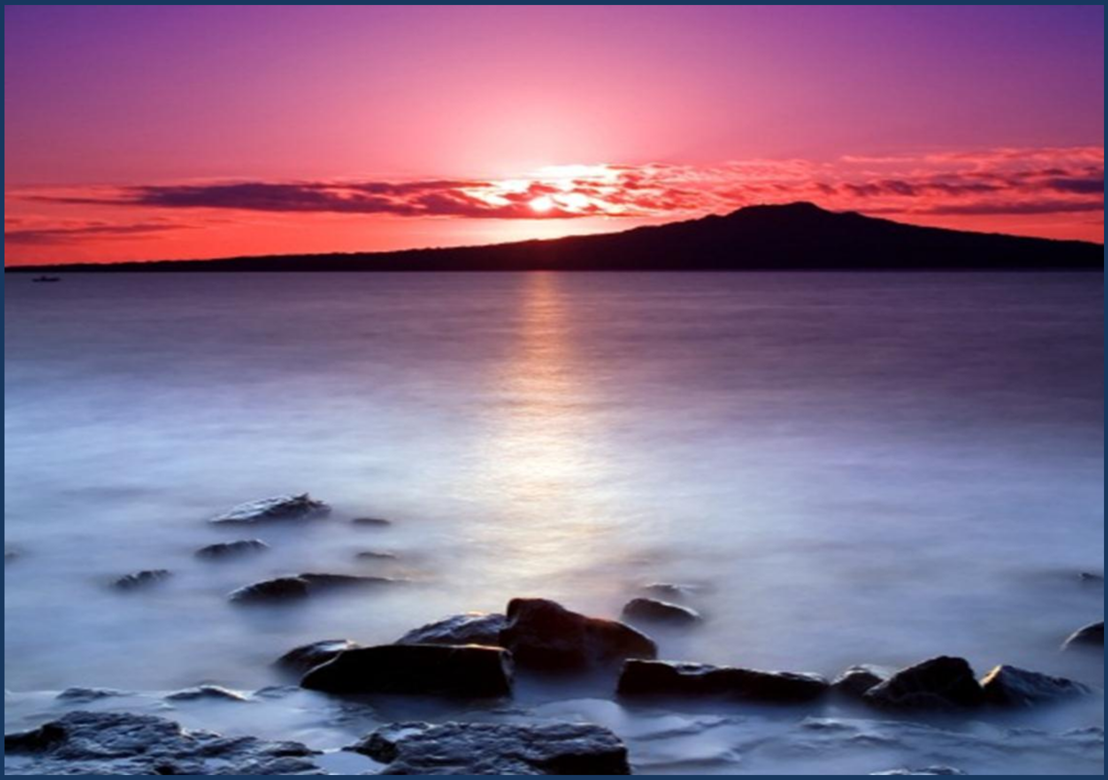
В заключение мы проанализируем результаты представленного выше исследования по изучению явления логической трансценденции в основаниях классической формальной логики и классической теории множеств.

В первую очередь необходимо отметить, что несмотря на то обстоятельство, что все формализуемые в рамках классической формальной логики нулевого порядка логические формулы аристотелевской традиционной логики являются истинными также и в классической формальной логике нулевого порядка, тем не менее классическая формальная логика нулевого порядка в значительной степени отличается от аристотелевской традиционной логикой высказываний. Ниже приведены пункты, согласно которым можно судить об упомянутом различии.

1. В классической формальной логике нулевого порядка существуют такие непротиворечивые логические формулы, которые не соответсвуют третьему основному закону аристотелевской логики об исключенном третьем.
2. В классической формальной логике нулевого порядка существуют такие непротиворечивые логические формулы, конъюнкция которых приводит к образованию тождественно противоречивой формулы. В аристотелевской традиционной логике конъюнкция непротиворечивых формул наоборот всегда является истинной.
3. В классической формальной логике нулевого порядка существуют такие логические непротиворечивые формулы А и ¬А, что по отдельности непротиворечиво можно вывести, как А так и ¬А. В аристотелевской традиционной логике эта логическая ситуация квалифицируется как антиномия, то есть как противоречие.
4. В ряде случаев сочетание классической формальной логики нулевого порядка с аристотелевской традиционной логикой приводит к образованию антиномий, то есть аристотелевских противоречий.
5. Аристотелевская традиционная логика является неполной, поскольку не может дать логически адекватное решение классических парадоксов. Классическая формальная логика нулевого порядка является полной, может дать адекватное решение классических парадоксов.
6. В пространстве логических формул классической формальной логики нулевого порядка аристотелевская традиционная логика является лишь частным случаем, а в этом же пространстве существует также логически предельно трансцендентная логическая система, являющаяся логически инверсной по отношению к системе аристотелевской традиционной логики.
7. Аристотелевская традиционная логика и классическая формальная логика нулевого порядка имеют различные критерии непротиворечивости.

В свете исследования логических особенностей классической теории множеств и аксиоматической системы Пеано можно отметить следующие обстоятельства.

1. Принятие «Аксиомы пустого множества» делает невозможным логическое отсечение аристотелевски противоречивых классов.
2. «Теорема Кантора» в общем случае не является верной, поскольку нарушается для бесконечного сингулярного множества U.
3. Каждое множество типа b, удовлетворяющее «Аксиоме регулярности» является элементом логически трансцендентного R-класса Рассела.
4. Отрицание конструктивного существования логически предельно трансцендентных классов недоказуемо в аксиоматических системах ZF и ZFC.
5. «Аксиома выбора» в сочетании с «Методом математической индукции» и глобально непротиворечивой классической формальной логикой нулевого порядка в ряде случаев приводит к образованию множественных аристотелевских противоречий и генезису логически предельно трансцендентной формально-логической системы.
6. Несмотря на то, что аксиоматическая система Пеано, согласно результатам Герхарда Генцена является внутренне непротиворечивой, вместе с этим она в сочетании с «Аксиомой выбора» и глобально непротиворечивой классической формальной логикой нулевого порядка в ряде случаев образует множественные аристотелевские противоречия, эквивалентные логически предельно трансцендентным формулам.
7. «Теоремы Геделя» свидетельствуют о генезисе аристотелевских противоречий при сочетании аксиоматической системы Пеано, аристотелевской традиционной логики и классической формальной логики нулевого порядка.
8. Сочетание основных аксиом теории ZFC с аристотелевской традиционной логикой и классической формальной логикой нулевого и первого порядка образует сингулярную формально-логическую систему, содержащую множественные логически предельно-трансцендентные формулы, логически эквивалентные отрицанию второго и третьего законов аристотелевской традиционной логики.
9. Снятие вопроса аристотелевской противоречивости в основаниях классической теории множеств возможно лишь при условии введения в явном виде трансфинитного времени при описании бесконечных множеств и связанных с ними бесконечных процессов.
10. В теории множеств и классов в связи с необходимостью введения времени в явном виде, необходимо также учитывать A и B логики времени.



«INCOL»

Israel - Georgia

2011