ЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ПАРАДОКСОВ ТРАДИЦИОННОЙ ЛОГИКИ

Александр Нодарович Ахвледиани

31 октября 2011 г.

Информационный портал «Орифламма»

Донецк, Украина

Международное научно-техническое общество

«INCOL»

Кармиэль, Израиль

ЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ПАРАДОКСОВ ТРАДИЦИОННОЙ ЛОГИКИ

А.Н. Ахвледиани

Научно-техническое общество «INCOL» (Israel – Georgia)

E-mail – alexanderakhvlediany@yandex.ru

Аннотация

В настоящей работе предлагается анализ и решения некоторых классических парадоксов традиционной логики. Показано отличие логической структуры условий упомянутых парадоксов от логической структуры аристотелевской традиционной логики. Логический анализ и решения рассматриваемых парадоксов осуществлены на основе классической формальной логики нулевого порядка.

Введение

Об основных законах аристотелевской традиционной логики

Современная наука прошла долгий путь зарождения, становления и развития различных конкретных областей точных, естественных, гуманитарных, философских и иных наук. Пожалуй не будет преувеличением сказать, что одной из основных составляющих развития науки в целом, а в особенности точных и естественных наук, является наука логики, позволяющая систематизировать опытные и аналитические данные тех или иных конкретных наук, и способствующая дальнейшему развитию тех или иных областей науки, на основе имеющихся базовых эмпирических и аналитических данных.

Учение о Логосе, как об основе развития мира в целом, и в том числе развития жизни на Земле, а также основе развития человеческого общества, восходит к незапамятным временам Древнего Мира. Судя по имеющимся современным данным, исторически, основой развития мировой науки являлись сакральные знания, полученные людьми Древнего Мира от еще более ранних, высокоразвитых цивилизаций. Частью утерянные, а частью бережно охраняемые от посторонних взоров непосвященных, эти сакральные знания воплотились в различные формы человеческого знания, а также нашли свое выражение в различных теологических, философских, эзотерических и мистических учениях Древнего Мира.

В античное время следы древних сакральных знаний, можно обнаружить в различных философских учениях и литературных памятниках античного времени, которые ныне являются достоянием широкой научной общественности.

К числу упоминаемых нами выдающихся философских памятников античного времени, без сомнения можно отнести «Изумрудную скрижаль» Гермеса Трисмегиста – легендарной личности, одно из древнейших упоминаний о котором содержится в трактате Цицерона «О природе Богов».

В «Изумрудной скрижали» легендарный Гермес Трисмегист утверждает об истинности соответствия *«Верхнего»* невидимого нами мира, и частично наблюдаемого нами *«Нижнего»* земного мира. Также истинно утверждается об единой *Сущностной Основе* мироздания, являющейся также и основой развития видимого и невидимого миров как *единого целого*.

Учение о Логосе, нашло одно из своих выражений в философском учении знаменитого древнегреческого философа Гераклита Эфесского (примерно 544-483гг. до н.э). Согласно учению Гераклита, все произошло из огня и пребывает в состоянии постоянного изменения. Огонь – наиболее динамичная и изменчивая из всех стихий. Согласно представлениям Гераклита огонь сгущается в воздух, воздух превращается в воду, вода – в землю («путь вниз», который затем сменяется «путем наверх»). Сама Земля по Гераклиту некогда была частью всеобщего раскаленного огня – но затем остыла.

В соответствии с учением Гераклита, *Логос* имеет функцию управления вещами, процессами и космосом. Гераклит считал, что все непрерывно меняется. Положение о всеобщей изменчивости связывалось Гераклитом с идеей внутренней раздвоенности вещей и процессов на противоположные, взаимодействующие друг с другом стороны. По Гераклиту – *Логос* есть единство противоположностей, системообразующая связь. «Из Единого все происходит, и из всего – Единое».

Из истории античной логики известно, что одним из наиболее сильных философских и логических направлений в Древней Греции являлось учение софистов. Софи́сты (от др.-греч. — умелец, изобретатель, мудрец, знаток) — древнегреческие платные преподаватели красноречия, представители одноименного философского направления, распространенного в Греции во 2-ой половине V — 1-й половине IV веков до н. Э. В широком смысле термин «софист» означал *искусного или мудрого человека*. К наиболее известным старшим софистам относятся Протагор Абдерский, Горгий из Леонтин, Гиппий из Элиды, Продик Кеосский, Антифонт, Критий Афинский.

Старшие софисты — Протагор, Горгий, Продик и Гиппий — были выдающимися учеными своего времени. До софистов философы в основном занимались исследованием природы, софисты же сделали главным предметом своего философского исследования человека и его деятельность. На первое место выступают вопросы политики, этики, теории государства и права, начинают разрабатываться риторика, филология, грамматика и т. д. Протагор и Продик одними из первых стали заниматься вопросами научного языкознания; Протагор, Горгий и Трасимах одними из первых в Греции стали создавать теорию риторики.

Знаменитое положение софиста Протагора - «человек есть мера всех вещей», - исходило из учения Гераклита о всеобщей текучести и изменчивости всего существующего. Поскольку в каждый момент изменяется, как воспринимающий субъект, так и воспринимаемый им объект, то восприятие субъекта каждым человеком относительно и субъективно. *По мнению софистов, для каждого истинно то, что ему кажется таковым в данное время.*

Учение Протагора *о человеке, как мере всего существующего*, о том, что *у каждого человека в каждый момент особая истина*, что *одной и той же вещи могут быть одновременно приписаны противоположные свойства*, положило начало релятивистской и субъективистской теории познания софистов. Релятивизм софистов получил особенно яркое выражение в анонимном сочинении «Двоякие речи», в котором развивается учение об относительности человеческих понятий о добре и зле, о прекрасном и безобразном, о справедливости и несправедливости, об истине и лжи. Автор говорит, *что и судьи одну и ту же речь могут расценивать и как ложь, и как истину*. Одна и та же вещь бывает одновременно и легкой и тяжелой, в зависимости от того, с какой другой вещью она сравнивается.

Разрабатывая теорию красноречия, софисты не могли не затронуть вопросов логики, рассматривая их под углом зрения техники спора. Протагор написал специальное сочинение «Искусство спорить». Исходя из положения, что *о всякой вещи есть два противоположных мнения*, он первый *стал применять диалог, в котором два собеседника в споре защищали два противоположных взгляда.*

Софисты были весьма искусными изобретателями парадоксов. В широком смысле парадокс – это положение, резко расходящееся с общепринятыми, устоявшимися, ортодоксальными мнениями. Обычно парадокс представляет собой начало такого исследования, некое нарушение конвенции. Парадокс в более узком значении – это два противоположных утверждения, для каждого из которых имеются кажущиеся убедительными аргументы. Наиболее острая форма парадокса – антиномия, рассуждение, доказывающее приемлемость двух утверждений, одно из которых является отрицанием другого.

В последующее время великим древнегреческим мыслителем Аристотелем (примерно 384-322 до н.э.) была разработана совершенно иная логическая система, которая в дальнейшем и явилась базой для развития логики, как науки о формах мышления и способах восприятия окружающей объективной действительности.

Одним из наиболее важных условий возможности адекватного изучения объектов методами *классической аристотелевской традиционной логики – является условие детерминированности и неизменности свойств изучаемых объектов*. Другим важным требованием является то обстоятельство, что *традиционная классическая логика принимает к рассмотрению те и только те высказывания об исследуемых объектах и явлениях*, которые удовлетворяют следующим трем основным законам логики .

А. <u>Закон тождества</u>

Каждое высказывание логически равно самому себе.

$$A = A \tag{1}$$

Б. <u>Закон непротиворечия</u>

Никакое высказывание логически не равно своему отрицанию

$$A \neq \neg A \tag{2}$$

В. <u>Закон исключенного третьего</u>

Для любого высказывания – истинно либо само высказывание либо его отрицание, <u>третья возможность</u> исключена.

$$A \oplus \neg A \tag{3}$$

В формулах (1)-(3) приняты следующие обозначения:

A - некоторое высказывание, $\neg A$ - отрицание высказывания A. $\oplus$ - логическая пропозициональная связка, языковым эквивалентом которой является исключающее «либо», $\neg$ - символ отрицания, языковый эквивалент которого выражается, как «не - A», или выражением «не верно, что A » .

Необходимо отметить, что в аристотелевской традиционной логике допустимо рассматривать те, и только те высказывания, которые удовлетворяют перечисленным выше логическим законам. *Только при соблюдении этого условия*, в отношении таких высказываний будут справедливы все те законы аристотелевской традиционной логики, которые логически совместны с перечисленными выше основными законами.

Понятие «Истины» является одной из фундаментальных религиозных, философских и логических категорий. В различных философских и логических системах оно определяется по разному. Одной из основных традиционной концепций понятия истины *в рамках классической философии* является концепция, основные положения которой были сформулированы еще великим древнегреческим мыслителем Аристотелем, и развиты в работах философов последующего времени. Главное из этих положений сводится к утверждению: «*истина есть соответствие вещи и интеллекта*». В *традиционном классическом смысле* истина – это адекватная информация об объекте, получаемая посредством чувственного и интеллектуального изучения, или принятия сообщения об объекте, *и характеризуемая с позиции достоверности*. В аристотелевской традиционной логике, для которой значение истинности высказываний является одним из преимущественных предметов изучения, одним из критериев истинности выступает логическая правильность – относительная полнота формально-аксиоматических систем и отсутствие в них противоречий.

Одним из важных итогов философских исследований выступает различие между абсолютной и относительной истиной. Абсолютная истина – это полное, исчерпывающее знание о мире или о некоторой совокупности его объектов (в частности *одного объекта*), как о сложно организованных системах. Относительная истина – это неполное, *но в некоторых отношениях верное знание* в отношении тех же систем. Относительная истина – философское понятие, отражающее утверждение, что абсолютная истина (или истина в «последней инстанции») трудно достижима.

Одним из основных понятий классической логики высказываний является понятие противоречия. В аристотелевской традиционной логике оно имеет несколько интерпретаций.

• Противоречие – положение, при котором одно высказывание исключает другое высказывание, логически несовместное с ним.

• Противоречие – утверждение о тождественном равенстве двух или более заведомо различных объектов.

• Антиномия – в классической традиционной логике – противоречие между двумя высказываниями одинаково логически доказуемыми.

Отметим, что антиномия является особым видом противоречия, постольку поскольку возможна такая логическая ситуация, при которой *логически выводимыми* являются, как доказательство самого утверждения, так и его опровержения.

К числу *неформальных* аксиом традиционной классической логики относится сформулированный в завершенном виде выдающимся математиком, философом и логиком Г.В. Лейбницем «**Принцип достаточного основания»** - принцип, требующий, чтобы в случае каждого утверждения указывались убедительные основания, в силу которых оно принимается и считается истинным. Обоснование теоретического утверждения, как правило, слагается *из целой серии процедур*, касающихся не только самого утверждения, но и той теории, составным элементом которой оно является.

В своих трудах Аристотель очерчивает рамки применимости закона о непротиворечии и закона об исключенном третьем. В его сочинениях отмечается, «*что законы непротиворечия и исключенного третьего не имеют силы в суждениях о будущем: если кто-нибудь утверждает, что что-либо случится в будущем, а другой отрицает это, то здесь нет логического противоречия, потому что, пока факт не совершился, возможно как то, так и другое, поскольку будущее не является необходимо детерминированным, оно зависит от случайностей, зависит и от воли людей, и от их поведения*».

Упомянутое выше мнение самого основоположника классической традиционной формальной логики о границах применимости закона о непротиворечии и закона об исключенном третьем *заслуживает самого серьезного внимания*. По существу дела аристотелевская классическая традиционная логика применима только при исследовании вопросов, происходящих в настоящем, или исследовании вопросов и явлений, имевших место в прошлом, к тому же при том обязательном условии, что имеется достоверная информация о соответствующих явлениях и событиях. Также предполагается, что существуют критерии истинности, в соответствии с которыми можно достоверно оценивать истинность, либо ложность утверждений, связанных с исследуемыми явлениями и процессами.

Как известно, классическая математика занимается преимущественно изучением явлений и процессов, связанных с бесконечностью. Однако, по вполне понятным причинам, связанным с границами применимости классической аристотелевской традиционной логики, в классической математике при изучении свойств бесконечных величин и множеств, как правило избегали рассмотрения в явном виде зависимости изучаемых бесконечных величин от времени. Это можно объяснить тем, *что учет времени в явном виде, сразу же ставит под сомнение законность применения некоторых классических методов косвенного доказательства*, таких например, как метод доказательства от противного, который самым непосредственным образом связан со вторым и третьим основными законами классической аристотелевской традиционной логики, и часто применяется в тех случаях, когда на основании прямых методов доказательства не представляется возможным найти решение той или иной сложной проблемы.

Однако в современной классической теоретико-множественной математике функция времени является совершенно законным и стандартным инструментом изучения явлений и процессов, связанных с бесконечностью. В основе понятия функции времени лежит множество $T \subseteq R$ с элементами t, называемое множеством моментов времени. Время обладает той характерной особенностью, что представлено упорядоченным множеством.

Это означает, что если $t_1, t_2 \in T$ и $t_1 < t_2$, то момент времени t_1 предшествует моменту времени t_2. Иными словами, T является упорядоченным множеством.

Функция времени определяет отображение f множества моментов времени T на множество вещественных чисел R:

$$f : T \to R \tag{4}$$

Элементами f будут пары (t, x), обозначаемые также через $x(t)$, где $t \in T, x \in R$. Каждая такая пара определяет значение функции времени в момент t. Полная совокупность пар (t, x), т.е. значений $x(t)$ для всех $t \in T$, и представляет собой функцию времени.

Введение функции времени сразу же ставит вопрос о необходимости учета так называемых **A** и **B** логик времени, одна из которых ориентирована на временной ряд «прошлое-настоящее-будущее», а другая на временной ряд «раньше-одновременно-позже». Это обстоятельство, в свою очередь, означает выход за пределы классической аристотелевской традиционной логики.

В настоящей работе исследуются вопросы соотношения классической аристотелевской традиционной логики и современной классической формальной логики нулевого и первого порядков. Представляет интерес то обстоятельство, что несмотря на то, что все формализуемые логические формулы классической аристотелевской традиционной логики являются истинными логическими формулами классической формальной логики нулевого порядка, тем не менее, классическая формальная логика нулевого порядка в сильной степени отличается от классической аристотелевской логики в смысле однозначной выполнимости второго и третьего основных законов классической аристотелевской логики.

Проведенное в рамках настоящей работы исследование показывает, что современная классическая формальная логика нулевого порядка обладает гораздо более сильными доказательными возможностями по сравнению с аристотелевской традиционной логикой. Предлагаемые в настоящей работе анализ и решения классических парадоксов традиционной логики свидетельствуют об эффективности применения методов логики нулевого порядка в логико-аналитических исследованиях, логическая природа которых выходит за рамки применимости аристотелевской традиционной логики.

Анализ и решения классических парадоксов традиционной логики

1. Парадокс «Тяжба Протагора и Эватла»

Разделяя мнение Аристотеля в отношении классической традиционной логики, согласно которому, при рассмотрении вопросов связанных с будущим, выполнимость второго и третьего основных законов классической традиционной логики не может быть гарантирована автоматически во всех рассматриваемых случаях, приведем в качестве примера эпистемологический анализ известного древнегреческого софистического парадокса «Тяжба Протагора и Эватла», изобретенного в древнегреческой школе софистов, который, как будет показано далее, основывается именно на том обстоятельстве, что включает в себя *договор Протагора с Эватлом, в котором описываются условия договора, которые должны быть выполнены в будущем.*

Парадокс «Тяжба Протагора и Эватла»

У древнегреческого софиста Протагора учился софистике, и в том числе судебному красноречию, некий Эватл. По заключенному между ними договору Эватл должен был заплатить за обучение 10 тыс. драхм только в том случае, если выиграет свой первый судебный процесс. В случае проигрыша первого судебного дела, в соответствии с заключенным договором он вообще не обязан был платить.

Однако закончив обучение, Эватл не стал учавствовать в судебных тяжбах. Как следствие этого обстоятельства, он считал себя свободным от платы за учебу. Это длилось довольно долго, терпение Протагора иссякло, и он сам подал на своего ученика в суд. Таким образом должен был состояться первый судебный процесс Эватла.

Протагор привел следующую аргументацию: «Каким бы ни было решение суда, Эватл должен будет заплатить. Он либо выиграет свой судебный процесс, либо проиграет. Если выиграет, то заплатит по договору, если проиграет, то заплатит по решению суда.

Эватл возражал: «Ни в том, ни в другом случае я не должен платить. Если я выиграю, то я не должен платить по решению суда, если проиграю, то не заплачу по договору.

Для разрешения рассматриваемого парадокса постараемся логически четко сформулировать условия задачи, согласно которым:

1. Протагором подан иск против Эватла на указанную в договоре сумму в 10 тыс.драхм.

2. В случае выигрыша процесса Протагором, он получает указанную в договоре и иске сумму от Эватла.

3. В случае выигрыша дела Эватлом, он получает в качестве компенсации за моральный ущерб, указанную в иске сумму – 10 тыс. Драхм от Протагора.

4. Судья не имеет права отклонить иск Протагора.

5.Судья обязан вынести решение, обеспечивающее непротиворечивость по отношению к условиям договора Протагора с Эватлом, в рамках одного судебного процесса.

6.Существует правовой механизм, обеспечивающий неукоснительное исполнение решения суда в соответствии с договором между Протагором и Эватлом.

Заметим, что хотя аргументация Эватла с точки зрения классической традиционной формальной логики, на первый взгляд, контрадикторно противоположна аргументации Протагора, однако обе аргументации касаются будущего, которое еще не наступило, поэтому в данном случае, в отношении аргументаций Протагора и Эватла, согласно подходу Аристотеля, закон о непротиворечии и закон исключенного третьего не имеют силы.

Указанное обстоятельство означает, что решение данного парадокса не связано с обязательным выполнением второго и третьего основного законов логики. В решении поставленной задачи мы обязаны лишь обеспечить непротиворечивость по отношению к договору Протагора с Эватлом с учетом условий (1) – (6), что как будет показано далее, является возможным, при условии применения *метода непротиворечивого урегулирования конфликтных ситуаций, который представляет собой способ разрешения конфликтной ситуации, путем удовлетворения условиям начального договора между конфликтующими сторонами (в случае принципиального наличия такой возможности).*

Итак, рассмотрим вопрос, каково должно быть решение судьи, чтобы оно удовлетворяло бы условиям договора между Протагором и Эватлом. Судья должен вынести решение в пользу либо Протагора, либо Эватла. Что бы вынести решение в пользу Протагора надо иметь достаточные основания, а их нет, поскольку *первый процесс еще не завершен*. Если же тем не менее вынести решение в пользу Протагора, то сразу же после суда окажется, что решение суда противоречит условиям договора, поскольку Эватл свой первый процесс проиграл. Поэтому решение в пользу Протагора окажется необоснованным. Кроме этого, если вынести решение в пользу Протагора, то в этом случае Эватл не должен платить в силу договора, поскольку он проиграет свой первый процесс. Это означает, что Протагор не получит суммы в 10 тыс. драхм, поскольку Эватл не заплатит ему эту сумму в силу договора. Поэтому в этом случае возникает противоречие с условиями договора – Протагор, выиграв процесс, должен получить 10 тыс.драхм от Эватла, а Эватл не должен платить эти же самые деньги по договору. Ввиду невозможности исполнения решения суда это дело может быть вынесено на повторный судебный процесс, что нарушит условие 5.

Рассмотрим теперь второй из возможных вариантов – судья вынесет решение в пользу Эватла. В этом случае Протагор заплатит 10 тыс. драхм Эватлу по решению суда, а Эватл выплатит Протагору эти же 10 тыс. драхм по договору. Таким образом условия договора, а также условия (1) – (6) и возможность исполнения решения суда будут обеспечены. С учетом рассмотренных выше обстоятельств у судьи есть все основания вынести приговор в пользу Эватла.

Таким образом, в результате решения суда, Протагор *формально получит плату* от Эватла своими же собственными деньгами, *а реальных заработанных* на обучении Эватла денег *он не получит*. Эватл *формально уплатит* Протагору его же собственные деньги, а *реальных своих денег* за обучение *не заплатит*. Итак с формальной и реальной точки зрения *суд выиграет Эватл*, *Протагор дело в суде проиграет*, но по договору *формально получит свои собственные деньги* от Эватла, а на деле – *на обучении Эватла не заработает ничего.*

Теперь вернемся назад к аргументации Протагора и Эватла. С точки зрения судопроизводства, - аргументация Протагора *формально выполнена, а реально нет*. Аргументация Эватла *выполнена реально, а формально нет*. Это означает, что в отношении каждого из суждений Протагора и Эватла, с точки зрения классической традиционной формальной логики невыполнимы законы непротиворечия и исключенного третьего, поскольку с деловой и судебной точки зрения *реальная истина* противоположна *формальной истине*, т.е *реальная истина* на стороне аргументации Эватла, а *формальная истина* – на стороне аргументации Протагора, и несмотря на это, обе *«противоположные друг другу истины»* имеют место в действительности, причем на заключительном этапе судебного процесса с помощью применения *метода непротиворечивого урегулирования конфликтных ситуаций удается непротиворечиво выполнить* все условия договора между Протагором и Эватлом, а также условия (1) – (6).

Необходимо отметить, что исходя из условий договора, у Эватла имеется дополнительная возможность освободиться от обязанности оплатить свое обучение. Для этого ему достаточно, не дожидаясь начала судебного разбирательства, взяться за другой, какой либо заведомо проигрышный для него процесс, или же организовать фиктивное дело и фиктивный процесс с заранее предрешенным проигрышным результатом. В этом случае, он по окончании фиктивного судебного процесса, в соответствии с договором, фактически сразу же будет освобожден от уплаты денег Протагору. Таким образом, мы можем заключить, что договор между Протагором и Эватлом был составлен в ущерб интересам Протагора, и кроме этого, фактически позволяет Эватлу реализовать свое преимущество, невзирая на нарушение им моральных и этических норм в отношении своего учителя.

Из рассуждения, приведенного выше, следует, что решение данного парадокса выходит за рамки аристотелевской традиционной логики вследствие наличия логико-временных элементов, не позволяющих в полной мере применить второй и третий законы аристотелевской традиционной логики. Необходимо отметить, что в приведенном нами эпистемологическом анализе парадокса «Тяжба Протагора и Эватла», мы в неявной форме учитывали логико-временные аспекты рассматриваемой задачи. В частности, в неявной форме учитывался временной ряд «прошлое-настоящее-будущее», характерный для **А-**логики времени.

Из приведенного выше анализа парадокса «Тяжбы Протагора и Эватла» следует, что выполнение второго и третьего основных законов классической формальной логики *не является чем то самим собой разумеющимся*. Наоборот, исходя из «**Принципа достаточного основания»** следует, что в классических полуформальных математических теориях *необходимо иметь достаточно убедительные основания* для того, чтобы считать те или иные утверждения этой теории высказываниями, удовлетворяющими основным законам аристотелевской традиционной логики. Очевидно, что указанное обстоятельство предполагает предъявление более строгих требований к логической строгости классических математических доказательств, основанных на аристотелевской традиционной логике, которые заключаются в необходимости анализа логической структуры доказываемых логических утверждений и формул, и верификации их на соответствие основным законам аристотелевской логики. При систематическом игнорировании упомянутых требований, по мере развития той или иной конкретной классической математической полуформальной теории, с большой степенью вероятности следует ожидать появления в этой теории антиномий и недостоверных выводов, которые в свою очередь могут распространиться и на те области знания, в которых будут использоваться, полученные в упомянутой математической теории результаты.

2. Решение «Парадокса крокодила»

Традиция изобретать и выявлять парадоксы возникла и сохранилась в историческом развитии логики, как науки, вплоть до нового времени. Обычно парадоксы строятся на том, что логика входящих в них утверждений, отличается по своим логическим выразительным свойствам от логики обычных высказываний аристотелевской классической традиционной логики.

В настоящем параграфе мы предлагаем к рассмотрению вариант решения одного из известных парадоксов – «Парадокса крокодила», автором которого традиционно считается античный сицилийский софист Коракс. Вначале изложим суть парадокса.

Парадокс крокодила

«Крокодил выхватил у египтянки, стоявшей на берегу реки, ее ребенка. На ее мольбу вернуть ребенка, крокодил, пролив, как всегда, крокодилову слезу, ответил:

— Твое несчастье растрогало меня, и я дам тебе шанс получить назад ребенка. Угадай, отдам я его тебе или нет. Если ответишь правильно, я верну ребенка. Если не угадаешь, я его не отдам.

Подумав, мать ответила:

— Ты не отдашь мне ребенка.

— Ты его не получишь, — заключил крокодил. — Ты сказала либо правду, либо неправду. Если то, что я не отдам ребенка, — правда, я не отдам его, так как иначе сказанное не будет правдой. Если сказанное — неправда, значит, ты не угадала, и я не отдам ребенка по уговору.

Однако матери это рассуждение не показалось убедительным:

— Но ведь если я сказала правду, то ты отдашь мне ребенка, как мы и договорились. Если же я не угадала, что ты не отдашь ребенка, то ты должен мне его отдать, иначе сказанное мною не будет неправдой.

Кто прав: мать или крокодил? К чему обязывает крокодила данное им обещание? К тому, чтобы отдать ребенка или, напротив, чтобы не отдать его?»

Исследование «Парадокса крокодила» будем вести на основе современной классической формальной логики нулевого порядка. Далее приводятся необходимые базовые определения и правила упомянутой логической системы.

Базовыми понятиями логики высказываний нулевого порядка являются:

- Пропозициональная переменная – переменная, значением которой может быть логическое высказывание.
- Пропозициональная формула – определяется индуктивно следующим образом:

а) Если P – пропозициональная переменная, то P – формула.

Б) Если A – формула, то ¬A – формула.

В) Если A и B формулы, то

$$(A \vee B) \qquad (A \wedge B) \tag{2.1}$$

$$\Rightarrow (A, B) \tag{2.2}$$

также являются формулами.

В формулах (2.1) на первом месте стоит дизъюнкция формул A и B, соответствующая логической связке «A или B». На втором месте стоит конъюнкция, соответствующая логической связке «A и B».

- В соответствии с правилами классической формальной логики нулевого порядка каждая формула может быть получена за конечное число шагов при помощи логических связок и базовых логических переменных.

- Знаки

$$\neg \qquad \wedge \qquad \vee \qquad \to \tag{2.3}$$

обозначают отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию (логическое следование). Например ¬A означает отрицание высказывания A. Выражение (2.2) означает, что из высказывания A следует высказывание B. Импликация обозначается также A→B (A имплицирует B). Приведенные в выражении (2.3) знаки называются пропозициональными логическими связками.

- Подформулой называется часть формулы, сама являющаяся формулой. Собственной подформулой называется подформула, не совпадающая со всей формулой.

- Оценкой пропозициональных переменных называется логическая функция из множества всех пропозициональных переменных в множество истинностных значений {0,1}. *Основной задачей логики нулевого порядка является установление истинностного значения формулы, если определены истинностные значения входящих в нее переменных.* Истинностное значение формулы в таком случае определяется индуктивно, с шагами, которые использовались при построении формулы с использованием таблиц истинности связок.

Критерий доказуемости и недоказуемости формул классического формального исчисления высказываний

Пусть A – некоторая формула классического исчисления высказываний, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – перечень входящих в нее переменных. Вычислим $R_{a1,a2,..,an}(A)$ на множестве всех наборов значений $a_1, a_2, \ldots, a_n$ входящих в нее переменных. Если при этом $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$, на всех наборах $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то формула A – тождественно истинная, *такая формула признается доказуемой*.

Если же существует набор значений переменных такой, что условие $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$ не выполняется , то формула A – не тождественно истинная, *такая формула признается недоказуемой.*

Критерий противоречивости и непротиворечивости формул классического исчисления высказываний

Пусть A – некоторая формула классического исчисления высказываний, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – перечень входящих в нее переменных. Вычислим $R_{a1,a2,..,an}(A)$ на множестве всех наборов значений $a_1, a_2, \ldots, a_n$ входящих в нее переменных. Если при этом $R_{a1,a2,..,an}(A)=0$, на всех наборах $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то формула A – *признается формально тождественно ложной или тождественно противоречивой*.

Если же существует набор значений переменных такой, что условие $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$ выполняется хотя бы в одном случае из рассматриваемых, то формула A – *признается выполнимой и непротиворечивой.*

Определение глобальной формальной непротиворечивости логического исчисления высказываний

Логическое исчисление называется глобально формально непротиворечивым, если в нем не доказуемы никакие две внешние формулы, из которых одна является отрицанием другой. Иначе говоря, логическое исчисление называется глобально формально непротиворечивым, если в нем не существует такая внешняя формула A, что доказуема как формула A, так и формула ¬A . В противном случае логическое исчисление является глобально формально противоречивым.

Проблема глобальной формальной непротиворечивости заключается в выяснении вопроса: является данное исчисление непротиворечивым или нет? Если в исчислении обнаруживаются внешние доказуемые формулы вида A и ¬A , то такое исчисление является формально противоречивым.

Известна следующая, *логически неопровержимо* доказанная теорема.

<u>Теорема о глобальной формальной непротиворечивости классического формального исчисления высказываний</u>

Классическое формальное исчисление высказываний обладает свойством глобальной формальной непротиворечивости.

Сказанное выше означает, что моделирование тех или иных логических формул в рамках классической формальной логики нулевого порядка, в соответствии с правилами упомянутой теории, будет являться объективным и будет адекватно отражать логическую природу исследуемых с ее помощью логических формул.

Теперь приступим к логическому моделированию «Парадокса крокодила» в рамках классической формальной логики нулевого порядка.

Введем следующие обозначения. Пусть A – логическая формула:

A= «крокодил вернет ребенка матери» (2.4)

Тогда:

¬A= «неверно, что крокодил вернет ребенка матери» (2.5)

Обозначим через B – формулу матери, содержащую утверждение о том, отпустит ли крокодил ее ребенка или нет. Тогда ¬B – отрицание этой формулы.

Исходя из принятых выше обозначений и текста парадокса, условия крокодила моделируются следующими двумя формулами:

$$\Rightarrow(B = 1, A) \qquad (2.6)$$

$$\Rightarrow(B \neq 1, \neg A) \qquad (2.7)$$

Словесная интерпретация формулы (2.6) выглядит следующим образом: «если формула матери истинна, то крокодил вернет ребенка матери». Словесная интерпретация формулы (2.7) выглядит следующим образом: «если формула матери не является истинной, то неверно, что крокодил вернет ребенка матери». Таким образом из приведенных выше утверждений следует, что матерью ребенка должна быть сформулирована такая истинная, или хотя бы доказуемая логическая формула, которая вынуждает крокодила отдать ей ребенка в соответствии с его собственными условиями.

Вычислим векторы значений истинности формул условий крокодила на множестве бинарных логических операций, определенных современной классической формальной логикой нулевого порядка, поскольку рассматриваемые формулы являются бинарными логическими формулами. В соответствии с принятыми в классической формальной логике правилами положим:

$$B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2.8)$$

Формулы (2.8) обеспечивают рассмотрение конечного множества всех возможных конкретных комбинаций значений переменных B и A. Используя для вычисления векторов значений истинности условий крокодила оператор логической векторизации, получим:

$$\overrightarrow{\Rightarrow(B = 1, A)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2.9)$$

$$\overrightarrow{\Rightarrow(B \neq 1, \neg A)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2.10)$$

Таким образом из формул (2.9) и (2.10) мы видим, что в соответствии с базовыми определениями классической логики нулевого порядка, крокодилом были выдвинуты выполнимые и непротиворечивые логические формулы, которые с другой стороны одновременно являются и недоказуемыми.

Необходимо отметить, что в соответствии с условиями парадокса у крокодила имеются значительные логические преимущества перед матерью ребенка. Это выражается в том, что у крокодила имеется возможность вариации логических связок, т.е. возможность свободного выбора в дизъюнкции и конъюнкции между формулами его условий, а также возможность неприменения логических связок между ними, поскольку в его собственных условиях это прямо не оговорено.

Исследуем теперь формулу матери, приведенную в тексте парадокса. По своей логической структуре она совпадает с формулой (2.5), т.е. мать ребенка выдвигает логическую формулу:

$$B = \neg A \tag{2.11}$$

В этом случае у крокодила появляется возможность объявить, что формулы его условий подразумевают их конъюнкцию. Тогда на множестве бинарных логических операций получаем следующие формулы:

$$\overrightarrow{\left(\Rightarrow(\mathrm{B} = 1, \mathrm{A}) \wedge \Rightarrow(\mathrm{B} \neq 1, \neg\mathrm{A})\right)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

$$\overrightarrow{(\mathrm{B} = \neg\mathrm{A})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Формула (2.12) представляет собой конъюнкцию логических формул условий крокодила. Формула (2.13) представляет собой логическую формулу матери ребенка.

В рассматриваемом случае аргументация крокодила имеет следующий вид.

Выдвинутая матерью логическая формула логически несовместна с условиями крокодила:

$$\overrightarrow{\left[\left(\left(\Rightarrow(\mathrm{B}=1,\mathrm{A})\wedge\Rightarrow(\mathrm{B}\neq 1,\neg\mathrm{A})\right)\right)\wedge(\mathrm{B}=\neg\mathrm{A})\right]}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad (2.14)$$

Поэтому в рассматриваемом случае у крокодила в соответствии с его собственными условиями появляются все основания не отдать ребенка матери. Таким образом *предлагаемое нами решение рассматриваемого парадокса заключается в том, что приведенная в нем логическая формула ответа матери в контексте конъюнкции формул условий крокодила оказывается формально-логически противоречивой, что является достаточным условием для отказа крокодила вернуть ребенка матери.*

Необходимо отметить, что некоторые приведенные выше логические формулы имеют существенные отличия от логических формул аристотелевской логики. В соответствии с основными законами аристотелевской логики, высказывание должно быть либо истинным, либо ложным, *третья возможность исключена*. Этого мы никак не можем утверждать в отношении логической формулы крокодила (2.12) и логической формулы матери (2.13), поскольку утверждения об их истинности или ложности оказываются недоказуемыми:

$$\overrightarrow{\left(\Rightarrow(\mathrm{B}=1,\mathrm{A})=1\right)}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\left(\Rightarrow(\mathrm{B}=1,\mathrm{A})=0\right)}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad (2.15)$$

$$\overrightarrow{\left(\Rightarrow(\mathrm{B}\neq 1,\neg\mathrm{A})=1\right)}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\left(\Rightarrow(\mathrm{B}\neq 1,\neg\mathrm{A})=0\right)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad (2.16)$$

По нашему мнению, приведенное выше исследование логической структуры «Парадокса крокодила» свидетельствует о возможности реконструкции и моделирования софистической логической техники в рамках классической формальной логики нулевого порядка, что может представлять определенный интерес с точки зрения вопросов исследования античных софистических философских и логических традиций, а также их философских и логических архетипов в некоторых классических формальных и полуформальных логических и математических теориях нового времени.

3. Логический анализ «Парадокса лжеца»

«Парадокс лжеца» является одним из наиболее известных древнегреческих античных софистических парадоксов. Согласно историческим сведениям, его автором является представитель античной мегарской философской школы Евбулид. Наиболее сильная форма «Парадокса лжеца» выражается следующей фразой – «То, что я утверждаю сейчас, ложно».

Стандартное интуитивное рассуждение о «Парадоксе лжеца» утверждает, что если содержащееся в «Парадоксе лжеца» суждение истинно, то оно ложно, а если оно ложно, то оно является истинным, следовательно оно противоречит закону исключенного третьего. Считается, что предложение такого рода принципиально не может быть ни доказано, ни опровергнуто в пределах того языка на котором оно изложено.

В настоящей работе на основе современной классической формальной логики нулевого порядка предлагаются варианты формализации «Парадокса лжеца», а также некоторых его разновидностей. Необходимо отметить, что современная классическая формальная логика нулевого порядка обладает тем достоинством, что ее глобальная непротиворечивость доказана (доказательство принадлежит известному австрийскому логику Курту Геделю). Это означает, что в рамках упомянутой системы не могут быть выведены две внешние одновременно тождественно доказуемые и взаимно контрадикторные логические формулы F и $\neg F$. Кроме этого в рамках современной классической логики нулевого порядка могут быть также формализованы утверждения, которые по своим логическим свойствам отличаются от высказываний классической формальной аристотелевской логики в смысле однозначной выполнимости закона исключенного третьего.

В классической формальной логике нулевого порядка логическая структура формул на множестве унарных логических операций имеет следующий вид, представленный в **Таблице 1**. В **Таблице 1** унарных операций приняты следующие обозначения: **x** – логическая переменная, **g1(x)** – функция отрицания (негации), **g2(x)** – функция тождества, **g3(1)** – тождественная функция логической единицы, **g4(0)** – тождественная функция логического нуля. **0** и **1** — логические, тождественные нуль и единица соответственно.

Прежде чем перейти к формализации утверждения, содержащегося в «Парадоксе лжеца», необходимо уточнить, что в данном случае следует принять за критерий истинности. Из самого текста «Парадокса лжеца» следует, что упомянутое утверждение не содержит информации о внешних явлениях или событиях. Поэтому *«материальный критерий истинности»* по Аристотелю в данном случае отсутствует, поскольку отсутствует возможность сравнения высказываемого утверждения с объективной реальностью. Таким образом остается лишь «формальный критерий истинности». В соответствии с формальным критерием истинности классической формальной логики нулевого порядка, формально тождественно ложной считается тождественно противоречивая формула. В иных случаях логическая формула считается непротиворечивой.

Таблица 1. Таблица унарных логических операций

Унарные логические операции				
x	**g1(x)Ξ(¬)**	**g2x Ξ(=)**	**g3(1) Ξ (1)**	**g4(0)Ξ (0)**
0	**1**	**0**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**1**	**0**

Задача исследования логической структуры «Парадокса лжеца» заключается в установлении вектора истинности, содержащегося в нем утверждения, на множестве унарных логических операций. Формула утверждения, содержащегося в «Парадоксе лжеца», имеет следующий вид:

$$L=0 \qquad (3.1)$$

где **0 –** логический символ тождественного формального противоречия.

Применяя правила **Таблицы 1** для рассматриваемого случая, а также оператор логической векторизации вычислительной логической программы математического вычислительного пакета **MATCAD** , для случая, когда логическая переменная L может принимать любые допустимые значения (**0** или **1**) из области своего определения, получим:

$$\overrightarrow{(L = 0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3.2)$$

Из формулы (3.2) следует, что в рассматриваемом случае, логическая формула утверждения, содержащегося в «Парадоксе лжеца» является непротиворечивой, и вместе с этим недоказуемой.

Из приведенного выше анализа рассматриваемой формы «Парадоксе лжеца» следует, что действительно, существуют такие логические утверждения и формулы, которые не являются аристотелевскими высказываниями. Поэтому соответствие той или иной логической формулы законам аристотелевской традиционной логики должно быть должным образом обосновано.

Разновидностью «Парадокса лжеца» считается также «Парадокс Платона и Сократа», заключающийся в следующем. Платон: «Следующее высказывание Сократа будет ложным». Сократ: «То, что сказал Платон, истинно».

Ниже мы увидим, что по своей логической структуре «Парадокс Платона и Сократа» отличается от основной версии «Парадокса лжеца» тем, что содержит в себе две логические переменные. Поэтому его моделирование должно осуществляться на множестве бинарных логических операций. Введем следующие обозначения:

$$P := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad S := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

В формулах (3.3), P – логический кортеж области определения истинностных значений для утверждения Платона. S – логический кортеж области определения возможных истинностных значений для утверждения Сократа. Формулы (3.3) отражают всевозможные комбинации сочетаний формальной истинности на множестве бинарных логических операций для потенциальных утверждений Платона и Сократа в условиях отсутствия материального критерия истинности.

Формализуем утверждение Платона о ложности утверждения Сократа и найдем для него логический кортеж истинностных значений:

$$\overrightarrow{[P = (S = 0)]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Формализуем утверждениye Сократа об истинности утверждения Платона и найдем для него логический кортеж истинностных значений:

$$\overrightarrow{[[P = (S = 0)] = 1]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Как следует из формул (3.4) и (3.5) утверждения Платона и Сократа с точки зрения современной классической формальной логики нулевого порядка являются непротиворечивыми, хотя и недоказуемыми, и согласно (3.6) формально логически тождественны друг другу:

$$\overrightarrow{[[P = (S = 0)] = [[P = (S = 0)] = 1]]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Еще одной формой «Парадокса лжеца» является «Парадокс Эпименида» который заключается в следующем. Эпименид, будучи критянином, сказал: «Все критяне лжецы». Требуется определить высказал ли он правду, или солгал?

Необходимо отметить, что в отношении всех других критян, кроме него самого, это утверждение Эпименида *является недоказуемым*, поскольку не приведено ни одного их высказывания, следовательно *не имеется и достаточных оснований для определенного утверждения* об их истинности или ложности. Однако, остается утверждение Эпименида о самом себе в третьем лице, как о критянине, являющемся лжецом. В современной формальной классической логике нулевого порядка утверждение Эпименида о собственной ложности моделируется следующей логической формулой:

$$E=(E=0) \tag{3.7}$$

Анализ формулы (3.7) на множестве унарных логических операций показывает,что формула (3.7) является тождественно противоречивой:

$$\overrightarrow{[E = (E = 0)]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Таким образом формула (3.8) позволяет нам утверждать, что утверждение Эпименида *содержит тождественно противоречивую логическую формулу* по отношению к нему самому. В отношении же его утверждения по отношению к другим критянам можно сделать вывод, что высказанная им логическая формула является недоказуемой *по причине отсутствия достаточных оснований*.

Из приведенного выше анализа различных форм «Парадокса лжеца» следует, что рассмотренные формы имеют отличающуюся друг от друга структуру, при этом только в «Парадоксе Эпименида» содержится тождественно противоречивая формула утверждения Эпименида о собственной ложности. Логические формулы первых двух рассмотренных вариантов «Парадокса лжеца» являются недоказуемыми и вместе с тем непротиворечивыми. Именно этим логические формулы, содержащиеся в первых двух формах «Парадокса лжеца» отличаются от высказываний аристотелевской традиционной логики, для которых выполнение закона исключенного третьего является обязательным. Таким образом мы видим, что софистическая техника логических построений может быть формализована в рамках современной формальной логики нулевого порядка, что в определенной степени может служить обоснованием логико-философской концепции софистов в условиях паранепротиворечивых логических рассуждений.

4. Решение «Парадокса брадобрея»

Одним из центральных положений классической традиционной аристотелевской логики является аристотелевское понимание закона о непротиворечии, который регулирует логические отношения между контрадикторными высказываниями. Отметим, что логика Аристотеля принимает два критерия истины: материальный (согласие мыслей с вещами) и формальный (согласие мыслей между собой), причем господствующим (доминирующим) критерием в ней является материальный.

Рассмотрим учение Аристотеля об истине и законах мышления. Аристотель принимает истину в широком и в узком смысле. Истина в узком значении есть истина суждения. По Аристотелю, истина и ложь, строго говоря, относятся только к соединению и разъединению представлений и понятий. Наши суждения материально истинны или ложны в зависимости от того, соответствует ли совершаемое в них соединение или разъединение представлений и понятий самой действительности. Что же касается отдельных изолированных предметов мысли, то сами по себе они еще не истинны и не ложны.

Такое понятие истины основывается на предположении, что предмет мысли (представление или понятие) сравнивается с реальным объектом, отображением которого он является, и в качестве истинного признается то представление или понятие, которое адекватно отражает то, что существует в действительности. Мыслимое является материально ложным в том случае, если ему или вообще не соответствует ничего в действительности, или если соответствующий реальный предмет в нем отображен неверно. Это — материальная ложность, и она заключается в несоответствии мыслимого реальным объектам. Другой вид ложности — ложность суждения. По Аристотелю, одна из форм ложных суждений заключается в том, что несуществующее высказывается, как существующее, или наоборот – существующее высказывается, как несуществующее.

Основным законом мышления у Аристотеля является закон непротиворечия. Аристотель называет этот закон самым неоспоримым принципом. Аристотель дает несколько формулировок этого закона. Одна из формулировок гласит: «Невозможно, чтобы одно и то же, в одно и то же время, и в одном и том же отношении, и было и не было присуще одному и тому же». Наряду с этой развернутой формулировкой дается краткая онтологическая формула: «Невозможно, чтобы одно и то же, в одно и то же время, было и не было».

В качестве достовернейших положений у Аристотеля приводятся также следующие формулировки закона о непротиворечии: «Невозможно, чтобы одновременно были истинными противоположные суждения», или: «Невозможно, чтобы противоречащие утверждения были истинными по отношению к одному и тому же» . Аристотелем даются и сокращенные логические формулы: «Невозможно вместе истинно и утверждать и отрицать» или: «Невозможно вместе утверждать и отрицать».

По Аристотелю высказывание (а) определяет одно понятие (а) и, следовательно, одновременно с ним возникает двойственное ему понятие – (не-а). Основная формула закона непротиворечия такова: «а не есть не-а». Смысл законов непротиворечия и тождества в этом аспекте таков: «а не может иметь тот же самый смысл, какой имеет то, что по своей сущности не есть а», следовательно, «а есть а и поэтому не- а есть не-а».

Перейдем к учению Аристотеля о законе исключенного третьего. Основная формулировка его у Аристотеля такова: «Равным образом не может быть ничего посередине между двумя противоречащими друг другу суждениями, но об одном одно необходимо либо утверждать, либо отрицать».

Отношение между двумя законами — законом непротиворечия и законом исключенного третьего, — по Аристотелю, таково: отрицание закона непротиворечия имеет своим необходимым следствием отрицание закона исключенного третьего. Закон непротиворечия есть необходимая предпосылка закона исключенного третьего.

В соответствии с основными законами логики у Аристотеля дается учение об истине. По Аристотелю истина и ложь находятся в контрадикторной противоположности. По самому определению этих понятий ложность есть отрицание истины, а истинность — отрицание ложности. Положение о контрадикторной противоположности истины и лжи служит у Аристотеля предпосылкой доказательства закона исключенного третьего.

С основными законами логики у Аристотеля неразрывно связано его учение о суждении. Согласно Аристотелю, суждение есть синтез представлений. Этот синтез есть субъективная деятельность мышления, которая на основе предшествующего анализа ставит разъединенные элементы суждения в те или иные логические отношения, соответственно их природе и отображаемой действительности. Такой же субъективной деятельностью мышления является и диайрезис, т. е. умственный анализ. И в утвердительном суждении единая мысль разлагается на свои элементы. В отношении понятий разложение совершается посредством деления. Диайрезис и синтез суть два момента, которые постоянно должны взаимодействовать, и их взаимодействие делает возможным тот психический процесс, заключительным результатом которого является логическое утверждение или отрицание.

Теперь рассмотрим онтологическое содержание суждения. По Аристотелю субъективное мышление (психологическая сторона суждения) есть единственный возможный источник заблуждений и ложности суждений. Реальной же основой истинности является прежде всего само объективное бытие и лишь во вторую очередь субъективное мышление. Формальные противоречия могут возникать на стадии аналитико-синтетической деятельности, которая перерабатывает мыслительный материал в суждение.

Согласно Аристотелю, формальные истина и ложь субъективны уже постольку, поскольку они суть свойства психических процессов. Но, с другой стороны, понятие материальной истины у Аристотеля объективно и реалистично. Суждение, по учению Аристотеля, истинно лишь тогда, когда отношения совместного или раздельного бытия двух содержаний мысли, установленные в субъективном движении мышления, суть адекватные отображения реальных отношений.

Истинно то утвердительное суждение, которое соответствует реальному совмещению, и истинно то отрицательное суждение, которое соответствует реальной раздельности. И если отрицательное суждение иногда трактуется, как отрицание ложного утвердительного, то и это отрицание должно покоиться на реальном базисе, на действительной раздельности в самом реальном бытии.

Суждение Аристотель обозначает термином «апофансис», что значит «обнаруживаю», «открываю», «выражаю». По определению, - суждение есть высказывание о присущности или неприсущности чего-либо чему-либо и является особым видом речи, а именно такой речью, в которой находит свое выражение истина либо ложь.

Согласно аристотелевской логике, принимаемые ей суждения, о которых можно однозначно утверждать, что они либо истинны, либо ложны, можно выделить в отдельную категорию и называть их высказываниями. Таким образом высказывания – это такие суждения, которые удовлетворяют первым трем основным законам логики – закону тождества, закону о непротиворечии и закону об исключенном третьем. Четвертым основным законом классической традиционной аристотелевской логики является **«Принцип достаточного основания»**, окончательно сформулированный Г.В.Лейбницем в 17 веке.

Необходимо отметить, что существуют утверждения и логические формулы, не являющиеся высказываниями, т.е. существуют утверждения и логические формулы в отношении которых не выполняются законы о непротиворечии и исключенного третьего.

На основании основных законов логики во многих случаях можно установить являются те или иные утверждения высказываниями или нет. Необходимым и достаточным условием того, что рассматриваемое утверждение является высказыванием, является полное соответствие его первым трем основным законам логики. В этом, и только в этом случае, на основании **«Принципа достаточного основания»**, такое утверждение можно считать высказыванием. Для этого необходимо и достаточно показать, что рассматриваемое утверждение логически равно самому себе, что оно логически не равно своему отрицанию и в отношении него можно однозначно утверждать, что оно либо истинно, либо ложно, а *третья возможность исключена*.

Необходимо отметить, что в том случае, если не представляется возможным достоверно и однозначно установить, что рассматриваемое утверждение удовлетворяет первым трем основным законам логики, то в силу **«Принципа достаточного основания»** следует сделать заключение, что не имеется достаточных оснований причислить данное утверждение к классу высказываний. В этом случае рассматриваемое утверждение не подлежит дальнейшему рассмотрению в рамках традиционной аристотелевской классической логики.

Перейдем теперь к анализу эффективности законов аристотелевской классической традиционной логики и аристотелевских критериев материальной и формальной истины на примере моделирования «Парадокса Рассела» в одной его популярной форме. Необходимо отметить, что в свое время, упомянутый парадокс, автором которого является выдающийся математик, логик и философ конца 19-го и первой половины 20 века – Бертран Рассел, произвел весьма сильное впечатление на математическую общественность того времени, и даже, по сути дела, явился причиной раскола некоторых математических школ на различные логико-математические направления.

«Парадокс брадобрея»

Одной из версий парадокса Рассела является парадокс деревенского брадобрея, согласно которому одному деревенскому брадобрею приказали «брить каждого жителя деревни, кто сам не бреется, и не брить того жителя деревни, кто сам бреется». Как он должен поступить с собой?

Стандартное интуитивное рассуждение об изложенном выше «Парадоксе брадобрея» (предложенное самим Бертраном Расселом) имеет следующий вид: «если деревенский брадобрей не бреется, то он должен брить себя , и, если он бреется , то он не должен брить себя». Нетрудно заметить, что в результате этого рассуждения мы приходим к противоречию. В приведенном выше рассуждении *молчаливо предполагается*, что деревенский брадобрей является жителем той деревни в которой он работает, несмотря на то, что информация об этом непосредственно *не содержится в тексте парадокса*. Представляет интерес то обстоятельство, что как будет показано далее, именно это рассуждение Рассела, традиционно считающееся составной частью данного парадокса, *и «делает его парадоксальным»*.

Постараемся формализовать условия «Парадокса брадобрея» на множестве бинарных логических операций, методами современной классической формальной логики нулевого порядка, с целью установить, по каким причинам и на каком этапе формулирования условий рассматриваемого парадокса возникает «логически парадоксальная ситуация».

Пусть A есть утверждение: «Житель деревни бреется сам». Тогда отрицание этого утверждения $\neg A$ имеет следующий вид: «Неверно, что житель деревни бреется сам». Обозначим через B утверждение: «Брадобрей бреет жителя деревни». Тогда отрицание этого утверждения $\neg B$ имеет следующий вид: «Неверно, что брадобрей бреет жителя деревни». *Заметим, что в начальных условиях парадокса не содержится никакой информации о том, является ли брадобрей жителем деревни или нет. Поэтому в целях адекватного логического моделирования рассматриваемого парадокса необходимо рассмотреть обе эти возможности*. Обозначим через C утверждение: «Брадобрей является жителем деревни в которой он работает». Тогда отрицание этого утверждения $\neg C$ имеет следующий вид:«Неверно, что брадобрей является жителем деревни в которой он работает».

Необходимо отметить, что в соответствии с традиционной классической логикой Аристотеля, в целях адекватного рассмотрения данной логической задачи, следует определить материальный и формальный критерии истинности. В соответствии с начальными условиями парадокса, под материальным и формальным критерием истинности в данном случае мы будем понимать непротиворечивое выполнение «приказа» деревенскому брадобрею. Это означает, что мы постараемся построить такую логически и физически выполнимую модель решения парадокса, которая с одной стороны не будет противоречить начальным условиям парадокса, а с другой стороны будет соответствовать законам классической традиционной аристотелевской логики. По нашему мнению, именно такая стратегия нахождения логического решения соответствует аристотелевскому пониманию закона о непротиворечии, поскольку закон о непротиворечии, как раз и выражает стремление избежать противоречия в рассуждениях, связанных с восприятием объективной реальности.

Согласно принятым выше обозначениям, языковая интерпретация формальной модели условий парадокса имеет следующий вид:

«Если житель деревни бреется сам, то неверно, что брадобрей бреет жителя деревни, и, если неверно, что житель деревни бреется сам, то брадобрей бреет жителя деревни».

В принятых символических обозначениях рассмотренная языковая интерпретация имеет следующий вид:

$$\text{«Если } A\text{,то } \neg B\text{,и, если } \neg A\text{, то } B\text{»} \tag{4.1}$$

Вычислим векторы значений истинности формулы условия «Парадокса брадобрея» на множестве бинарных логических операций, определенных современной классической формальной логикой нулевого порядка. В соответствии с принятыми на множестве бинарных логических операций правилами положим:

$$A := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

$$B := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (4.3)$$

Тогда вектор истинностных значений логической формулы (4.1) примет следующий вид:

$$\overrightarrow{\left[\left(\Rightarrow(A,\neg B)\right) \wedge \left(\Rightarrow(\neg A, B)\right)\right]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (4.4)$$

Из (4.4) в соответствии с правилами классической формальной логики нулевого порядка следует, что основное условие «Парадокса брадобрея» выражается непротиворечивой логической формулой.

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о том, может ли являться по условиям задачи деревенский брадобрей жителем той деревни в которой он работает. Вначале рассмотрим первую из двух возможностей, определяемую логическим утверждением C, а именно: «Брадобрей является жителем деревни в которой он работает». В этом случае утверждение A приобретает следующий вид: «Брадобрей бреется сам». Утверждение B при этом принимает следующий вид: «Брадобрей бреет брадобрея». Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае одного брадобрея утверждения A и B оказываются логически эквивалентными друг другу:

$$\Leftrightarrow(A, B) \qquad (4.5)$$

Условие (4.5) является дополнительным к формуле условия рассматриваемого парадокса, поэтому оно должно рассматриваться совместно с формулой (4.4) на условиях их конъюнкции:

$$\overrightarrow{\left[\left[\left(\Rightarrow(A,\neg B)\right)\wedge\left(\Rightarrow(\neg A,B)\right)\right]\wedge\left(\Leftrightarrow(A,B)\right)\right]}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad (4.6)$$

Из формулы (4.6) следует,что дополнительное условие (4.5) приводит к тождественному противоречию. *Это означает, что именно допущение о том, что деревенский брадобрей является жителем той деревни в которой он работает, приводит к противоречию.*

Рассмотрим теперь вторую возможность, выражаемую логическим утверждением $\neg C$ а именно: «Неверно, что брадобрей является жителем деревни в которой он работает». Необходимо отметить, что эта возможность является осуществимой – брадобрей, работающий в данной деревне, может быть жителем другой близлежайшей деревни или города, что не противоречит условиям «Парадокса брадобрея». Кроме этого в рассматриваемом случае противоречия не возникает, поскольку брадобрей может непротиворечиво выполнять приказ в отношении жителей деревни. Что же касается его самого, то он в отношении себя имеет свободу выбора, поскольку упомянутый приказ вовсе не относится к нему, так как он не является жителем этой деревни. Поэтому брадобрей может брить себя, не вступая в противоречие с условиями приказа. Это и является предлагаемым решением рассматриваемой популярной версии «Парадокса брадобрея».

Приведем сравнительный анализ логических особенностей рассмотренной популярной версии «Парадокса Рассела» с классической традиционной аристотелевской логикой. Во-первых, следует отметить, что основное логическое условие рассмотренной версии «Парадокса брадобрея, выражается формулой (4.4), логическая структура которой отличается от логической структуры высказываний аристотелевской логики в смысле выполнимости закона исключенного третьего. Конъюнкция дополнительного условия (4.5) с условием (4.4), приводит к тождественному противоречию (4.6), как с точки зрения современной классической формальной логики нулевого порядка, так и классической традиционной аристотелевской логики. Поэтому в качестве решения рассматриваемого парадокса нами выбрано такое логически осуществимое решение, которое не противоречит основному условию рассматриваемой версии «Парадокса брадобрея», которое заключается в том, что деревенский брадобрей не является жителем той деревни в которой работает. Таким образом, в рассматриваемом случае, именно аристотелевское понимание логического закона о непротиворечии, основывающееся на стремлении избежать противоречия в рассуждениях, путем сравнения тех или иных суждений с объективной реальностью, позволило нам найти непротиворечивое решение рассмотренного парадокса.

5. Решение «Парадокса мэра городов»

Понятие пустого множества является одним из основных понятий теории классов и множеств. Пустым множеством называется такой класс, который не содержит ни одного элемента. Пустое множество обозначается символом Ø. В теории классов пустое множество является аналогом арифметического 0 множества действительных чисел. По определению существует только одно пустое множество. Формула А= Ø означает, что множество А не имеет ни одного элемента, что оно пусто, что оно «исчезает». Если не вводить понятия пустого множества, то при определении того или иного конкретного класса С пришлось бы часто делать оговорку: если он существует. Это происходит из-за того, что часто элементы класса определены так, что заранее бывает неизвестно, существуют они или нет.

Понятие пустого множества является эффективным средством решения некоторых классических парадоксов теории множеств. В качестве одного из таких парадоксов, ниже будет рассмотрена одна из популярных версий «Парадокса Рассела» в форме «Парадокса мэра городов». Ниже приведена формулировка «Парадокса мэра городов».

«Парадокс мэра городов»

В одной стране был издан указ: «Мэры городов должны жить не в том городе, где они являются мэрами, а в специальном городе мэров». Вопрос заключается в следующем – где должен жить мэр города мэров?

Решение данного парадокса сводится к рассмотрению вопроса о существовании мэра города мэров. Вначале рассмотрим одну из двух возможностей: мэр города мэров был избран. В этом случае возникает противоречие – мэр города мэров должен жить в городе мэров, мэром которого он является, что по условию задачи логически невозможно.

Вторая возможность основана на аристотелевском понимании закона о непротиворечии, которое заключается в стремлении избежать противоречий в рассуждениях, а также понятии пустого множества: *мэр города мэров не может быть избран, «кресло мэра городов – пусто». В этом случае городом управляет совет мэров городов. Отметим, что это решение является осуществимым и непротиворечивым.*

Таким образом, в рассматриваемом случае мы видим, что именно концепция пустого множества позволила нам получить логически адекватное решение «Парадокса мэра городов».