АНАЛИЗ ФЕНОМЕНА ЛОГИЧЕСКОЙ ТРАНСЦЕНДЕНЦИИ С ПОЗИЦИЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФИЛОСОФИИ

АЛЕКСАНДР АХВЛЕДИАНИ

3 декабря 2011 г.

Информационный портал «Орифламма»

Донецк

Украина

Международное научное общество

«INCOL»

Кармиэль

Израиль

АНАЛИЗ ФЕНОМЕНА ЛОГИЧЕСКОЙ ТРАНСЦЕНДЕНЦИИ С ПОЗИЦИЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФИЛОСОФИИ

А.Н. Ахвледиани

Научно-техническое общество «INCOL» (Israel – Georgia)

E-mail – alexanderakhvlediany@yandex.ru

Аннотация

В настоящей работе, в рамках аналитической философии, рассматриваются проблемы логической трансценденции, возникающие в основаниях классической формальной логики и теоретико-множественной математики.

1. Об аналитическом направлении в философии и феномене логической трансценденции

Как известно из истории развития философии, аналитическая философия является направлением, ставшее в 20–ом веке доминирующем в англоязычных странах. По своей сути, термин «аналитическая философия» означает определенный стиль философского мышления, ориентирующийся на идеалы ясности и логической строгости мышления, а также его языкового выражения, путем применения методов формальной логики и привлечением результатов точных и естественных наук.

Как правило, считается, что основоположниками аналитического направления в философии являются Готлоб Фреге, Бертран Рассел, Альфред Уайтхейд и Джордж Мур, которыми было начата разработка методов философского анализа нового вида, основанного на достижениях в формальной логике. Как известно Готлобом Фреге был сделан значительный вклад в разработку логики предикатов, что позволило исследовать логические формы большего числа видов языковых предложений, чем это было возможно в предшествующий период. Готлоб Фреге был одной из ключевых фигур в области философии математики. Фреге полагал, что математика и логика, как отрасли научного знания, обладают собственным обоснованием, не зависящим от суждений и ментальных состояний отдельных ученых, работающих в области логики и математики.

Также как и Готлоб Фреге, Бертран Рассел и Альфред Уайтхед обосновывали ту точку зрения, что математика сводима к фундаментальным логическим принципам. Работа Бертрана Рассела и Альфреда Уайтхеда - «Principia Mathematica», - послужила причиной интереса многих философов к символической логике. Позднее научные усилия таких аналитических философов, как Бертран Рассел и Людвиг Витгенштейн, были сфокусированы на создании оптимального для философского анализа языка, свободного от двусмысленностей обыденной речи. Людвигом Витгенштейном в его книге «Философский трактат была разработана система логического атомизма. По утверждению Людвига Витгенштейна, в логико-философском аспекте, картина мира может быть выражена на основе языка классической формальной логики первого порядка, путем выражения атомарных фактов атомарными пропозициями и соединением их при помощи логических операторов.

Формально-логические методы аналитической философии применяются также в рамках философского направления логического позитивизма. Такие представители упомянутого направления, как Рудольф Карнап и Ганс Рейхенбах полагали, что истины логики и математики являются своего рода тавтологиями, а истины естественных наук – верифицируемыми эмпирическими утверждениями.

Представитель критического рационализма - Карл Поппер, в противовес направлению логического позитивизма вместо процедуры верификации, занимающую центральное место в концепции логических позитивистов ввел процедуру фальсификации, утверждая, что научную теорию нельзя подтвердить опытом. Опыт может только опровергнуть теорию, т.е. фальсифицировать ее. Поппер сформулировал «Принцип погрешимости», согласно которому любое научное знание носит лишь гипотетический характер и подвержено неизбежным ошибкам. В сответствии с концепцией Карла Поппера, рост научного знания осуществляется благодаря выдвижению и опровержению гипотез, то есть в соответствии с принципом фальсификации.

Имре Лакатос, ученик Карла Поппера, разработал новую концепцию, названную им «усовершенствованным фальсификационизмом». Он ввел понятие исследовательской программы, позволяющей более реалистично описать процесс развития науки. По Лакатосу, только последовательность теорий, а не одну отдельную теорию, можно характеризовать, как научную, или наоборот, как ненаучную. Ряд связанных друг с другом теорий $T1,...,Tn,...$ в одной и той же области науки, представляет собой исследовательскую программу. Принадлежность к данной «исследовательской программе» определяется сохранением в каждой новой теории метафизических предложений, образующих «твердое ядро» рассматриваемой научно-исследовательской программы. Твердое ядро неизменно. Оно не входит в сопоставление с опытом непосредственно, что обеспечивается «защитным поясом» вспомогательных гипотез. При появлении фальсифицирующего факта ядро сохраняется, а защитный пояс меняется. В концепции Лакатоса рассматривается не отдельная теория, а последовательность теорий. Смена теории Tn на теорию $T(n+1)$ называется сдвигом исследовательской программы. Если смена теории приводит к открытию новых фактов, то сдвиг программы называется прогрессивным. Если сдвиг программы не добавляет эмпирического содержания, то он называется регрессивным.

Томасом Куном, в рамках концепции исторической динамики развития науки, были введены такие понятия, как научная парадигма и научное сообщество. По Куну развитие науки происходит скачкообразно. Одно из центральных мест в концепции Томаса Куна занимает понятие научной парадигмы, или совокупности наиболее общих идей и методологических установок в науке, признаваемых данным научным сообществом. Научная парадигма обладает следующими основными свойствами:

1. Она принята научным сообществом, как основа для дальнейшей работы.
2. Она содержит переменные и требующие исследования вопросы, тем самым открывая простор для исследователей.

Развитие «нормальной науки» в рамках принятой исходной научной парадигмы продолжается до тех пор, пока существующая парадигма не утрачивает способности решать научные проблемы. На очередном этапе развития «нормальной науки», как правило возникает эффект несоответствия эмпирических наблюдений и теоретических предсказаний, основанных на существующей научной парадигме, возникают аномалии. Когда таких аномалий накапливается достаточно много, прекращается нормальное течение науки и наступает состояние кризиса, которое разрешается «научной революцией», приводящей к ломке старой и созданию новой научной парадигмы.

Из приведенного выше краткого обзора некоторых основных направлений в современной аналитической философиии становится ясно, что развитие науки в целом, равно как и развитие отдельных отраслей науки, а также развитие отдельных направлений в рамках той или иной отрасли, представляет собой определенный процесс, периодически сопровождающийся концептуальными изменениями в научной парадигме той или иной конкретной области науки.

Результаты исследований, получаемые в той или иной области науки в сильной степени зависит от той логической системы, на базе которой происходит развитие этой области. До середины 19-го столетия, в качестве основной логической системы выступала аристотелевская традиционная логика, основные логические законы которой представлены ниже.

Одним из наиболее важных условий возможности адекватного изучения объектов методами *классической аристотелевской традиционной логики – является условие детерминированности и неизменности свойств изучаемых объектов*. Другим важным требованием является то обстоятельство, что *традиционная классическая логика* *принимает к рассмотрению те и только те высказывания об исследуемых объектах и явлениях*, которые удовлетворяют следующим трем основным законам логики .

А. <u>Закон тождества</u>

Каждое высказывание логически равно самому себе.

$$A = A \tag{1.1}$$

Б. <u>Закон непротиворечия</u>

Никакое высказывание логически не равно своему отрицанию

$$A \neq \neg A \tag{1.2}$$

В. <u>Закон исключенного третьего</u>

Для любого высказывания – истинно либо само высказывание либо его отрицание, <u>третья возможность</u> исключена.

$$A \oplus \neg A \tag{1.3}$$

В формулах (1.1)-(1.3) приняты следующие обозначения:

A - некоторое высказывание, $\neg A$ - отрицание высказывания A . $\oplus$ - логическая пропозициональная связка, языковым эквивалентом которой является исключающее «либо», $\neg$ - символ отрицания, языковый эквивалент которого выражается, как «не - A», или выражением «не верно, что A» .

Необходимо отметить, что в аристотелевской традиционной логике допустимо рассматривать те, и только те высказывания, которые удовлетворяют перечисленным выше логическим законам. *Только при соблюдении этого условия*, в отношении таких высказываний будут справедливы все те законы аристотелевской традиционной логики, которые логически совместны с перечисленными выше основными законами.

Понятие «Истины» является одной из фундаментальных религиозных, философских и логических категорий. В различных философских и логических системах оно определяется по разному. Одной из основных традиционной концепций понятия истины *в рамках классической философии* является концепция, основные положения которой были сформулированы еще великим древнегреческим мыслителем Аристотелем, и развиты в работах философов последующего времени. Главное из этих положений сводится к утверждению: «*истина есть соответствие вещи и интеллекта»*. В *традиционном классическом смысле,* истина – это адекватная информация об объекте, получаемая посредством чувственного и интеллектуального изучения, или принятия сообщения об объекте, *и характеризуемая с позиции достоверности*. В аристотелевской традиционной логике, для которой значение истинности высказываний является одним из преимущественных предметов изучения, одним из критериев истинности выступает логическая правильность – относительная полнота формально-аксиоматических систем и отсутствие в них противоречий.

Одним из основных понятий классической логики высказываний является понятие противоречия. В аристотелевской традиционной логике оно имеет несколько интерпретаций.

• Противоречие – положение, при котором одно высказывание исключает другое высказывание, логически несовместное с ним.

• Противоречие – утверждение о тождественном равенстве двух или более заведомо различных объектов.

• Антиномия – в классической традиционной логике – противоречие между двумя высказываниями одинаково логически доказуемыми.

Отметим, что антиномия является особым видом противоречия, постольку поскольку возможна такая логическая ситуация, при которой *логически выводимыми* являются, как доказательство самого утверждения, так и его опровержения.

К числу *неформальных* аксиом традиционной классической логики относится сформулированный в завершенном виде выдающимся математиком, философом и логиком Г.В. Лейбницем «**Принцип достаточного основания»** - принцип, требующий, чтобы в случае каждого утверждения указывались убедительные основания, в силу которых оно принимается и считается истинным. Обоснование теоретического утверждения, как правило, слагается *из целой серии процедур*, касающихся не только самого утверждения, но и той теории, составным элементом которой оно является.

В своих трудах Аристотель очерчивает рамки применимости закона о непротиворечии и закона об исключенном третьем. В его сочинениях отмечается, «*что законы непротиворечия и исключенного третьего не имеют силы в суждениях о будущем: если кто-нибудь утверждает, что что-либо случится в будущем, а другой отрицает это, то здесь нет логического противоречия, потому что, пока факт не совершился, возможно как то, так и другое, поскольку будущее не является необходимо детерминированным, оно зависит от случайностей, зависит и от воли людей, и от их поведения*».

Упомянутое выше мнение самого основоположника классической традиционной формальной логики о границах применимости закона о непротиворечии и закона об исключенном третьем *заслуживает самого серьезного внимания*. По существу дела аристотелевская классическая традиционная логика применима только при исследовании вопросов, происходящих в настоящем, или исследовании вопросов и явлений, имевших место в прошлом, к тому же при том обязательном условии, что имеется достоверная информация о соответствующих явлениях и событиях. Также предполагается, что существуют критерии истинности, в соответствии с которыми можно достоверно оценивать истинность, либо ложность утверждений, связанных с исследуемыми явлениями и процессами.

Как известно, классическая математика занимается преимущественно изучением явлений и процессов, связанных с бесконечностью. Однако, по вполне понятным причинам, связанным с границами применимости классической аристотелевской традиционной логики, в классической математике при изучении свойств бесконечных величин и множеств, как правило избегали рассмотрения в явном виде зависимости изучаемых бесконечных величин от времени. Это можно объяснить тем, *что учет времени в явном виде, сразу же ставит под сомнение законность применения некоторых классических методов косвенного доказательства*, таких например, как метод доказательства от противного, который самым непосредственным образом связан со вторым и третьим основными законами классической аристотелевской традиционной логики, и часто применяется в тех случаях, когда на основании прямых методов доказательства не представляется возможным найти решение той или иной сложной проблемы.

Однако в современной классической теоретико-множественной математике функция времени является совершенно законным и стандартным инструментом изучения явлений и процессов, связанных с бесконечностью. В основе понятия функции времени лежит множество $T \subseteq R$ с элементами t, называемое множеством моментов времени. Время обладает той характерной особенностью, что имеет направление. Это означает, что если $t_1, t_2 \in T$ и $t_1 < t_2$, то момент времени t_1 предшествует моменту времени t_2. Иными словами, T является упорядоченным множеством.

Функция времени определяет отображение f множества моментов времени T на множество вещественных чисел R:

$$f : T \to R \qquad (1.4)$$

Элементами f будут пары (t, x), обозначаемые также через $x(t)$, где $t \in T, x \in R$. Каждая такая пара определяет значение функции времени в момент t. Полная совокупность пар (t, x), т.е. значений $x(t)$ для всех $t \in T$, и представляет собой функцию времени.

Введение функции времени сразу же ставит вопрос о необходимости учета так называемых **А** и **В** логик времени, одна из которых ориентирована на временной ряд «прошлое-настоящее-будущее», а другая на временной ряд «раньше-одновременно-позже». Это обстоятельство, в свою очередь, означает выход за пределы классической аристотелевской традиционной логики.

Математические основы современной классической формальной логики, как самостоятельного логического направления, были заложены в первой половине и середине 19-го столетия. Основная идея современной классической формальной логики заключается в «арифметизации» логики и формально-логическом исчислении высказываний на основе логико-арифметических операций, определенных в соответствии с основными логическими правилами этой системы. По своей сути современная классическая формальная логика является развитием и обобщением аристотелевской традиционной логики. При этом все логические законы аристотелевской традиционной логики являются истинными логическими формулами и с точки зрения современной классической формальной логики нулевого порядка. Современная классическая формальная логика была развита благодаря усилиям многих математиков, в числе которых в первую очередь необходимо упомянуть, Джорджа Буля, Огастеса де Моргана, Чарльза Пирса, Готлоба Фреге, Давида Гильберта, Бертрана Рассела, Альфреда Уайтхеда, Алонзо Черча, Курта Геделя, Альфреда Тарского.

Базовыми понятиями логики высказываний нулевого порядка являются:

- Пропозициональная переменная – переменная, значением которой может быть логическое высказывание.

- Пропозициональная формула – определяется индуктивно следующим образом:
  а) Если Р – пропозициональная переменная, то Р – формула.

  Б) Если А – формула, то ¬А – формула.

  В) Если А и В формулы, то

$$(A \vee B) \qquad (A \wedge B) \tag{1.5}$$

$$\Rightarrow (A, B) \tag{1.6}$$

также формулы.

В формулах (1.5) на первом месте стоит дизъюнкция формул А и В, соответствующая логической связке «А или В». На втором месте стоит конъюнкция, соответствующая логической связке «А и В».

- В соответствии с правилами классической формальной логики нулевого порядка, каждая формула может быть получена за конечное число шагов при помощи логических связок и базовых логических переменных.

- Знаки

$$\neg\blacksquare \qquad \blacksquare\wedge\blacksquare \qquad \blacksquare\vee\blacksquare \qquad \blacksquare\rightarrow \tag{1.7}$$

обозначают отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию (логическое следование). Например ¬А означает отрицание высказывания А. Выражение (1.6) означает, что из высказывания А следует высказывание В. Импликация обозначается также А→В (А имплицирует В). Приведенные в (1.7) знаки называются пропозициональными логическими связками.

- Подформулой называется часть формулы, сама являющаяся формулой. Собственной подформулой называется подформула, не совпадающая со всей формулой.

- Оценкой пропозициональных переменных называется логическая функция из множества всех пропозициональных переменных в множество истинностных значений {0,1}. *Основной задачей логики нулевого порядка является установление истинностного значения формулы, если определены истинностные значения входящих в нее переменных.* Истинностное значение формулы в таком случае определяется индуктивно, с шагами, которые использовались при построении формулы с использованием таблиц истинности связок.

Критерий доказуемости и недоказуемости формул классического формального исчисления высказываний

Пусть А – некоторая формула классического исчисления высказываний, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – перечень входящих в нее переменных. Вычислим $R_{a1,a2,..,an}(A)$ на множестве всех наборов значений a_1, $a_2, \ldots, a_n$ входящих в нее переменных. Если при этом, $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$ на всех наборах a_1, $a_2, \ldots, a_n$, то формула А – тождественно истинная, *такая формула признается доказуемой.*

Если же существует набор значений переменных такой, что условие $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$ не выполняется , то формула А – не тождественно истинная, *такая формула признается недоказуемой.*

Критерий противоречивости и непротиворечивости формул классического исчисления высказываний

Пусть А – некоторая формула классического исчисления высказываний, а $x_1,x_2,\ldots,x_n$ – перечень входящих в нее переменных. Вычислим $R_{a1,a2,..,an}(A)$ на множестве всех наборов значений $a_1, a_2,\ldots,a_n$ входящих в нее переменных. Если при этом $R_{a1,a2,..,an}(A)=0$, на всех наборах $a_1, a_2,\ldots,a_n$, то формула А – *признается формально тождественно противоречивой*.

Если же существует набор значений переменных такой, что условие $R_{a1,a2,..,an}(A)=1$ выполняется хотя бы в одном случае из рассматриваемых, то формула А – *признается выполнимой и непротиворечивой.*

Определение глобальной формальной непротиворечивости логического исчисления высказываний

Логическое исчисление называется глобально формально непротиворечивым, если в нем не доказуемы никакие две внешние формулы, из которых одна является отрицанием другой. Иначе говоря, логическое исчисление называется глобально формально непротиворечивым, если в нем не существует такая внешняя формула А, что доказуема как формула А, так и формула ¬А. В противном случае логическое исчисление является глобально формально противоречивым.

Проблема глобальной формальной непротиворечивости заключается в выяснении вопроса: является данное исчисление непротиворечивым или нет? Если в исчислении обнаруживаются внешние доказуемые формулы вида А и ¬А , то такое исчисление является формально противоречивым.

Известна следующая, *логически неопровержимо* доказанная теорема.

Теорема о глобальной формальной непротиворечивости классического формального исчисления высказываний

Классическое формальное исчисление высказываний обладает свойством глобальной формальной непротиворечивости.

Сказанное выше означает, что моделирование тех или иных логических формул в рамках классической формальной логики нулевого порядка, в соответствии с правилами упомянутой теории, будет являться объективным и будет адекватно отражать логическую природу исследуемых с ее помощью логических формул.

В классической формальной логике нулевого порядка, в числе прочих, рассматриваются логические формулы, определенные на множестве унарных и бинарных логических операций. Упомянутые логические формулы представлены в **Талице 1** и **Таблице 2**.

Таблица 1. Таблица унарных логических операций

Унарные логические операции				
x	**g1(x)Ξ(¬)**	**g2x Ξ(=)**	**g3(1) Ξ (1)**	**g4(0)Ξ (0)**
0	**1**	**0**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**1**	**0**

В **Таблице 1** унарных операций приняты следующие обозначения: **x** – логическая переменная, **g1(x)** – функция отрицания (негации), **g2(x)** – функция тождества, **g3(1)** – тождественная функция логической единицы, **g4(0)** – тождественная функция логического нуля. **0** и **1** — логические, тождественные нуль и единица соответственно.

В **Таблице 2** бинарных логических операций приняты следующие обозначения:

x и **y** – логические переменные;

$\mathbf{F_1(x, y)}$ — конъюнкция ($\mathbf{F_1(x, y) = x\&y = x \wedge y = min(x, y)}$),

$\mathbf{F_2(x, y)}$ — дизъюнкция ($\mathbf{F_2(x, y) = x \vee y = max(x, y)}$),

$\mathbf{F_3(x, y)}$ — эквивалентность ($\mathbf{F_3(x, y) = x \sim y = x \equiv y = x \leftrightarrow y}$),

$\mathbf{F_4(x, y)}$ — сумма по модулю два ($\mathbf{F_4(x, y) = x \oplus y}$),

$\mathbf{F_5(x, y)}$ — импликация от **y** к **x** ($\mathbf{F_5(x, y) = x \leftarrow y = x \subset y}$),

$\mathbf{F_6(x, y)}$ — импликация от **x** к **y** ($\mathbf{F_6(x, y) = x \rightarrow y = x \supset y}$),

Таблица 2. Основные формулы бинарных логических операций.

Бинарные логические операции										
x	**y**		**F_1(x,y)**	**F_2(x,y)**	**F_3(x,y)**	**F_4(x,y)**	**F_5(x,y)**	**F_6(x,y)**	**F_7(x,y)**	**F_8(x,y)**
0	**0**		**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**		**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
1	**0**		**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
1	**1**		**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
x	**y**		**F_9(x,y)**	**F_{10}(x,y)**	**F_{11}(x,y)**	**F_{12}(x,y)**	**F_{13}(x,y)**	**F_{14}(x,y)**	**F_{15}(x,y)**	**F_{16}(x,y)**
0	**0**		**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
0	**1**		**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
1	**0**		**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
1	**1**		**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**

F_7(x, y) — стрелка Пи́рса = функция Да́ггера = функция Ве́бба («антидизъюнкция») (**F_7(x, y) = $x \downarrow y$**).

F_8(x, y) — штрих Ше́ффера («антиконъюнкция») (**F_8(x, y) = $x | y$**),

F_9(x, y), **F_{10}(x, y)** — инверсии импликаций **F_5** и **F_6**,

F_{11}— F_{14} — функции только одного аргумента,

F_{15}(x, y), F_{16}(x, y) — тождества.

В последние десятилетия, многие специалисты по основаниям классической математики, - отмечают наличие серьезного научного кризиса в области инфинитарной теоретико-множественной математики /1/. Изучая историю создания и развития теории множеств, как самостоятельного раздела математики, можно придти к выводу, что в силу определенных причин, связанных с логической природой теории множеств, этот кризис, по сути дела начался с самого момента зарождения теории множеств, как самостоятельной математической дисциплины, и продолжается до сего дня, вот уже около 130 лет.

Как известно, первый труд по теории множеств был написан выдающимся чешским математиком Бернардом Больцано, еще в середине 19-го века. Его книга «Парадоксы бесконечного», и по сей день пользуется популярностью, является интересной с логико-философской точки зрения и проливает свет на многие логические и философские особенности основ теории множеств. Уже из самого названия книги, а также из ее содержания, становится очевидным, что Бернарду Больцано были известны парадоксальные логические свойства понятия бесконечности в связи с исследованием свойств бесконечных классов и множеств.

Математическая теория множеств, как самостоятельная математическая дисциплина, оформилась и получила дальнейшее развитие благодаря научному вкладу выдающегося немецкого математика Георга Кантора, который традиционно считается основоположником математической теории множеств. Уже сам Кантор, блестяще владевший логикой, задумывался над тем, насколько создаваемая им теория, соответствует принципам аристотелевской традиционной логики. По-видимому не является случайным и то обстоятельство, что Кантор вначале называл свое новое математическое направление не теорией, а «Учением о множествах» (Mengenlehre – нем.). Однако, по мере продвижения в своей работе в направлении развития новой математической науки, Кантор пришел к заключению, что созданное им направление может являться основой для всей математики. В связи с этим Кантором была разработана программа стандартизации математики на основе созданной им теории множеств.

Необходимо отметить, что созданная Георгом Кантором теория множеств, с самого начала встретила резкое неприятие со стороны многих ведущих математиков. В числе противников применения теории множеств были такие видные математики того времени, как Анри Пуанкаре и Герман Шварц. Особой непримиримостью по отношению к теории множеств отличался выдающийся немецкий математик Леопольд Кронекер.

Вполне естественно предположить, что у таких известных и авторитетных математиков, как Анри Пуанкаре, Герман Шварц, Леопольд Кронекер, Бертран Рассел, - должны были быть весьма веские основания для обоснования своей позиции. И, как это показывают современные исследования, эти основания действительно существуют, и отражают определенную точку зрения, связанную прежде всего с аристотелевской логикой, а также с ее онтологической установкой.

Необходимо отметить, что логика Аристотеля неразрывно связана с его философской системой, и в онтологическом смысле выступает, как средство и инструмент познания человеком внешнего мира. Из истории развития античной философии и логики известно, что Аристотель придерживался той позиции в теории познания, что человек может познать только те явления и предметы, которые доступны его восприятию органами чувств, и которые могут быть восприняты и обработаны его сознанием на основе рационального и непротиворечивого логического мыслительного процесса. Для этого является необходимым выполнение по крайней мере следующих условий. Первое условие - упомянутые явления и предметы должны удовлетворять категории бытия, то есть они должны существовать объективно в настоящем времени, или достоверно известно, что они имели место и существовали в прошлом. Второе условие - изучаемые явления и предметы могут быть восприняты человеком с помощью органов чувств в настоящем, или информация о них может быть получена из достоверных научных источников. Третье условие – исследуются явления и предметы, имеющие место в настоящем, или имевшие место в прошлом. Четвертое условие – свойства предметов и явлений остаются неизменными в процессе исследования. Все это означает, что с помощъю аристотелевской логики могут быть познаны только те явления и предметы, которые по крайней мере имеют свое собственное, определенное и неизменное бытие в настоящем, или существовали в прошлом, а об их характеристических качествах имеется достоверная научная информация, не подлежащая изменению в процессе исследования.

Что касается отношения Аристотеля к философской категории «небытия», то Аристотель придерживался того мнения, что «небытие» не может быть познано человеком, по причине отсутствия признаков, по которым можно было бы судить о его существовании. С другой стороны Аристотель полагал, что если «небытие» проявляет себя определенным образом и может быть воспринято человеком, то оно уже перестает быть «небытием», и становится частью «бытия». Отсюда и онтологическая установка Аристотеля в отношении «небытия» - «небытия» нет. Из этого непосредственно вытекает описательная характеристика одного из видов противоречия в аристотелевской логике – *называть несуществующее существующим является противоречием с точки зрения аристотелевской традиционной логики.*

Для того, чтобы оценить степень соответствия логических оснований теории множеств аристотелевской логике, необходимо рассмотреть систему основных определений теории множеств. К числу основных понятий теории множеств относится понятие пустого множества. Пустое множество определяется, как множество не имеющее ни одного элемента. При аксиоматическом построении теории множеств формулируют так называемую «Аксиому пустого множества» *в которой постулируется существование пустого множества*.

С онтологической точки зрения, в теории множеств именно пустое множество является архетипом (образом) категории «небытия» аристотелевской философии и логики. В силу самого своего определения, пустое множество не содержит в себе ни одного элемента, и в силу этого обстоятельства с точки зрения аристотелевской логики, - не может быть воспринято познающим субъектом непосредственно. С точки зрения аристотелевской онтологической позиции, в основаниях теории множеств *прямо нарушается одна из онтологических установок аристотелевской логики*, а именно – множество, не имеющее ни одного элемента, то есть конструктивно не существующее с точки зрения аристотелевской традиционной логики, - *объявляется существующим*. Нетрудно видеть, что такое положение дел в основаниях теории множеств прямо противоположно учению Аристотеля о категориях бытия и небытия.

Принятие «Аксиомы пустого множества» влечет за собой также невозможность логического отсечения рассмотрения противоречивых по аристотелю объектов и классов. В классической математике, в предшествующий созданию теории множеств период, вопрос рассмотрения противоречивых объектов решался в соответствии с основными законами аристотелевской логики – те объекты и явления, которые по своей логической и аналитической природе вступали в противоречие с основными логическими законами аристотелевской традиционной логики, признавались несуществующими с точки зрения аристотелевской логики и не включались в число рассматриваемых объектов. После создания аксиоматической теории множеств, в силу постулирования конструктивного существования пустого множества, не содержащего ни одного элемента, становится невозможным отрицать существование даже противоречивого класса, имеющего хотя бы один элемент. Если существует класс, заведомо не имеющий элементов, то тем более конструктивно существует класс, имеющий хотя бы один элемент, даже несмотря на его возможную логически противоречивую природу.

Еще одна, весьма значительная с точки зрения аристотелевской традиционной логики проблема, заключается в схеме определения классов и множеств, как таковых, на основе задания так называемого характеристического свойства, или совокупности характеристических свойств, определяющих это множество и входящие в него элементы. Георгом Кантором классы и множества определялись по следующей общей формальной схеме:

$$Cls(Cx) = \{x : (\forall x)(C(x))\} \tag{1.8}$$

где, $C(x)$ характеристическое свойство, или совокупность хараутеристических свойств, определяющих тот или иной класс или множество.

Известно, что Кантор выделял понятие множества из общего понятия класса. Множество по Кантору – это такой класс, который удовлетворяет всем логическим законам аристотелевской традиционной логики. В противном случае – рассматриваемый класс является по Кантору – логически неконсистентной совокупностью. Однако Кантором, так и не было сделано соответствующего формального уточнения. Последствия этого обстоятельства хорошо известны – выдающимся английским логиком и математиком

Бертраном Расселом был открыт так называемый «Парадокс Рассела», в рамках которого была построена конструкция такого класса R, который удовлетворяет формальному требованию (1), но не соответствует законам аристотелевской традиционной логики. Таким образом, со всей определенностью выяснилось, что канторовская теория множеств на деле определяет также и логически неконсистентные совокупности.

Георгом Кантором в рамках его теории множеств, был открыт так называемый «Парадокс Кантора», в результате рассмотрения которого, Кантор пришел к не менее парадоксальному заключению о том, что класса V всех самотождественных множеств не существует. Логическая парадоксальность этого заключения состоит в том, что сами по себе самотождественные множества существуют, но тем не менее, *составленный из них класс – не существует*. Эта логически парадоксальная ситуация выглядит еще более парадоксальной на фоне принятия «Аксиомы пустого множества», - в частности, в рамках канторовской и классических систем **ZF** и **ZFC** теории множеств приходят к заключению, что пустое множество, не содержащее ни одного элемента существует, а класс всех самотождественных множеств, несмотря на наличие самих самотождественных множеств, *тем не менее не существует, как таковой*.

В теории классов и множеств весьма существенной проблемой является вопрос существования универсального U - класса, то есть класса, элементами которого являются все другие множества и классы.

Необходимо отметить, что конструктивное существование универсального U - класса, - до сих пор, как правило, - не признается в классических системах теории множеств. В качестве характерного примера можно привести рассмотрение этого вопроса в работе /1/. Красным курсивом выделены те места в доказательстве, на которые необходимо обратить пристальное внимание.

<u>Утверждение об универсальном классе</u>

Не существует класса всех множеств, или формально

$$\neg(\exists x)(\forall y)(y \in x) \tag{1.9}$$

Доказательство

Доказательство будем вести от противного, а именно допустим, что для некоторого x верно:

$$(\forall y)(y \in x) \tag{1.10}$$

Положим:

$$v = \{u \in x; u \notin u\} \quad (1.11)$$

Рассмотрим первое предположение:

$$v \in v \quad (1.12)$$

Из сопоставления (1.11) и (1.12) следует:

$$(v \in v) \Rightarrow (v \notin v) \quad (1.13)$$

Рассмотрим второе предположение:

$$v \notin v \quad (1.14)$$

Из сопоставления (1.11) и (1.14) следует:

$$(v \notin v) \Rightarrow (v \in v) \quad (1.15)$$

Из сопоставления (1.13) и (1.15) следует:

$$[(v \in v) \Leftrightarrow (v \notin v)] \equiv 0 \quad (1.16)$$

Соотношение (1.16) означает получение аристотелевского противоречия. Следовательно допущение, выражаемое соотношением (1.16) неверно и имеет место (1.9).

Нетрудно видеть, что формула (1.16) выражает не что иное, как «Парадокс Рассела». Иными словами, именно «Парадокс Рассела» является тем логическим основанием, исходя из которого делается вывод о несуществовании универсального класса всех множеств. Таким образом, можно придти к выводу о том, что в классической теории множеств, вопрос существования универсального класса непосредственно связан с «Парадоксом Рассела».

Еще Аристотелю было известно, что формальные противоречия могут возникать на аналитико-синтетическом этапе умственной деятельности человека в процессе переработки той или иной реальной информации. Кроме этого необходимо учитывать также и то обстоятельство, что реальная информация, по своей логической структуре может и не соответствовать аристотелевской традиционной логике. Представляется совершенно естественным, что мы не можем без должных на то оснований приписывать реальной информации логические свойства, вытекающие из аристотелевской традиционной логики, поскольку заведомо существуют такие утверждения и логические формулы, которые не соответствуют второму и третьему законам аристотелевской традиционной логики. Упомянутые логические формулы содержатся например в классических логических парадоксах, которые построены именно на том обстоятельстве, что входящие в них логические формулы выходят за рамки аристотелевской традиционной логики.

Представляет интерес то обстоятельство, что наличие логического **0**, как системобразующей константы современной классической логики нулевого порядка, позволяет нам моделировать «Парадокс Рассела» естественным образом, поскольку оно содержит логическую формулу, тождественно равную логическому **0**:

$$Q \equiv [(v \in v) \Leftrightarrow (v \notin v)] \equiv 0 \tag{1.17}$$

Из соотношения (1.17) следует, что логическая формула Q является логически инверсной по отношению к закону о непротиворечии аристотелевской традиционной логики. Учитывая свойства логического нуля и логической единицы, мы можем построить таблицы унарных и бинарных логических операций логической системы, основанной на «Законе тождества» аристотелевской традиционной логики и «Парадоксе Рассела». Как это ни парадоксально, но такая логическая система по своей логической структуре совпадает с соответствующими логическими структурами классической формальной логики нулевого порядка.

Таблица 3. Унарные логически трансцендентные операции

Унарные логически трансцендентные операции				
x	**g1(x)Ξ(¬)**	**g2x Ξ(=)**	**g3(1) Ξ (1)**	**g4(0)Ξ (0)**
$Q \Leftrightarrow \neg Q$	**1**	**0**	**1**	**0**
$A = A$	**0**	**1**	**1**	**0**

Из **Таблицы 3** и **Таблицы 4** следует, что в них логические **1** и **0**, заменены логическими формулами «Закона тождества» и «Парадокса Рассела» соответственно. С точки зрения логической структуры классической формальной логики нулевого порядка такая замена является логически эквивалентной в смысле значений формальной истинности.

Таблица 4. Бинарные логически трансцендентные операции

Бинарные логически трансцендентные операции										
x	**y**		**F_1**	**F_2**	**F_3**	**F_4**	**F_5**	**F_6**	**F_7**	**F_8**
$Q \Leftrightarrow \neg Q$	$Q \Leftrightarrow \neg Q$		**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
$Q \Leftrightarrow \neg Q$	$A = A$		**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
$A = A$	$Q \Leftrightarrow \neg Q$		**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
$A = A$	$Z = Z$		**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
x	**y**		**F_9**	**F_{10}**	**F_{11}**	**F_{12}**	**F_{13}**	**F_{14}**	**F_{15}**	**F_{16}**
$Q \Leftrightarrow \neg Q$	$Q \Leftrightarrow \neg Q$		**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
$Q \Leftrightarrow \neg Q$	$A = A$		**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
$A = A$	$Q \Leftrightarrow \neg Q$		**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
$A = A$	$A = A$		**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**

Формулы, не соответствующие законам аристотелевской традиционной логики, и тем самым выходящие за пределы упомянутой логической системы, названы нами логически трансцендентными (от лат. transcendentis – перешагивающий за пределы). Соответственно, логическая система, включающая логические формулы, выходящие за пределы аристотелевской традиционной логики, названа нами «Трансцендентной логикой». Из **Таблицы 3** и **Таблицы 4** следует, что на основе современной классической формальной логики нулевого порядка может быть полностью формализована не только аристотелевская традиционная логика, но и трансцендентная логика, основными структурными элементами которой является «Закон тождества» аристотелевской традиционной логики и «Парадокс Рассела», являющийся логически инверсным по отношению ко второму основному закону аристотелевской традиционной логики. Выявленные нами обстоятельства означают, что современная классическая формальная логика объединяет в своих рамках, как аристотелевскую традиционную логику, так и выходящую за ее пределы, - трансцендентную логику. Тем самым становится очевидным существенное отличие современной классической формальной логики нулевого порядка от аристотелевской традиционной логики.

2.Анализ феномена логической трансценденции в основаниях классической теории множеств

2.1 О формально-логической и теоретико-множественной системе INCOL&TAMLA

В настоящем параграфе представлено общее описание трансцендентной формально-логической и теоретико-множественной системы **INCOL&TAMLA** и некоторых, полученных на ее основе результатах /2,3,4/. При этом под формально-логической трансценденцией (от лат. transcendentis – перешагивающий, выходящий за пределы) понимается выход за пределы классической аристотелевской традиционной логики, наблюдаемый и доказуемый в рамках современной глобально непротиворечивой классической формальной логики нулевого порядка. Как известно, в современной классической формальной логике нулевого порядка основные логические законы, получаемые в пределах классической аристотелевской традиционной логики, являются тождественно-истинными логическими формулами. Известно также, что глобальная формально-логическая непротиворечивость классической формальной логики нулевого порядка неопровержимо доказана выдающимся австрийским логиком и математиком Куртом Геделем и не подлежит сомнению. Однако, с другой стороны, исследование логических свойств классической формальной логики нулевого порядка показало, что несмотря на это обстоятельство, в ней существуют и такие логические утверждения и логические формулы, которые хотя и не отрицают прямо закон о непротиворечии и закон исключенного третьего, однако в сильной степени отличаются от классических аристотелевских высказываний в смысле соответствия их законам о непротиворечии и исключенного третьего. Упомянутые логические утверждения и логические формулы классической формальной логики нулевого порядка были названы логически трансцендентными. Система **INCOL&TAMLA** разработана для эффективного исследования именно трансцендентных формально-логических и логико-аналитических формул в различных формальных и полуформальных математических теориях.

В рамках международного научно-технического общества **«INCOL»**, группа специалистов под руководством израильского ученого, работающего в области формальной логики, теории множеств, прикладной математики и механики - Александра Ахвледиани, - успешно завершила многолетнюю работу по созданию и применению трансцендентной многоуровневой формально-логической и теоретико-множественной математической системы **INCOL&TAMLA («Incolumitas & Transcendent Multilevel Logical Analysis»)**. Слово incolumitas на латыни обозначает безопасность. Тем самым, в названии упомянутой логико-математической и теоретико-множественной системы

INCOL&TAMLA подчеркивается, что знание трансцендентных логических свойств формальной классической логики нулевого порядка, позволяет содействовать логически безопасному ее применению в той или иной формальной или полуформальной математической теории, что не может быть гарантировано при стандартном ее использовании.

Логическим ядром упомянутой логико-математической технологии является «ноу-хау», сформулированное и обоснованное в 1990 году совместно Александром и Нодаром Ахвледиани в виде «Принципов логико-математической трансценденции». В течении последующих 20 лет, Александром Ахвледиани на основе упомянутых принципов, были осуществлены многочисленные логико-математические, научно-технические, мультидисциплинарные и логико-философские исследования, которые привели к разработке трансцендентной теоретико-множественной логико-математической системы **INCOL&TAMLA**.

Одним из первых, кто логически и математически строго показал существование слабо трансцендентных логических формул в достаточно богатых формальных и полуформальных математических теориях, содержащих аксиоматику Пеано, был выдающийся австрийский логик Курт Гедель. Для упомянутых выше теорий было показано существование в них таких логических формул F и ⌐F, что не представляется возможным доказать или опровергнуть ни одну из формул F или ⌐F, при условии, что упомянутые выше теории логически непротиворечивы. Этим самым Куртом Геделем было показано существование в этих теориях таких трансцендентных логических формул F и ⌐F, которые с одной стороны хотя и не отрицают закона об исключенном третьем, но с другой стороны и не удовлетворяют ему. При этом «Первая теорема Геделя» в интерпретации системы **INCOL&TAMLA** означает, что если достаточно богатая формальная или полуформальная математическая теория, содержащая аксиоматику Пеано, является непротиворечивой, то в ней согласно теории Курта Геделя существуют трансцендентные логические формулы F и ⌐F.

Известно, что глобальная формально-логическая непротиворечивость классической формальной логики нулевого порядка установлена Куртом Геделем. Глобальная формально-логическая непротиворечивость классической формальной логики нулевого порядка означает, что в ней невыводимы две такие тождественно истинные логические формулы, которые вместе с тем отрицали бы друг друга. Однако, тем не менее, в рамках формально-логической и теоретико-множественной системы **INCOL&TAMLA** удалось существенно развить теорию Курта Геделя, в том смысле, что было доказано существование в самой формально-логически непротиворечивой классической формальной логике нулевого порядка существование таких сильно трансцендентных утверждений и формул этой теории A и ⌐A, что по отдельности логически непротиворечиво выводимо, как A так и ⌐A. Необходимо отметить,что при доказательстве существования сильно трансцендентных утверждений A и ⌐A не был использован логический закон Дунса Скота, согласно которому из тождественно противоречивой формулы выводима любая формула, в том числе и противоречие вида A&⌐A. Наоборот, представленное в рамках **INCOL&TAMLA** формально-логическое доказательство сильной трансцендентности утверждений A и ⌐A, подразумевает именно непротиворечивый формальный логический вывод, не содержащий в себе тождественно противоречивых формул.

В основе приведенных выше результатов лежат **«Принципы логико-математической трансценденции»** сформулированные и доказанные совместно Александром и Нодаром Ахвледиани в 1990 году. Они состоят из следующих четырех утверждений, которые были формально логически строго доказаны в рамках классической формальной логики нулевого порядка, как теоремы, причем без применения косвенных методов доказательства и логического закона Дунса Скота.

<u>Первый принцип логико-математической трансценденции</u>

В классической формальной логике нулевого порядка существуют такие логически сильно трансцендентные утверждения и формулы A и ⌐A, что по отдельности логически непротиворечиво выводимо, как A так и ⌐A.

<u>Второй принцип логико-математической трансценденции</u>

В классической формальной логике нулевого порядка конструктивно существует логически инверсное хаусдорфово общее топологическое логическое пространство, в котором множество логических законов классической аристотелевской логики высказываний является лишь его собственным подклассом, а кроме него в упомянутом общем топологическом логическом пространстве, в качестве собственного подкласса содержится также и класс слабо и сильно трансцендентных логических утверждений и формул.

<u>Третий принцип логико-математической трансценденции</u>

В классической формальной логике нулевого порядка конструктивно существует логически инверсное аристотелевское, метризуемое по Хаусдорфу топологическое логическое пространство, содержащее локальные, внешне формально непротиворечивые логические подпространства формального классического исчисления Гильберта, внутри которых выводимы предельно трансцендентные логические формулы, эквивалентные отрицанию закона о непротиворечии и закона об исключенном третьем.

<u>Четвертый принцип логико-математической трансценденции</u>

Каждая, достаточно богатая формальная или полуформальная математическая теория, содержащая классическую формальную логику нулевого порядка, теорию рациональных чисел, определение бесконечно большой величины и определение взаимно однозначного соответствия классов или множеств (в том числе и бесконечных), содержит такие сильно трансцендентные логико-математические утверждения A и ⌐A, что по отдельности, формально логически и аналитически по отдельности непротиворечиво выводимо, как утверждение A, так и утверждение ⌐A.

В настоящее время система **«INCOL&TAMLA»** позволяет эффективно осуществлять многоуровневые мультидисциплинарные, междисциплинарные и монодисциплинарные исследования в различных областях науки и техники с учетом особенностей классической аристотелевской силлогистики, аристотелевской классической формальной логики, современной классической логики нулевого порядка, современной классической логики первого порядка, а также булевой алгебры.

На основе логико-математической системы **«INCOL&TAMLA»** были успешно разрешены некоторые классические трудноразрешимые задачи теории множеств, математического анализа, классической геометрии и аналитической механики, в том числе:

1. Исследована логическая структура «Континуум – гипотезы» Георга Кантора, доказаны ее логически трансцендентные свойства, которые заключаются в отличии ее от основных законов классической традиционной аристотелевской логики, и в рамках классической формальной логики нулевого и первого порядка, получены новые решения «Континуум-проблемы» Кантора вне аксиоматических систем **ZF** и **ZFC**.

2. Выполнен формально-логический анализ и даны решения некоторых классических парадоксов в основаниях логики. Показано, что некоторые парадоксы, такие как например «Парадокс лжеца» и «Парадокс Платона и Сократа», содержат логически слабо трансцендентные утверждения, которые с одной стороны, хотя и не отрицают аристотелевские законы о непротиворечии и исключенном третьем, но с другой стороны и не соответствуют аристотелевскому закону об исключенном третьем. Такие логические формулы в классической формальной логике нулевого порядка квалифицируются, как непротиворечивые и одновременно с этим, как недоказуемые. Только в одной версии «Парадокса лжеца», а именно в «Парадоксе Эпименида» содержится тождественно противоречивая логическая формула, равносильная утверждению о собственной ложности. На основании классической формальной логики нулевого порядка дано также

решение «Парадокса крокодила», и на его примере проанализирован процесс появления формально-логического тождественного противоречия в процессе формально-логических рассуждений. На основе системы **INCOL&TAMLA** удалось также найти по крайней мере два решения для известного софистического парадокса «Тяжба Протагора и Эватла», которые однако выходят за пределы классической традиционной аристотелевской логики. Предлагаемые решения, как раз иллюстрируют тот случай, когда на первый взгляд контрадикторно противоположные друг другу логические формулы оказываются на деле непротиворечиво разрешимыми.

3. На основе логико-математической системы **INCOL&TAMLA** разработана теория трансцендентных классов **TCT** (**Transcendent Classes Theory**), целью которой является изучение теоретико-множественных объектов и классов (в том числе и множеств), из существования которых следуют слабо трансцендентные, сильно трансцендентные или же предельно трансцендентные утверждения. Показано существование таких объектов и классов в канторовской теории множеств, а также в аксиоматических теориях множеств **ZF** и **ZFC**. Исследованы логические свойства «Метода математической индукции» и на конкретных примерах показаны его трансцендентные логические свойства. Кроме этого показано, что в аксиоматических системах **ZF** и **ZFC**, постулирующих существование пустого множества, и основанных на классической формальной логике первого порядка, пустое множество обладает такими трансцендентными логическими свойствами, что доказательство классической непротиворечивости систем **ZF** и **ZFC** становится невозможным.

4. Исследованы логико-аналитические особенности пятого постулата Евклида и связанных с ним различных аксиом о параллельных прямых. Доказано существование рациональной аналитической, абсолютной, неевклидовой плоскости, в которой «Постулат Прокла» о параллельных прямых доказывается как теорема. Одновременно с этим показывается, что пятый постулат Евклида в его оригинальной версии не может быть ни доказан, ни опровергнут в рассматриваемой абсолютной рациональной аналитической плоскости. Этим самым доказывается существование абсолютной аналитической плоскости, в которых «Постулат Прокла» является логически независимым от пятого постулата Евклида. Кроме этого на основе модели Клейна, и собственно евклидовского определения параллельных прямых, показано существование такой топологической по Хаусдорфу, модели абсолютной плоскости с бесконечно расширяющейся во времени границей, в которой постулат о параллельных прямых Лобачевского выполняется как теорема. Показано, что в абсолютной рациональной аналитической плоскости, выполнение или отрицание «Постулата Прокла», существенным образом зависит от аналитических и топологических свойств плоскости и определения параллельности прямых. Также показано, что собственно евклидовское определение параллельности прямых обладает трансцендентными логическими свойствами. Именно это его свойство и обуславливает

справедливость и доказуемость постулата Лобачевского о параллельных прямых при наличии соответствующих логико-аналитических свойств плоскости

5. Исследованы трансцендентные логические свойства второй проблемы Гильберта. Показано, что для каждой, достаточно богатой формальной или полуформальной математической теории, включающей в себя теорию целых неотрицательных чисел, «Аксиому пустого множества», «Аксиому экстенсиональности множеств», метод доказательства по трансфинитной индукции, понятие и определение бесконечных множеств, определение бесконечно большой величины, определение взаимнооднозначного соответсвия множеств (в том числе и для бесконечных множеств), - существуют такие логически сильно трансцендентные утверждения A и ¬A, что непротиворечиво выводимо, как A так и ¬A. Полученный результат означает невозможность доказательства классической аристотелевской непротиворечивости для каждой упомянутой достаточно богатой формальной и полуформальной теории. Это же в свою очередь означает, что на основе каждой такой теории невозможно доказать классическую аристотелевскую непротиворечивость аксиоматической системы Пеано, поскольку каждая такая теория сама не отвечает классическому аристотелевскому понятию о непротиворечивости.

Исследованы сильно трансцендентные свойства методов математической и трансфинитной индукции, приводящие в некоторых случаях к непротиворечивой выводимости некоторых утверждений вида A и ¬A по отдельности в процессе стремления аргументов логических индуктивных формул к бесконечности. Показано, что существуют случаи, когда при стремлении к бесконечности, методы математической и трансфинитной индукции не согласуются с законами о непротиворечии и об исключенном третьем аристотелевской логики высказываний. Полученные результаты свидетельствуют о существовании значительных логико-аналитических проблем с точки зрения аристотелевской традиционной логики в области классической теоретико-множественной математики, а также в теориях **ZF** и **ZFC**, и хорошо согласуются с первой и второй теоремами Курта Геделя о неполноте формальных и полуформальных математических теорий. Необходимо отметить, что приведенные выше результаты никак не затрагивают известные результаты выдающегося немецкого математика Герхарда Генцена о логической совместности аксиом и арифметики Пеано, полученные им в 1936 году, на основе добавления к логике первого порядка аксиомы о бесквантороной индукции.

6. Исследованы трансцендентные логические свойства шестой проблемы Гильберта о полной и логически строгой (в аристотелевском понимании) аксиоматизации различных областей физики. Показано, что в общем случае эта задача является формально логически неразрешимой с точки зрения основных законов классической аристотелевской логики. В частности показано, что на основании основных законов аристотелевской логики не может быть аксиоматизирована например такая область механики, как аналитическая

статика. Показано существование в аналитической статике таких логически сильно трансцендентных утверждений, которые могут быть как доказаны так и опровергнуты. Показано, что именно таким логическим сильно трансцендентным свойством обладает «Принцип возможных перемещений» Лагранжа в отношении идеальных систем, который как показали логико-аналитические исследования, можно доказать и можно опровергнуть. Показано, что какова бы ни была аксиоматическая система в области аналитической статики, то основанная на ней теория или не будет содержать утверждение, содержащееся в «Принципе возможных перемещений», и тогда она будет содержательно неполной, или же она будет содержать «Принцип возможных перемещений», а значит тем самым будет содержать утверждение с предельно трансцендентными логическими свойствами, и в этом случае она не будет логически согласовываться с классической аристотелевской логикой.

Аналогичное положение складывается и в области аналитической динамики. Были исследованы сильно трансцендентные логические свойства вариационного «Принципа Д'Аламбера-Лагранжа» в аналитической динамике. Показаны логически сильно трансцендентные свойства этого принципа в области аналитической динамики пластических систем. Выявлен широкий класс пластических систем, для которых условие выполнимости вариационного «Принципа Д'Аламбера-Лагранжа» является достаточным, как для соблюдения условий равновесия, так и для полного разрушения одной и той же системы при одних и тех же аналитических условиях для внешней нагрузки. Этим самым доказывается формально логически предельно-трансцендентная природа «Принципа Д'Аламбера-Лагранжа», формально логически эквивалентная отрицанию закона о непротиворечии и отрицанию закона об исключенном третьем.

Таким образом, проведенные исследования показали, что явление логико-математической трансценденции является не случайным, а вполне закономерным явлением, наблюдаемым даже в глобально формально непротиворечивой классической формальной логике нулевого порядка, в канторовской и аксиматических теориях множеств **ZF** и **ZFC**, во многих прикладных областях геометрии, математики и физики, таких как например классическая планиметрия, аналитическая статика и динамика. Такое положение дел не должно казаться удивительным, поскольку уже Аристотелю были известны логико временные ограничения, накладываемые на применение закона о непротиворечии и закона об исключенном третьем. Известно сохраненное в истории логики мнение Аристотеля о том, что законы о непротиворечии и об исключенном третьем не имеют силы в суждениях относительно будущих событий и явлений, поскольку будущие события не являются определенно детерминированными. Это мнение Аристотеля непосредственно касается тех формальных и полуформальных математических теорий, которые так или иначе занимаются вопросами изучения бесконечности.

Как известно, современная теория классов и множеств допускает учет времени в явном виде. Это означает, что при учете времени в явном виде, т.е. при параметризации тех или иных бесконечных процессов с помощью введения независимого параметра времени, проблема противоречивости или непротиворечивости принципиально снимается, поскольку соблюдение в этих условиях закона о непротиворечии и исключенном третьем не представлялось возможным даже создателю основных законов классической традиционной логики – Аристотелю. Однако явление логико-математической трансценденции, со своей стороны, вносит существенные коррективы в доказательную базу той или иной формальной или полуформальной математической теории. В частности, в вопросах, связанных с изучением бесконечности и бесконечных процессов, с целью адекватного описания упомянутых процессов, становится необходимым учет **A** и **B** логик времени. Кроме этого, при выходе за пределы применимости закона о непротиворечии и закона об исключенном третьем, фактически становятся нелигитимным применение таких косвенных методов доказательств, как классический метод доказательства от противного, закон Клавия, закон снятия двойного отрицания, а также некоторых других логических законов, связанных с законом о непротиворечии и законом об исключенном третьем. Если же, как это происходит во многих случаях в действительности, упомянутые методы все же применяются систематически, как это имеет место в канторовской теории множеств и в теориях **ZF** и **ZFC**, то представляется возможным – введение «Принципа доминирования» (принципа предпочтения), согласно которому на множестве формально логических доказательств в рамках классической формальной логики нулевого порядка, - прямые методы доказательства доминируют косвенные (прямые методы доказательства имеют предпочтение перед косвенными).

В логико-философском смысле, идея разработки системы **INCOL&TAMLA** восходит к логико философскому учению **«Трансцендентальной логики»** выдающего немецкого мыслителя Иммануила Канта, рассмотревшего в своей знаменитой работе, вопросы соотношения, существоваших на тот период времени, различных направлений логики. В контексте исторического развития логики и математики как наук, система **INCOL&TAMLA** позволяет формально-логически (в рамках логических систем классической формальной логики нулевого и первого порядков) и аналитически строго обосновать основные положения доаристотелевской логической школы софистов, субъективно-логическая и логико-релятивистская концепции которых, как это показали проведенные современные исследования, имеют вполне равные права на существование с аристотелевской классической традиционной логикой в рамках современной глобально формально непротиворечивой классической формальной логики нулевого порядка, а также в вопросах, связанных с существенной логической неопределенностью и изучением логико-аналитических свойств бесконечных классов и множеств.

2.2 Теорема экзистенциальности универсального класса

В настоящем параграфе исследуется вопрос логической выводимости экзистенциальности (существования) универсального класса U в той или иной аксиоматической теории классов или множеств. Показано, что в каждой теории множеств, в которой принята «Аксиома пустого множества», - утверждение экзистенциальности универсального класса U является логически выводимым. Кроме этого показано, что универсальный класс U одновременно является множеством. При условии принятия аксиомы о существовании пустого множества, доказана теорема конструктивной экзистенциальности любого класса с наперед заданным характеристическим свойством.

В теории множеств основополагающее значение имеет отношение принадлежности объекта объекту. Для его обозначения в теории множеств выбран символ $\in$. С использованием символов для обозначения объектов, факт принадлежности объекта X объекту Y выражается следующей формулой:

$$X \in Y \tag{2.2.1}$$

Наоборот, факт непринадлежности объекта X объекту Y выражается следующей формулой:

$$X \notin Y \tag{2.2.2}$$

Формула (2.2.1) читается следующим образом: объект X принадлежит объекту Y. Формула (2.2.2) читается следующим образом: объект X не принадлежит объекту Y.

В теории множеств для сокращенного символического обозначения языковых логических конструкций применяются так называемые кванторы. Например $\exists$ - является квантором существования и применяется для обозначения существования тех или иных объектов.

Факт существования объекта X выражается следующим образом:

$$\exists X \tag{2.2.3}$$

Факт не существования объекта X выражается следующим образом:

$$\neg(\exists X) \tag{2.2.4}$$

Формула (2.2.3) читается следующим образом: существует объект X. Формула (2.2.4) читается следующим образом: не верно, что существует объект X, или, что то же самое – объекта X не существует.

Другим основным квантором теории множеств является квантор всеобщности, который обозначается $\forall$. Выражение:

$$\forall X \tag{2.2.5}$$

означает – для всех объектов X .

Выражение:

$$\neg(\forall X) \tag{2.2.6}$$

означает – не верно, что для всех объектов X .

В современных исследованиях по теории множеств имеется достаточно подробно разработанная классификация тех или иных объектов и классов. Приведем некоторые основные моменты упомянутой классификации по книге /1/ известного чешского специалиста по теории множеств – доктора П.Вопенки.

Пусть даны какие-либо уже созданные объекты и указан некоторый способ, с помощью которого можно выделить эти объекты среди остальных объектов. Упомянутый способ выделения объединяет эти объекты. Если на выделенные таким образом объекты можно смотреть, как на вполне равноправные, то говорят, что выделена *совокупность объектов*. Если же по условиям рассматриваемого вопроса необходимо признать за выделенными объектами различные позиции и не представляется возможным игнорировать то обстоятельство, что они имеют различные свойства, или вступают в различные отношения, то говорят, что *выделено сообщество объектов*.

Выделение группы объектов из совокупности других объектов происходит на основе задания так называемого характеристического свойства, которое представляет собой признак, по которому та или иная группа объектов выделяется из совокупности других объектов.

При определении некоторого класса на основе характеристического свойства $C(x)$ (характеристическое свойство может представлять собой также совокупность свойств, которым должны удовлетворять элементы определяемого класса) символьная запись определяемого класса имеет следующий вид:

$$Cls(Cx) = \{x : (\forall x)(C(x))\} \tag{2.2.7}$$

Определение множества

Множеством называется класс, удовлетворяющий следующему условию:

$$Set(Cx) = \{x : (\forall x)(C(x)) \wedge \forall y(C(y) \oplus \neg C(y))\} \tag{2.2.8}$$

Формула (2.2.8) означает, что множеством является такой класс, элементы которого удовлетворяют характеристическому свойству $C(x)$, и, кроме этого, для каждого объекта y на основании закона об исключенном третьем можно решить, удовлетворяет ли он характеристическому свойству $C(x)$, либо нет.

Таким образом мы видим, что понятие множества не принадлежит к числу самоочевидных понятий. Выдающийся чешский математик Бернард Больцано, который первым ввел понятие множества, в свое время должен был приложить немало усилий, чтобы объяснить читателю, что совокупность каких либо объектов, а тем более *сообщество объектов зачастую разнородных*, можно представить себе, как самостоятельную сущность. Формула (2.2.8) позволяет рассматривать множества, как вполне определенные, логически четко выделенные классы.

Одним из основных понятий теории классов является понятие пустого множества. Пустым множеством называется такой класс, который не содержит ни одного элемента. Пустое множество обозначается символом $\varnothing$. В теории классов пустое множество является аналогом арифметического 0 множества действительных чисел. По определению существует только одно пустое множество. Формула $A = \varnothing$ означает, что множество A не имеет ни одного элемента, что оно пусто, что оно «исчезает». Если не вводить понятия пустого множества, то при определении того или иного конкретного класса С пришлось бы часто делать оговорку: если он существует. Это происходит из-за того, что часто элементы класса определены так, что заранее бывает неизвестно, существуют они или нет.

В аксиоматических теориях множеств, существование самого пустого множества утверждается специальной «Аксиомой пустого множества», которая формулируется следующим образом.

«Аксиома пустого множества»

Существует множество, не содержащее ни одного элемента:

$$(\exists x)(\forall y)(y \notin x) \qquad (2.2.9)$$

Как правило, множество оказывается пустым, в том случае, когда характеристическое свойство множества - $C(x)$, определяющее совокупность элементов множества, является логически, математически или физически неосуществимым.

Необходимо отметить, что введение понятия пустого множества, и в особенности, связанной с ним «Аксиомы пустого множества», оказывает значительное воздействие на сами логические выводы, получаемые в рамках теории классов и множеств.

До создания теории множеств, в классическом математическом анализе, проблема существования или не существования тех или иных логических или математических объектов была тесно связана с непротиворечивостью или противоречивостью определяемых объектов. Исходя из основных законов аристотелевской логики, при построении той или иной математической теории, в нее включались и в ней признавались существующими только те объекты, непротиворечивость которых была установлена с достоверностью. Те же объекты, которые по своей логической или математической природе являлись противоречивыми, - исключались из дальнейшего рассмотрения в этой теории, т.е. признавались не существующими в этой теории.

С созданием теории множеств, и введения в нее понятия пустого множества совместно с «Аксиомой пустого множества», прежняя концепция существования или не существования тех или иных объектов в рамках той или иной математической теории кардинально изменилась. Ниже, для каждой аксиоматической теории множеств, содержащей аксиому существования пустого множества сформулирована и доказана теорема о конструктивном существовании любого класса с наперед заданным характеристическим свойством.

<u>Теорема конструктивной экзистенциальности классов (Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)</u>

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей «Аксиому пустого множества», существование пустого множества является достаточным условием для доказательства конструктивного существования каждого класса, определяемого наперед заданным характеристическим свойством (или совокупностью свойств) $C(x)$**.**

Доказательство

Рассмотрим следующие случаи. Первый случай: характеристическое свойство $C(x)$ является логически, математически или физически неосуществимым. Тогда не существует ни одного элемента x , удовлетворяющего этому свойству. В этом случае класс со свойством $C(x)$ является пустым. Однако в силу «Аксиомы пустого множества» – пустое множество существует. Это означает, что в рассматриваемом случае класс со свойством $C(x)$ хотя и является пустым , но тем не менее существует, как пустое множество.

Второй случай: характеристическое свойство $C(x)$ является осуществимым, т.е. существуют элементы x, удовлетворяющие характеристическому свойству $C(x)$. В этом случае, согласно (2.2.7), класс $Cls(Cx)$ является непустым, а следовательно – тем более конструктивно существующим.

Из приведенного выше рассуждения следует, что в любом случае, невзирая на осуществимость или неосуществимость характеристического свойства $C(x)$, класс $Cls(Cx)$ существует или в виде непустого класса, или же в виде пустого множества. Это означает, что если с существованием класса $Cls(Cx)$ возникают противоречивые суждения, *то мы вынуждены признать также и факт их существования*. Это обстоятельство является неотъемлимым свойством каждой теории классов или теории множеств, содержащей «Аксиому пустого множества», и является прямым следствием принятия этой аксиомы.

Перейдем теперь к определению универсального класса.

Определение универсального класса

Класс U называется универсальным, если любой непустой или пустой объект является его элементом.

Формальное определение универсального класса

$$U = Cls(u) = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\} \tag{2.2.10}$$

Формула (2.2.10) означает, что элементами универсального класса U являются, как пустое множество, так и любой непустой класс.

Первая теорема экзистенциальности универсального класса

(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей аксиому пустого множества, существование пустого множества является достаточным условием для доказательства существования универсального класса U .

$$\exists\varnothing \Rightarrow \exists U((U = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\})) \tag{2.2.11}$$

Доказательство

В соответствии с самим определением (2.2.10) универсального класса, он содержит пустое множество в качестве элемента. Следовательно универсальный класс является непустым. В силу теоремы экзистенциальности классов, это обстоятельство означает конструктивное существование универсального класса U . Теорема доказана.

<u>Вторая теорема экзистенциальности универсального класса</u>

<u>(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)</u>

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей аксиому пустого множества, отрицание существования универсального класса U, влечет за собой отрицание существования пустого множества $\varnothing$. Следовательно универсальный класс U существует.

Доказательство

Доказательство приведенной выше теоремы опирается на логический закон контрапозиции. На основании справедливости формулы (2.2.11) и логического закона контрапозиции можно заключить:

$$\begin{aligned}&(\exists\varnothing \Rightarrow \exists U((U = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\})) \Leftrightarrow \\ &(\neg\exists U((U = \{u : (u = \varnothing) \vee (u \neq \varnothing)\})) \Rightarrow \neg\exists\varnothing)\end{aligned} \qquad (2.2.12)$$

Из соотношения (2.2.12) непосредственно видно, что отрицание существования универсального класса, приводит к отрицанию пустого множества, а это противоречит «Аксиоме пустого множества». Следовательно универсальный класс U существует. Теорема доказана.

<u>Теорема экзистенциальности универсального множества</u>

<u>(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)</u>

Универсальный класс U является множеством.

Доказательство

Из теоремы экзистенциональности классов и формального определения (2.2.10) универсального класса U следует, что любой класс, определяемый некоторым характеристическим свойством $C(x)$, является элементом универсального класса U. Поэтому для универсального класса U выполняется формальное определение множества (2.2.8). Следовательно универсальный класс U является множеством.

Таким образом, вопреки широко распространенному мнению о не существовании универсального класса, - в настоящей работе показано,что наоборот, - универсальный класс U существует и является множеством.

2.3 О трансцендентных логических свойствах пустого множества в канторовской теории множеств и основных определениях трансцендентной логики

Одним из основополагающих отношений между множествами и классами, является отношение принадлежности элементов одного множества или класса, другому множеству или классу. Рассмотрим соответствующие определения по монографии /5/ выдающегося немецкого математика Феликса Хаусдорфа, в рамках теории множеств Георга Кантора.

Если даны два непустых множества X и Y, то возникает вопрос о том, не принадлежат ли элементы одного из них также и другому. Пусть x и y являются элементами множеств X и Y соответственно. Сперва рассмотрим следующие возможные альтернативы:

1. Каждое $x \in Y$, не каждое $x \in Y$.
2. Каждое $y \in X$, не каждое $y \in X$.

Комбинируя сочетания приведенных выше возможных альтернатив, приходим к следующим четырем возможным случаям:

1. Каждое $x \in Y$, каждое $y \in X$: $X = Y$.
2. Каждое $x \in Y$, не каждое $y \in X$: $X \subseteq Y$.
3. Не каждое $x \in Y$, каждое $y \in X$: $Y \subseteq X$.
4. Не каждое $x \in Y$, не каждое $y \in X$.

В случае (1) говорят, что множества X и Y равны друг другу. В случае (2) говорят, что множество X является подмножеством множества Y. В случае (3) говорят, что множество Y является подмножеством множества X. Для случая (4) в монографии Ф.Хаусдорфа /5/ не зарезервировано никаких обозначений.

В канторовской теории множеств говорится о необходимости признания существования пустого множества, обозначаемого как $\varnothing$, причем постулируется единственность пустого множества. Фактически, пустое множество $\varnothing$ в теории множеств является аналогом арифметического ноля теории действительных чисел.

Если множества X и Y пусты, то имеет место соотношение:

$$X = Y = \varnothing \tag{2.3.1}$$

Определенные логические проблемы возникают в том случае, когда одно множество пусто, а другое нет. Положим для определенности, что множество X пусто, а множество

Y не является пустым. В этом случае, в монографии /5/ Ф.Хаусдорфом приведено следующее рассуждение, излагаемое ниже.

Пусть $X = \varnothing$, тогда утверждение «если $x \in \varnothing$, то $x \in Y$» справедливо потому, что $X = \varnothing$, не содержит ни одного элемента x, и $x \in \varnothing$ является ложным суждением. Если даны два суждения А и В, то утверждение «если А верно, то В также верно», верно всякий раз, когда А неверно. Из неверного суждения А следует любое суждение.

Таким образом, из приведенного выше отрывка из /5/ следует, что в данном случае в рассуждении Хаусдорфа применяется закон Дунса Скота, согласно которому из противоречия, или ложного суждения следует любое суждение. Хаусдорф тем самым признает, что суждение А, определяемое формулой:

$$A \equiv (x \in \varnothing) \equiv 0 \tag{2.3.2}$$

является ложным, где под 0 в данном случае понимается формально-логический ноль.

Необходимо отметить, что в классической аристотелевской традиционной логике закон Дунса Скота является предупредительным законом. Он предупреждает о том, что из ложного, или же противоречивого суждения может следовать любое суждение, в том числе и отрицание закона о непротиворечии, а именно:

$$0 \Rightarrow (B = \neg B) \tag{2.3.3}$$

Именно этот предупредительный закон и нарушен в канторовской теории множеств. Таким образом канторовская теория множеств содержит логически ложную формулу (2.3.2) , на основании которой выводимо аристотелевское противоречие, содержащееся в качестве подформулы в (2.3.3). В классической аристотелевской традиционной логике это означает, что канторовская теория множеств содержит ложное основное положение в виде (2.3.2) из которого выводимо противоречие, содержащееся в (2.3.3). Ложное основное положение в классической традиционной логике называется – error fundamentalis (лат.).

Рассмотрим следующие определения.

Определение логически сильно трансцендентных логических формул

Логические формулы F и ⌐F называются логически сильно трансцендентными, если по отдельности является доказуемым или выводимым, как F, так и ⌐F.

Определение логически сильно трансцендентной теории

Формальная или полуформальная, логическая или математическая теория T называется логически сильно трансцендентной, если на множестве ее суждений TS по отдельности выводимы сильно трансцендентные логические формулы F и ⌐F. Логически сильно трансцендентная теория обозначается как HT.

Определение логически предельно трансцендентных логической формул

Логические формулы F и ⌐F называются логически предельно трансцендентными в некоторой формальной или полуформальной логической или математической теории T, если для них в этой теории выполняется хотя бы одно из перечисленных ниже логических соотношений:

$$F \wedge \neg F$$

$$F = \neg F$$

$$\neg F \wedge \neg\neg F$$

$$F \Leftrightarrow \neg F$$

$$\neg(F \vee \neg F)$$

$$(F \Rightarrow 0) \wedge (\neg F \Rightarrow 0)$$

$$\neg(F \oplus \neg F)$$

Определение логически предельно трансцендентной теории

Формальная или полуформальная, логическая или математическая теория T называется логически предельно трансцендентной, если на множестве ее суждений TS выводима хотя бы одна пара предельно трансцендентных логических формул F и ⌐F. Предельно трансцендентную теорию обозначим – LT.

Определение логически предельно трансцендентного объекта

Каждый объект, класс или множество, конструктивно существующие в теории T, называются логически предельно трансцендентными в этой теории, если на

множестве TS суждений этой теории, в отношении упомянутых объекта, класса или множества логически или аналитически выводимы предельно трансцендентные логические формулы F и ¬F. Предельно трансцендентный объект, класс или множество обозначим – LTC.

<u>Определение логически сильно трансцендентного объекта</u>

Каждый объект, класс или множество, конструктивно существующие в теории T, называются сильно трансцендентными в этой теории, если на множестве TS суждений этой теории, по отдельности выводимы сильно трансцендентные логические формулы F и ¬F. Сильно трансцендентный объект, класс или множество обозначается как HTC.

Обозначим канторовскую теорию множеств через **CST (Cantorian Set Theory)**. Из соотношения (2.3.3) мы видим, что к сожалению, в канторовской теории множеств содержится error fundamentalis, в результате чего становится выводимым логически предельно трансцендентная формула. Это означает, что теория множеств Кантора **CST**, является логически предельно трансцендентной теорией. Указанное обстоятельство самым серьезным образом влияет на выводы, получаемые в рамках **CST**, особенно это касается «Теоремы Кантора» и «Парадокса Кантора», являющихся основой выводимых далее основных теорем в канторовской теории множеств.

2.4 Парадокс «Аксиомы пустого множества» и «Аксиомы регулярности» в аксиоматических системах ZF и ZFC

В настоящем параграфе представлен анализ открытого автором в основаниях классической аксиоматической теории множеств «Парадокс «Аксиомы пустого множества» и «Аксиомы регулярности» в аксиоматических системах **ZF** и **ZFC**», который заключается в том, что в результате стремления избежать возникновения «Парадокса Рассела» в основаниях теории множеств и введения с этой целью «Аксиомы регулярности», возникает целый класс множеств типа b, каждое из которых является элементом логически трансцендентного R-класса Рассела.

«Аксиома регулярности» по своей логической значимости занимает одно из центральных мест в аксиоматических теориях множеств **ZF** и **ZFC** (система аксиом Цермело-Френкеля, и та же система, дополненная «Аксиомой выбора»). Ее основное назначение заключалось в устранении «Парадокса Рассела» в основаниях теории множеств. Для того, чтобы перейти к логически адекватному рассмотрению «Аксиомы регулярности» и ее логических особенностей, рассмотрим сперва формулировку и содержание «Парадокса Рассела», а также вытекающие из него следствия.

<u>Парадокс Рассела</u>

Класс Z назовем регулярным, если для него выполняется соотношение:

$$Z \notin Z \tag{2.4.1}$$

Класс Y назовем нерегулярным, если для него выполняется соотношение:

$$Y \in Y \tag{2.4.2}$$

Сформируем класс R следующим образом:

$$R = Cls(Z) = \{Z : Z \notin Z\} \tag{2.4.3}$$

Зададимся вопросом, является ли класс R регулярным либо нет?

Если класс R является регулярным, то выполняется условие:

$$R \notin R \tag{2.4.4}$$

Тогда класс R удовлетворяет определению (2.4.3), и в силу самого определения (2.4.4) класса R следует:

$$R \in R \tag{2.4.5}$$

Таким образом:

$$(R \notin R) \Rightarrow (R \in R) \tag{2.4.6}$$

Рассмотрим теперь вторую возможность, а именно:

$$R \in R \tag{2.4.7}$$

Тогда в силу определения принадлежности объекта классу, класс R является элементом самого себя, и в силу определения (2.4.3) для него выполняется характеристическое свойство, согласно которому:

$$R \notin R \tag{2.4.8}$$

Таким образом:

$$(R \in R) \Rightarrow (R \notin R) \tag{2.4.9}$$

Из сопоставления (2.4.6) и (2.4.9) следует:

$$(R \notin R) \Leftrightarrow (R \in R) \tag{2.4.10}$$

Мы видим, что соотношение (2.4.10) является логически контрадикторным к закону о непротиворечии классической аристотелевской традиционной логики. Назовем класс R - классом Рассела. Из соотношения (2.4.10) и определения логически трансцендентных классов, следует, что R - класс Рассела является логически предельно трансцендентным.

Возникает естественный вопрос: является ли класс Рассела непустым? Для того, чтобы показать, что класс Рассела конструктивно является непустым, достаточно показать, что он содержит хотя бы один элемент. Для этого рассмотрим пустое множество $\varnothing$. В силу «Аксиомы пустого множества» имеем:

$$\{x : (\forall y)(y \notin x)\} = \varnothing \tag{2.4.11}$$

В силу формулы (2.4.11) имеем:

$$\varnothing \notin \varnothing \tag{2.4.12}$$

Из сопоставления (2.4.12) и (2.4.3) следует:

$$\varnothing \in R \tag{2.4.13}$$

Из (2.4.13) следует, что класс Рассела является непустым. Поэтому в силу «Теоремы экзистенциальности классов», - класс Рассела существует конструктивно. Доказанное утверждение можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Первая теорема экзистенциальности класса Рассела

(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей «Аксиому пустого множества», существование пустого множества является достаточным условием для доказательства конструктивного существования класса Рассела - R **.**

$$\exists\varnothing \Rightarrow \exists R((R = \{Z : Z \notin Z\}) \wedge (R \neq \varnothing)) \tag{2.4.14}$$

На основании логического закона контрапозиции, приведенную выше теорему можно сформулировать иным образом.

<u>Вторая теорема экзистенциальности класса Рассела</u>

<u>(Ахвледиани А.Н. – 2011 г.)</u>

Для каждой аксиоматической теории классов, содержащей аксиому существования пустого множества, отрицание существования класса Рассела - R, влечет за собой отрицание существования пустого множества $\varnothing$:

$$\neg\exists R((R = \{Z : Z \notin Z\}) \wedge (R \neq \varnothing)) \Rightarrow \neg\exists\varnothing \qquad (2.4.15)$$

Доказательство

В силу соотношения (2.4.14) и логического закона контрапозиции имеем:

$$\begin{aligned}&(\exists\varnothing \Rightarrow \exists R((R = \{Z : Z \notin Z\}) \wedge (R \neq \varnothing))) \Leftrightarrow \\ &(\neg\exists R((R = \{Z : Z \notin Z\}) \wedge (R \neq \varnothing)) \Rightarrow \neg\exists\varnothing)\end{aligned} \qquad (2.4.16)$$

Соотношение (2.4.16) доказывает сформулированную теорему.

Рассмотрим следующее определение.

<u>Определение логически предельно трансцендентных объектов, классов и множеств</u>

Каждый объект, класс или множество, конструктивно существующие в теории T, называются логически предельно трансцендентными в этой теории, если на множестве TS суждений этой теории, в отношении упомянутых объекта, класса или множества конструктивно существуют предельно трансцендентные логические формулы F и ⌐F. Предельно трансцендентный объект, класс или множество обозначим – LTC.

Приведенное выше определение совместно с теоремами экзистенциальности класса Рассела позволяют выразить полученные в приведенных выше рассуждениях результаты в виде теоремы.

<u>Теорема экзистенциальности логически предельно трансцендентных объектов и классов (Ахвледиани А.Н. – 2011)</u>

Существует по крайней мере один логически предельно трансцендентный объект и класс. R-класс Рассела является логически предельно трансцендентным объектом и классом.

Рассмотрим следующее определение.

Определение генезиса объекта, класса или множества

Генезисом логического математического или теоретико-множественного объекта, класса или множества называется конструктивное аналитическое или численное существование упомянутого объекта, класса или множества, основанием которого является математический вывод или доказательство его конструктивного существования, строго формализуемые в рамках современной глобально непротиворечивых классических формальных логик нулевого и первого порядков.

Определение генезиса логически трансцендентного объекта, класса или множества

Генезисом логически трансцендентного математического или теоретико-множественного объекта, класса или множества называется конструктивное аналитическое или численное существование упомянутого объекта, класса или множества, основанием которого является математический вывод или доказательство его конструктивного существования, строго формализуемые в рамках современной глобально непротиворечивых классических формальных логик нулевого и первого порядков.

Определение генезиса логико-математической трансценденции

Генезисом логико-математической трансценденции в некоторой теории T называется процесс появления логически трансцендентных математических или теоретико-множественных объектов классов или множеств в этой теории.

Из приведенных выше рассуждений следует, что экзистенциальность логически трансцендентного R-класса Рассела является прямым следствием «Аксиомы пустого множества», что с учетом приведенных выше определений можно выразить также в виде следующей теоремы.

Теорема о достаточном условии генезиса логически предельно трансцендентных объектов (Ахвледиани А.Н. – 2011)

Принятие «Аксиомы пустого множества» является достаточным условием для генезиса логически предельно трансцендентных объектов и классов в классической теории множеств.

Приведенные выше теоремы означают, что существование трансцендентных объектов и классов, в частности логически трансцендентного R-класса Рассела предопределяется «Аксиомой пустого множества» и не зависит от других аксиом теории множеств.

Приведем формулировку «Аксиомы регулярности», основной целью которой было преодоление «Парадокса Рассела».

<u>Аксиома регулярности</u>

В любом непустом семействе множеств - a***, есть по меньшей мере одно множество*** b***, каждый элемент*** c ***которого не принадлежит данному семейству*** a***, или формально:***

$$RA \equiv \forall a(a \neq \varnothing \Rightarrow \exists b(b \in a \wedge \forall c(c \in b \Rightarrow c \notin a))) \qquad (2.4.17)$$

Для дальнейшего изложения нам необходимо доказать следующую теорему в рамках классической формальной логики нулевого порядка.

<u>Теорема о верификации формальной доказуемости логического утверждения</u>

Если некоторое утверждение В следует из другого, отличного от него утверждения А, а также и из его отрицания ¬А, то утверждение В является формально доказуемым.

Доказательство

Доказательство сформулированной выше теоремы осуществлено на основании логической программы вычислительного математического пакета **MATCAD**. В соответствии с правилами классической формальной логики нулевого порядка имеют место следующие соотношения:

$$A := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\Rightarrow [[(\Rightarrow (\mathrm{A}, \mathrm{B})) \wedge (\Rightarrow (\neg \mathrm{A}, \mathrm{B}))], \mathrm{B} = 1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Формула (2.4.20) свидетельствует о том, что сформулированная нами теорема является верной.

Рассмотрим теперь «Парадокс «Аксиомы пустого множества» и «Аксиомы регулярности» в системах **ZF** и **ZFC**».

Парадокс «Аксиомы пустого множества» и «Аксиомы регулярности» в системах ZF и ZFC (Ахвледиани А.Н. -2011)

Пустое множество $\varnothing$ и каждое конструктивно существующее множество типа b, формализуемое в системах ZF и ZFC на основе логической коньюнкции «Аксиомы пустого множества» и «Аксиомы регулярности», принадлежат логически трансцендентному R-классу Рассела.

Доказательство

Возможны следующие случаи.

1. В теории ZF не имеется ни одного непустого класса, удовлетворяющего всем аксиомам теории ZF. В этом случае семейство классов CZF, определяемых теорией ZF является пустым множеством $\varnothing$ и вследствие этого обстоятельства, а также вследствие определения логически трансцендентного R-класса Рассела - CZF является элементом R. В этом случае условие, сформулированное в «Парадоксе «Аксиомы пустого множества» и «Аксиомы ругулярности» выполняется, поскольку в рассматриваемом случае класс CZF принадлежит логически трансцендентному R-классу Рассела, как пустое множество.

2. Существует хотя бы один непустой класс a, удовлетворяющий всем аксиомам теории ZF. Тогда в соответствии с «Аксиомой регулярности» существуют множества типа b, для каждого из которых сперва рассмотрим первый подслучай, а именно:

$$(b \in b) \equiv 1 \qquad (2.4.21)$$

В рассматриваемом случае «Аксиома регулярности» RA будет содержать логическую подформулу:

$$\exists b(b \in a \wedge (b \in b \Rightarrow b \notin a)) \qquad (2.4.22)$$

Вследствие (2.4.21) логическая формула (2.4.22) приводит к аристотелевскому противоречию. Это означает, что у нас остается только подслучай, альтернативный к (2.4.21), а именно:

$$(b \notin b) \equiv 1 \qquad (2.4.23)$$

В этом случае по определению логически трансцендентного R-класса Рассела – каждое множество типа b принадлежит R-классу. Этому же классу принадлежит и пустое множество $\varnothing$. Таким образом и в этом рассматриваемом случае выполняются условия сформулированного нами парадокса. Применяя «Теорему верификации формальной доказуемости утверждения» мы можем заключить, что действительно, выявленный нами парадокс имеет место. Таким образом применение «Аксиомы регулярности» при формировании тех или иных классов или множеств в рамках аксиоматических теорий ZF и ZFC порождает множества типа b, которые *наполняют логически трансцендентный* R-класс Рассела. Это означает, что на основании «Аксиомы регулярности» не удается преодолеть «Парадокс Рассела», причиной генезиса которого является «Аксиома пустого множества» и более того – применение «Аксиомы регулярности» наоборот, - *способствует наполнению логически трансцендентного* R-класса Рассела.

2.5 Логический анализ «Теоремы Кантора

Рассмотрение логических свойств «Теоремы Кантора» о мощности всех подмножеств данного множества предварим некоторыми основными положениями теории множеств. Одной из первых основных аксиом теории множеств является «Аксиома экстенсиональности», содержание которой приведено ниже в соответствии с /1/.

<u>Аксиома экстенсиональности</u>

Любое множество однозначно определяется своими элементами. Для равенства двух непустых множеств необходимо и достаточно, чтобы элементы каждого из них, были элементами и другого. Пустое множество равно самому себе.

$$\forall X,Y(\forall z(z\in X \Leftrightarrow z\in Y) \Leftrightarrow X=Y) \qquad (2.5.1)$$

В теории множеств рассматривают, как конечные, так и бесконечные множества. Преимущественное внимание уделяется рассмотрению бесконечных множеств. Среди конечных множеств выделяют также такие множества, которые содержат единственный элемент $\{a\}$. В частности, если объект a является пустым множеством, то рассматривают также множество $\{\varnothing\}$, единственным элементом которого является пустое множество $\varnothing$.

Одной из наиболее важных акиом теории множеств является «Аксиома степени». Приведем ее формулировку в соответствии с /1/.

<u>Аксиома степени</u>

Для каждого множества X существует множество Y, являющееся множеством всех подмножеств множества X:

$$\forall X\exists Y\forall z(z\in Y \Leftrightarrow z\subseteq X) \qquad (2.5.2)$$

Приведем некоторые базовые положения теории множеств, связанные с различием конечных и бесконечных множеств, а также с понятиями соответствия и эквивалентности множеств.

Рассмотрим сперва множество всех целых положительных чисел в десятичной системе счисления с присоединенным к нему особым числом, называемым нулем 0.

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.5.3)$$

Из множества (2.5.3) можно выделить множество натуральных чисел или натуральный ряд, который имеет следующий вид:

$$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.5.4)$$

Необходимо отметить, что вопрос принадлежности 0 множеству натуральных чисел является неоднозначным, весьма нетривиальным и спорным. Поскольку 0 обладает особыми логико-аналитическими свойствами в теории действительных и комплексных чисел, мы в дальнейшем не будем причислять 0 к множеству натуральных чисел. С другой стороны без 0 невозможна запись натуральных чисел в десятичной системе счисления. Исходя из вышесказанного, мы будем рассматривать множество (2.5.3) целых положительных чисел с присоединенным к нему 0, как базовое, и выделим из него множество натуральных чисел (2.5.4).

Понятие соответствия относится к основным понятиям теории множеств. Говорят, что между двумя множествами установлено соответствие, если определено правило, по которому для каждого элемента одного множества выбирается определенный элемент другого множества. На основе понятия соответствия между множествами, вводится также понятие отображения множеств. При этом различают понятия отображения «множества в множество», и отображения «множества на множество».

<u>Определение понятия отображения множества в множество</u>

Соответствие, при котором каждому элементу непустого множества X отвечает единственный элемент непустого множества Y, называется отображением множества X в множество Y.

<u>Определение понятия отображения множества на множество</u>

Соответствие, при котором каждому элементу непустого множества X отвечает единственный элемент непустого множества Y, и кроме того, каждому элементу множества Y отвечает хотя бы один элемент множества X называется отображением множества X на множество Y.

Отображения множеств обычно обозначают буквами $f, g, h......$ Если при отображении f элементу $x \in X$, соответствует элемент $y \in Y$, то элемент y называют образом элемента x, а элемент x называют прообразом элемента y и пишут:

$$y = f(x) \tag{2.5.5}$$

Множество всех прообразов элемента y называют его полным прообразом. В случае отображения множества X на множество Y пишут также:

$$Y = f(X) \tag{2.5.6}$$

Отображение $f : X \to Y$ называется инъективным, если разные элементы множества X имеют различные образы.

Определение множественной эквивалентности

Отображение множества X на множество Y называется взаимно однозначным, если разным элементам множества X, соответствуют разные элементы множества Y. Если множество X взаимнооднозначно отображается на множество Y, то множества X и Y называются множественно эквивалентными, что выражается следующим образом :

$$X \cong Y \tag{2.5.7}$$

Определение отрезка натурального ряда

Множество всех натуральных чисел, меньших или равных некоторому натуральному числу n, называется отрезком натурального ряда. Отрезок натурального ряда обозначается как $|1,n|$. В частном случае имеем $|1,1|$.

Определение конечного множества и класса

Множество или класс называется конечным множеством в том и только в том случае, если оно эквивалентно отрезку натурального ряда.

Определение бесконечного множества и класса

Множество или класс, не являющиеся эквивалентными никакому отрезку натурального ряда, называются бесконечными.

Определение мощности конечного множества и класса

Мощностью конечного множества или класса называется натуральное количество его элементов n.

Определение равномощности конечных множеств и классов

Два конечных множества или класса являются равномощными тогда и только тогда, когда количество их элементов выражается одним и тем же натуральным числом n.

<u>Определение множественной порядковой равномощности бесконечных множеств и классов</u>

Два множественно эквивалентные друг другу бесконечные множества (или классы) называются множественно порядково равномощными.

<u>Определение общего порядкового кардинального числа для бесконечных множеств и классов</u>

Если два бесконечных множества или класса множественно эквивалентны, то говорят, что они имеют бесконечное общее порядковое кардинальное число.

Последнее определение нуждается в пояснении. Необходимо отметить, что имеются существенные логические различия в логической природе мощностей конечных и бесконечных множеств и классов. Мощность заданного конечного множества является постоянным конечным натуральным числом, в то время как бесконечное порядковое кардинальное число определяется в результате установления порядка взаимнооднозначного соответствия между двумя бесконечными множествами и классами. Вследствие этого обстоятельства аналитическое выражение бесконечного порядкового кардинала может существенно зависеть от характера и свойств рассматриваемого соответствия.

В теории множеств и классическом математическом анализе исследование бесконечности осуществляется с помощью бесконечных величин, которые являются носителями свойств, как актуальной так и потенциальной бесконечности. Бесконечные порядковые кардинальные числа выражают актуально-бесконечный характер бесконечного множества. Но одновременно с этим в классическом математическом анализе существует понятие бесконечно большой величины (которая выражает свойство бесконечного количества), логико-аналитический характер которой раскрывает приводимое ниже определение.

<u>Определение бесконечно большой величины</u>

Переменная $s(n)$ ***называется бесконечно большой, если она для достаточно больших натуральных значений*** n ***становится, и остается по абсолютной величине большей сколь угодно большого наперед заданного числа*** $E>0$***:***

$$|s(n)|>E,(n>N_0) \qquad (2.5.8)$$

Необходимо подчеркнуть, что в приведенном выше определении мы имеем дело с переменной величиной, которая лишь в процессе своего изменения может сделаться большей сколь угодно большого произвольно взятого числа $E>0$.

Бесконечно большая величина характеризуется стремлением к бесконечности:

$$|s(n)| \to \infty \qquad (2.5.9)$$

С целью логического распространения количественного характера мощности конечных множеств на бесконечные множества рассмотрим следующее определение.

<u>Определение количественного кардинального числа для бесконечных множеств и классов</u>

Количественным кардинальным числом бесконечного множества или класса, количество элементов которого выражается натуральной функцией $|c(n)|$ ***натурального аргумента*** n***, стремящаяся к бесконечности при стремлении*** $n \to \infty$***, называется бесконечно большая величина***

$$C_n = |c(n)|(n \to \infty)$$

Необходимо отметить, что количественные и порядковые кардинальные числа, могут иметь имеют различную логико-аналитическую природу. Первые из них выражают бесконечное количество, а вторые – отношения порядка для двух или более бесконечных множеств или классов.

В классическом математическом анализе бесконечные количественные кардинальные числа называют также «несобственными числами».

Первой, из так называемых элементарных бесконечных мощностей, в классической теории множеств рассматривается мощность всех натуральных чисел. Кардинальное число множества всех натуральных чисел обозначается как $\aleph_0$(алеф-нуль, алеф – первая буква ивритского алфавита). Согласно /5/ - $\aleph_0$ выражается следующим соотношением:

$$\aleph_0 = 1+1+1+1+......... \qquad (2.5.10)$$

Таким образом, в соответствии с (2.5.10), - $\aleph_0$ является количественным кардинальным числом. В соответствии с классическим математическим анализом, соотношение (2.5.10) означает, что $\aleph_0$ является суммой бесконечного ряда единиц, а по терминологии канторовской теории множеств $\aleph_0$ - является первым трансфинитным кардинальным числом.

С другой стороны, в соответствии с классической канторовской теорией множеств, $\aleph_0$ является порядковым кардинальным числом. Если некоторое бесконечное множество взаимнооднозначно отображается на множество натуральных чисел, то говорят, что это множество счетно, порядково равномощно множеству натуральных чисел и имеет порядковое кардинальное число $\aleph_0$, или что то же самое – мощность $\aleph_0$.

Если X множество, то множество, являющееся множеством его подмножеств обозначается как $P(X)$. Мощность множества X обозначается $|X|$, мощность множества $P(X)$ обозначается через $|P(X)|$.

Перейдем к рассмотрению «Теоремы Кантора» . Красным цветом выделены фрагменты доказательства, на которые следует обратить самое пристальное внимание при анализе логических свойств доказательства «Теоремы Кантора».

<u>Теорема Кантора</u>

Любое множество менее мощно, чем множество всех его подмножеств.

Доказательство

<u>Допустим, что существует</u> множество A, равномощное множеству всех его подмножеств $P(A)$. **<u>Тогда существует взаимнооднозначное соответствие (биекция)</u>** f, **<u>ставящая в соответствие каждому элементу</u>** множества A, некоторое его подмножество Y, что может быть выражено в следующем виде:

$$\exists A \exists C \exists f \exists Y \forall C (C \in A) \exists Y : (Y = f(C)) \wedge (Y \subseteq A) \qquad (2.5.11)$$

(Обратим внимание на существенную деталь. Прежде чем перейти к дальнейшему доказательству,необходимо удостоверится в существовании объектов, перечисленных в соотношении (2.5.11), и удостоверится для рассматриваемых классов в существовании хотя бы одного отображения, из класса отображений, определяемых соотношением (2.5.11). Однако в стандартных версиях доказательства «Теоремы Кантора» эта формула отсутствует вовсе. Тем более, как правило, не рассматривается и вопрос существования подобных отображений).

<u>Рассмотрим множество B, удовлетворяющее соотношению :</u>

$$B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin f(x))\} \qquad (2.5.12)$$

(В формуле (2.5.12) не доказано существование объектов x, удовлетворяющих сформулированному характеристическому свойству, поскольку не приведена реальная структура взаимнооднозначного соответствия между множествами A и $P(A)$. В классической аристотелевской традиционной логике это характеризуется как логическая ошибка «petitio principii» - «предвосхищение основания»)

f биективно, а для B выполняется соотношение:

$$B \subseteq A \tag{2.5.13}$$

Поэтому существует такой объект y, **для которого**:

$$(y \in A) \wedge (f(y) = B) \tag{2.5.14}$$

(В (2.5.14) также содержится «petitio principii», поскольку не доказано существование объекта y).

Теперь посмотрим, может ли y принадлежать B.

Если $y \in B$, то в соответствии с (2.5.12) - $y \in A$, поэтому в соответствии с (2.5.12) :

$$y \notin f(y) \tag{2.5.15}$$

С другой стороны в соответствии с (2.5.11), поскольку $y \in A$, то существует Y для которого

$$Y = f(y) \tag{2.5.16}$$

Из сопоставления (2.5.15) и (2.5.16) следует:

$$y \notin Y \tag{2.5.17}$$

Из сопоставления (2.5.11) и (2.5.17) следует:

$$y \notin f(C) \tag{2.5.18}$$

Из сопоставления сотношений (2.5.11), (2.5.12), (2.5.14), (2.5.17), (2.5.18) следует, что объект $y \in A$, определяемый соотношением (2.5.14), не принадлежит взаимнооднозначному соответствию, определяемому соотношением (2.5.11). Это означает, что из сделанного допущения $y \in B$, в рассматриваемом случае мы пришли к противоречию с исходным предположением о существовании взаимнооднозначного соответствия между множеством A и множеством всех его подмножеств $P(A)$.

Рассмотрим теперь вторую возможность, а именно:

$$y \notin B \qquad (2.5.19)$$

Тогда из сопоставления (2.5.14) и (2.5.19) следует:

$$y \notin f(y) \qquad (2.5.20)$$

Из сопоставления соотношений (2.5.14) и (2.5.20) следует:

$$(y \in A) \wedge (y \notin f(y)) \qquad (2.5.21)$$

Из сопоставления сотношений (2.5.12) и (2.5.21) следует:

$$y \in B \qquad (2.5.22)$$

Очевидно, что полученное соотношение (2.5.22) противоречит соотношению (2.5.19). Таким образом и в этом рассматриваемом случае мы пришли к противоречию, а именно из предположения (2.5.19) мы пришли к его отрицанию (2.5.22). Именно к такому двойному противоречию и приходят при стандартном доказательстве «Теоремы Кантора».

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса, - является ли «Теорема Кантора» верной в общем случае. Критерием истинности в этом вопросе, с точки зрения классической аристотелевской традиционной логики, в данном случае служит следующее правило опровержения, формулировка которого приведена ниже.

<u>Правило опровержения</u>

Если истинность некоторого суждения утверждается для всех возможных случаев из числа рассматриваемых, и тем самым содержит логический квантор всеобщности по отношению ко всем случаям из числа рассматриваемых, то для его опровержения достаточно найти хотя бы один случай из числа рассматриваемых, для которого упомянутое суждение является ложным.

Для адекватного решения вопроса об истинности «Теоремы Кантора», в первую очередь необходимо еще раз рассмотреть определение понятия множества.

<u>Определение множества</u>

Множеством называется класс, удовлетворяющий следующему условию:

$$Set(Cx) = \{x : (\forall x)(C(x)) \wedge (\forall y(C(y) \oplus \neg C(y)\} \qquad (2.5.23)$$

Формула (2.5.23) означает, что множеством является такой класс, элементы которого удовлетворяют характеристическому свойству $C(x)$, и, кроме этого для каждого объекта

y на основании закона об исключенном третьем можно решить, удовлетворяет ли он характеристическому свойству $C(x)$, либо нет. *Этим самым осуществляется требование одного из основных законов классической традиционной аристотелевской логики – закона об исключенном третьем.*

В отношении универсального класса-множества U нами была доказана «Теорема экзистенциальности универсального множества», согласно которой конструктивно существующий универсальный класс U является одновременно и универсальным множеством.

Для мощности (кардинального числа) класса или множества Y принято следующее обозначение:

$$CardY = |Y| \tag{2.5.24}$$

Множество или класс Y, являющееся множеством (классом) всех подмножеств (подклассов) множества или класса X, обозначается следующим образом:

$$Y = P(X) \tag{2.5.25}$$

Кардинальное число пустого множества $\varnothing$ считается равным 0. Кардинальное число непустого бесконечного класса или множества является бесконечно большой величиной.

Одним из ключевых моментов в логическом развитии основ теории классов и множеств представляет собой логически корректное решение вопроса – является ли пустое множество $\varnothing$ подмножеством непустого класса Z. Поскольку этот вопрос по своему существу является весьма спорным и неоднозначным, то для его решения мы привлечем логически корректное формальное определение понятия подмножества, данного в работе /6/, позволяющее считать, что в системе ZF, $\varnothing$ - является подмножеством каждого непустого или пустого класса Z.

Определение понятия подмножества и подкласса

Класс или множество X называется подклассом или подмножеством класса или множества Z тогда и только тогда, когда не существует ни одного такого элемента X, который не являлся бы элементом Z, или формально:

$$(X \subseteq Z) \Leftrightarrow \neg(\exists x : (x \in X \wedge x \notin Z)) \tag{2.5.26}$$

Пустое множество $\varnothing$ равно самому себе и является своим собственным подмножеством. Рассмотрим теперь тот случай, когда имеется пустое множество и непустой класс или множество Z. Подставим приведенные выше символы в соотношение (2.5.26) и произведем истинностную оценку полученной формулы:

$$[(\varnothing \subseteq Z) \Leftrightarrow \neg(\exists x : (x \in \varnothing \wedge x \notin Z))] \equiv 1 \qquad (2.5.27)$$

Из соотношения (2.5.27) следует, что для классов или множеств $\varnothing$ и Z - соотношение (2.5.27) выполняется. Следовательно имеет место соотношение:

$$\varnothing \subseteq Z \qquad (2.5.28)$$

Таким образом мы видим, что существует такое формально-логически корректное определение подмножества, которое позволяет в рамках системы ZF считать пустое множество $\varnothing$ подмножеством каждого пустого или непустого класса или множества Z.

Рассмотрим теперь характер отношения эквивалентности или неэквивалентности между универсальным классом-множеством U и множеством всех его подмножеств $P(U)$. Рассмотрим следующее определение.

<u>Определение сингулярного кардинального числа и сингулярного класса</u>

Кардинальное число $SCardX$ ***класса или множества*** X***, называется сингулярным в том, и только в том случае, если выполняется соотношение:***

$$SCardX = CardX = CardP(X) = |X| = |P(X)| \qquad (2.5.29)$$

где $P(X)$ - множество всех подмножеств класса или множества. Класс или множество, имеющее сингулярное кардинальное число,- называется сингулярным

Докажем следующее утверждение.

<u>Теорема о сингулярном множестве и сингулярном кардинальном числе</u>

<u>(Ахвледиани А.Н. – 2011)</u>

Существует бесконечное непустое сингулярное множество, имеющее сингулярное кардинальное число. Универсальный класс-множество U ***является сингулярным.***

Доказательство

Рассмотрим универсальный класс-множество U и множество его подмножеств $P(U)$. В соответствии с определением U, каждый элемент класса $P(U)$ одновременно принадлежит и U. Поэтому имеет место соотношение:

$$(\forall x : x \in P(U) \Rightarrow x \in U) \Rightarrow (P(U) \subseteq U) \qquad (2.5.30)$$

В соответствии с определением U универсальный класс содержит в качестве элементов все классы, как пустой класс, так и каждый непустой, конечный или бесконечный. Поэтому каждый класс X, принадлежащий классу U, является его подмножеством и вследствие этого одновременно является элементом класса $P(U)$ т.е. имеет место соотношение:

$$(\forall X : (X \in U \Rightarrow X \subseteq U) \Rightarrow (X \in P(U)) \Rightarrow (U \subseteq P(U)) \qquad (2.5.31)$$

Из сопоставления соотношений (2.5.30) и (2.5.31) и «Аксиомы экстенсиональности» следует:

$$U = P(U) \qquad (2.5.32)$$

Из соотношения (2.5.32) следует:

$$CardU = CardP(U) = SCardU = SCardP(U) = |U| = |P(U)| \qquad (2.5.33)$$

Соотношение (2.5.33) доказывает выдвинутую гипотезу о существовании бесконечного сингулярного множества и сингулярного кардинального числа. Теорема доказана.

Таким образом мы видим, что U - является сингулярным классом-множеством, равным и равномощным множеству всех своих подмножеств $P(U)$. Кроме этого, для утверждения об эквивалентности сингулярных множеств U и $P(U)$ нам *не понадобилось строить множественную эквиваленцию между ними*, поскольку вопрос об их эквивалентности разрешился непосредственно, путем установления равенства между ними. Равенство и равномощность множеств U и $P(U)$ согласно «Правилу опровержения» и является контр-примером, опровергающим общность «Теоремы Кантора». Таким образом, в общем случае – «Теорема Кантора» не является верной.

Тем не менее, представляет определенный интерес рассмотрение логических особенностей доказательства «Теоремы Кантора» с учетом полученных нами результатов. Возвращаясь к рассмотренному нами доказательству «Теоремы Кантора» мы видим, что с учетом полученных нами результатов, формула (2.5.12) в случае сингулярного универсального класса-множества U, содержит «petitio principii», которое перерастает в «error fundamentalis» (ложное основное положение в доказательстве), которое заключается в том, что в случае универсального класса U, элемента x не существует вовсе, поскольку для универсального класса U, каждый его элемент принадлежит и $P(U) = U$. В этом случае, множество B оказывается пустым:

$$B = \varnothing \qquad (2.5.34)$$

Что же касается формулы (2.5.14), то в случае универсального класса $U = P(U)$, мы имеем отображение класса $U = P(U)$ - на себя самого, причем это отображение является одновременно эквиваленцией. Поэтому вместо соотношения (2.5.14), мы будем иметь:

$$(y \in U) \wedge (f(y) = y) \tag{2.5.35}$$

В том случае, когда $y = \varnothing$, будем иметь:

$$(\varnothing \in U) \wedge (f(\varnothing) = \varnothing) \tag{2.5.36}$$

В этом случае формула (2.5.35) выполняется.

Однако в том случае, когда $y \neq \varnothing$, то с учетом (2.5.35) мы имеем:

$$y = f(y) \neq \varnothing \tag{2.5.37}$$

В этом случае справедлива формула (2.5.37), а с учетом (2.5.34) формула (2.5.14) – принимает вид:

$$(y \in U) \wedge (f(y) = \varnothing) \tag{2.5.38}$$

Мы видим, что в рассматриваемом случае формула (2.5.38) содержит на условиях конъюнкции подформулу, логически несовместную с истинным соотношением (2.5.37) и поэтому является ложной. Таким образом можно заключить, что именно формулы (2.5.12) и (2.5.14) стандартного доказательства «Теоремы Кантора», содержащие «petitio principii» («предвосхищение основания»), приводят в конечном итоге к возникновению противоречия в случае сингулярного универсального множества U. *Именно это обстоятельство и является источником возникновения серьезных логических проблем*, возникающих в связи с доказательством и дальнейшим применением «Теоремы Кантора» в классической теории множеств.

2.6 Логический анализ «Парадокса Кантора»

В теории множеств «Парадокс Кантора» наряду с « Теоремой Кантора» играет важную роль в дальнейших логико-аналитических построениях. Как известно, теорема Кантора формулируется следующим образом.

Теорема Кантора

Любое множество менее мощно, чем множество всех его подмножеств.

В предыдущем параграфе нами было показано, что в случае сингулярного универсального класса-множества U, «Теорема Кантора» не является верной. А именно, имеет место следующее утверждение, - универсальный сингулярный класс-множество U, является равным и равномощным множеству всех своих подмножеств $P(U)$, что формально выражается следующим соотношением в кардинальных числах:

$$CardU = CardP(U) = SCardU = SCardP(U) = |U| = |P(U)| \qquad (2.6.1)$$

Как будет показано далее, это обстоятельство позволяет разрешить так называемый «Парадокс Кантора», стандартная версия которого изложена ниже, с добавленными нашими комментариями, выделенными курсивом. Фрагменты логического анализа, на которые надо обратить пристальное внимание при исследовании логической природы «Парадокса Кантора», и которые в конечном счете и приводят к парадоксу, выделены красным цветом.

Парадокс Кантора

Предположим, что класс всех самотождественных множеств существует и выражается соотношением:

$$V = \{x : x = x\} \qquad (2.6.2)$$

(Обратим внимание на то обстоятельство, что согласно (2.6.2), класс V является *классом всех самотождественных множеств*).

В этом случае для множеств x и $t = t \neq \varnothing$, удовлетворяющих (2.6.2), справедливо следующее соотношение:

$$\forall x \forall t (x \in t \Rightarrow x \in V) \qquad (2.6.3)$$

Соотношение (2.6.3) означает, что t является подмножеством множества V.

$$t \subseteq V \qquad (2.6.4)$$

Из (2.6.4) следует:

$$\forall t : |t| \leq |V| \qquad (2.6.5)$$

(2.6.5) означает, что мощность множества t не превышает мощности множества V:

Но в силу «Аксиомы степени», для множества V, как и для всякого множества существует множество всех его подмножеств $P(V)$, **и по «Теореме Кантора»:**

$$|P(V)| > |V| \qquad (2.6.6)$$

Соотношение (2.6.6) вступает в противоречие с соотношением (2.6.5). **Следовательно сделанное предположение неверно и множества** V **не существует.**

Однако, как упоминалось выше, нами в предыдущем параграфе было показано, что «Теорема Кантора» не является верной в случае универсального класса-множества U . Это означает, что соотношение (2.6.6) является в общем случае недоказуемым. Таким образом, именно то обстоятельство, что «Теорема Кантора» в общем случае не является верной и является одной из причин возникновения «Парадокса Кантора. Кроме этого в силу справедливости соотношений (2.6.3) и (2.6.4), - соотношение (2.6.5) является безусловно верным, и, следовательно, его отрицание (2.6.6) по меньшей мере является логически недоказуемым.

Рассмотрим вопрос, насколько возможно в принципе, в рамках аристотелевской классической традиционной логики отвергать существование класса V всех самотождественных множеств. Как известно, понятие самотождественности объектов, классов и множеств непосредственно согласуется с первым законом классической аристотелевской традиционной логики – законом тождества. Следовательно, *отрицание существования всего класса самотождественных множеств* является логически невозможным с точки зрения традиционной аристотелевской логики.

3. Исследование феномена логической трансценденции в основаниях классической формальной логики нулевого порядка и логически трансцендентных свойств «Аксиомы выбора»

3.1 Теоремы о логической трансценденции в классической формальной логике нулевого порядка

В настоящем параграфе сформулированы и доказаны теоремы о логической трансценденции в основаниях классической формальной логики нулевого порядка. Показано, что логическая трансценденция по отношению к классической аристотелевской традиционной логике, представляет собой закономерное явление, непосредственно вытекающее из самих основ современной классической формальной логики нулевого порядка, глобальная непротиворечивость которой установлена выдающимся австрийским логиком – Куртом Геделем.

Рассмотрим определение аристотелевской формально-логически истинной формулы.

Определение аристотелевской формально-логически истинной формулы

Логическая формула, полностью удовлетворяющая трем основным законам классической аристотелевской традиционной логики, значения истинности которой равны логической 1 при всех значениях, входящих в нее логических переменных, называется аристотелевской истинной логической формулой.

Перейдем к рассмотрению понятия логической трансценденции. Под логической трансценденцией (от лат. transcendentis – перешагивающий, выходящий за пределы) по отношению к классической аристотелевской формальной логике мы понимаем конструктивное существование и выводимость в рамках современной класической формальной логики нулевого порядка таких логических формул, которые не соответствуют второму или третьему основным законам классической аристотелевской традиционной логики и тем самым выходят за пределы упомянутой логической системы.

Определение логически слабо трансцендентной формулы

Логическая формула G классической формальной логики нулевого порядка называется логически слабо трансцендентной по отношению к классической аристотелевской традиционной логике, если и сама формула G и ее отрицание $\neg G$ являются непротиворечивыми и вместе с тем недоказуемыми.

Сформулируем и докажем следующее утверждение.

Теорема о слабой логической трасценденции в классической формальной логике нулевого порядка (Ахвледиани А.Н. – 2011)

На множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка существуют логически слабо трансендентные формулы G и $\neg G$ по отношению к классической традиционной аристотелевской логике.

Доказательство

Пусть логическая формула G определена следующим образом:

$$G \equiv g2x \equiv \langle 0,1 \rangle \qquad (3.1.1)$$

Тогда ее отрицание $\neg G$ имеет следующий вид:

$$\neg G \equiv g1x \equiv \langle 1,0 \rangle \qquad (3.1.2)$$

Из соотношений (3.1.1) и (3.1.2), а также правил классической формальной логики нулевого порядка следует, что каждая из формул G и $\neg G$ является непротиворечивой и вместе с тем недоказуемой. Это означает, что в отношении ни одной из них в отдельности мы не можем утверждать об ее аристотелевской истинности. Действительно:

$$(G \equiv g2x \equiv 1) = \langle 0,1 \rangle \qquad (3.1.3)$$

$$(\neg G \equiv g1x \equiv 1) = \langle 1,0 \rangle \qquad (3.1.4)$$

Формула (3.1.3) означает, что утверждение об истинности логической формулы G является недоказуемым. Формула (3.1.4) означает, что утверждение об истинности логической формулы $\neg G$ является недоказуемым. Таким образом мы видим, что ни одна из логических формул G, $\neg G$ по отдельности не является тождественно истинной аристотелевской формулой. Вследствие этого, логические формулы $G, \neg G$ не удовлетворяют третьему основному закону классической традиционной аристотелевской логики. С другой стороны они удовлетворяют определению логически слабо трансцендентных логических формул. Таким образом мы видим, что на множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка, существуют логически слабо трансцендентные формулы G и $\neg G$. Теорема доказана.

Рассмотрим определение логически предельно трансцендентной формальной системы.

Определение логически предельно трансцендентной формальной системы

Формальная логическая система называется логически предельно трансцендентной, если является доказуемым, что на множестве логических формул этой системы выводима хотя бы одна из логически предельно трансцендентных логических формул, что формально может быть выражено следующим образом:

$$[(B1 \wedge B2 \wedge B3 \wedge ...Bm \wedge ...BM) \Rightarrow (C \wedge \neg C)] \equiv 1 \qquad (3.1.5)$$

$$[(B1 \wedge B2 \wedge B3 \wedge ...Bm \wedge ...BM) \Rightarrow (\neg C \wedge \neg\neg C)] \equiv 1 \qquad (3.1.6)$$

Сформулируем и докажем следующее утверждение.

Теорема о предельной логической трансцендентности классической формальной логики нулевого порядка (Ахвледиани А.Н. – 2011)

Классическая формальная логика нулевого порядка является логически предельно трансцендентной формальной логической системой. На множестве унарных логических операций выводима по крайней мере одна логически предельно трансцендентная формула.

Доказательство

Из рассмотрения **Таблицы 1** унарных логических операций следует, что каждая из формул $g1x$ и $g2x$ по отдельности, является непротиворечивой. Однако, несмотря на это, их конъюнкция является формально тождественно противоречивой:

$$(g1x \wedge g2x) \equiv \langle 1,0 \rangle \wedge \langle 0,1 \rangle \equiv \langle 0,0 \rangle \qquad (3.1.7)$$

Из соотношения (3.1.7) и логического закона Дунса Скота следует:

$$[(g1x \wedge g2x) \Rightarrow (\neg g1x \wedge \neg\neg g1x)] \equiv [\langle 0,0 \rangle \Rightarrow \langle 0,0 \rangle] \equiv \langle 1,1 \rangle \qquad (3.1.8)$$

Из формулы (3.1.8) и определения логически предельно трансцендентной формальной системы следует, что выводимость логически предельно трансцендентной формулы $(\neg g1x \wedge \neg\neg g1x)$ на множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка является тождественно доказуемой. *Поэтому классическая формальная логика нулевого порядка является логически предельно трансцендентной формальной логической системой.* Теорема доказана.

3.2 Теорема о логически трансцендентных свойствах «Аксиомы выбора»

В настоящем параграфе, с учетом известных результатов Курта Геделя и Герхарда Генцена в отношениии классической логико-математической аксиоматической системы **PA** Джзузеппе Пеано, сформулирована и доказана «Теорема о генезисе логической трансценденции в основаниях классической теоретико-множественной математики». Показано, что сочетание «Метода математической индукции» с глобально непротиворечивой классической формальной логикой нулевого порядка и «Аксиомой выбора» является достаточным условием для генезиса логически предельно трансцендентной формальной системы в основании классической теоретико-множественной математики.

Как известно, выдающимся австрийским логиком Куртом Геделем было показано существование в классических математических теориях, содержащих аксиоматическую логико-математическую аксиоматическую систему выдающегося итальянского математика Джузеппе Пеано с присоединенной к ней «Методом математической индукции» **PA&MI**, таких трансцендентных по отношению к классической аристотелевской традиционной логике, логических формул F и ¬F, которые с одной стороны хотя и не отрицают закона об исключенном третьем, но с другой стороны и не удовлетворяют ему. При этом первая теорема Геделя по существу означает, что если достаточно богатая формальная или полуформальная математическая теория, содержащая аксиоматику Пеано, является непротиворечивой, то в ней существуют трансцендентные логические формулы F и ¬F, которые не могут быть ни доказаны, ни опровергнуты на основании классической аристотелевской традиционной логики и «Аксиоматической системы Пеано»

Приведем формулировки теорем Курта Геделя о неполноте формальных и полуформальных логико-математических систем, содержащих систему **PA&MI**.

Первая теорема Геделя

Существует такое суждение F в аксиоматической системе **PA&MI**, что ни F, ни ¬F не могут быть доказаны посредством аксиом из **PA&MI**, если система **PA&MI** непротиворечива.

Вторая теорема Геделя

Непротиворечивость аксиоматической системы **PA&MI - Consis(PA&MI))**, не может быть доказана в **PA&MI**, если система **PA&MI** является непротиворечивой.

Ниже приводится содержание традиционной версии аксиоматической системы Пеано – **PA**.

Аксиомы Пеано

1. ***1 есть натуральное число.***
2. ***Для каждого натурального числа n имеется точно одно натуральное число, называемое его последующим и обозначаемое $S(n)$.***
3. ***Всегда имеет место сотношение $S(n) \neq 1$.***
4. ***Из равенства $S(n) = S(m)$ следует $m = n$.***
5. ***Принцип полной индукции. Множество N_+ натуральных чисел, содержащее 1 и для каждого из n элементов следующий за ним элемент $S(n)$, содержит все натуральные числа.***

Арифметика Пеано

Сложение и умножение натуральных чисел определяется формулами:

$$S(n) = n + 1 \tag{3.2.1}$$

$$S(m + n) = m + S(n) \tag{3.2.2}$$

$$n \cdot 1 = n \tag{3.2.3}$$

$$n \cdot S(m) = n \cdot m + n \tag{3.2.4}$$

Необходимо отметить, что кроме аксиоматической системы Пеано, - PA, включающей в себя «Аксиомы Пеано» и «Арифметику Пеано», основания классической математики **(PA&MI)** включают в себя также «Метод математической индукции», формулировка которого приводится ниже.

Метод математической индукции

Если некоторое утверждение $A(n), n = 1,2,3..........$ справедливо для $n = 1$, и для каждого n из справедливости $A(n)$ при значении n следует справедливость $A(n+1)$ при $n+1$, то утверждение $A(n)$ - справедливо для всех натуральных n, или формально:

$$(\forall n \in N_+)((\forall i \in \{1,...n\})A(n) \equiv 1 \Rightarrow A(n+1) \equiv 1) \Rightarrow (\forall n \in N_+)(A(n) \equiv 1) \tag{3.2.5}$$

Как известно выдающимся немецким математиком Герхардом Генценом в 1936 году была доказана совместность аксиом Пеано и арифметики Пеано, однако для этого ему пришлось добавить к логике первого порядка дополнительную аксиому (бескванторную индукцию). Тем самым Герхардом Генценом была завершена программа Давида

Гильберта по формализации оснований математики. Необходимо подчеркнуть, что результаты, полученные Герхардом Генценом не вступают в противоречие с теоремами Геделя, наоборот исследование и результаты Герхарда Генцена являются косвенным подтверждением «Второй теоремы Геделя» поскольку Генцену для обоснования внутренней логической непротиворечивости аксиоматической системы **PA** пришлось добавить к логике первого порядка дополнительную аксиому о бескванторной индукции.

Из сопоставления результатов Курта Геделя и Герхарда Генцена в отношении аксиоматической системы **PA** вытекает важное следствие – можно утверждать, что аксиоматическая система **PA** является внутренне непротиворечивой в смысле логической совместности основных аксиом этой системы, а это в соответствии с «Первой теоремой Геделя» означает, что в каждой математической теории первого порядка, основанной на системе **PA** существуют логически трансцендентные по отношению к аристотелевской традиционной формальной логике формулы F и $\neg$F, которые не могут быть ни доказаны, ни опровергнуты на основании классической аристотелевской традиционной логики и аксиоматической системы Пеано **PA**.

Для дальнейшего изложения нам понадобится «Аксиома выбора» из системы **ZFC** теории множеств, словесная формулировка которой приводится ниже.

Аксиома выбора

Для каждого семейства B непустых непересекающихся множеств существует по меньшей мере одно непустое множество D, которое имееет только один общий элемент c с каждым из множеств $b \in B$ данного семейства.

Рассмотрим следующее определение.

Определение логического коллапса

Логическим коллапсом (тотальным ослаблением истинности) называется такая логическая ситуация, когда в некоторой формальной или полуформальной логико-математической теории T, становится логически конструктивно осуществимым выведение на основе непротиворечивых логических формул, - тождественно противоречивой логической формулы или формул на множестве унарных, бинарных, тернарных или в общем случае n - арных логических операций.

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема о логическом коллапсе в системе PA&MI&AB в рамках классической формальной логики нулевого порядка (Ахвледиани А.Н. – 2011)

Сочетание классической формальной логики нулевого порядка, «Метода математической индукции» и «Аксиомы выбора», является достаточным условием

для конструктивной осуществимости множественного логического коллапса в каждой формальной или полуформальной логико-математической теории, содержащей классическую формальную логику нулевого порядка, «Метод математической индукции» и «Аксиому выбора».

Доказательство

Пусть B - непустое семейство непустых непересекающихся множеств $b1, b2, b3,$ логических формул, определенных на множестве унарных логических операций следующим образом.

$b1$ - есть счетное множество непротиворечивых, логически слабо трансцендентных формул $a11, a12, a13, \ldots a1n, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, логическая структура каждой из которых совпадает с логической структурой непротиворечивой формулы $g1(x)$ на множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка**.**

$b2$ - есть счетное множество непротиворечивых, логически слабо трансцендентных формул $a21, a22, a23, \ldots a2n, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, логическая структура каждой из которых совпадает с логической структурой непротиворечивой формулы $g2(x)$ на множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка**.**

$b3$ - есть счетное множество тождественно истинных логических формул $a31, a32, a33, \ldots a3n, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, логическая структура каждой из которых совпадает с логической структурой тождественно истинной формулы $g3(1)$ на множестве унарных логических операций классической формальной логики нулевого порядка**.**

Кортежи $d1, d2, d3, \ldots, \ldots, dn, \ldots$ логических формул, определим следующим образом на основе «Аксиомы выбора»:

$$d1 = \langle a11, a21, a31 \rangle \qquad (3.2.6)$$

$$d2 = \langle a12, a22, a32 \rangle \qquad (3.2.7)$$

$$d3 = \langle a13, a23, a33 \rangle \qquad (3.2.8)$$

....

$$dn = \langle a1n, a2n, a3n \rangle \qquad (3.2.9)$$

....

Определим кортеж $LCU = \langle lc1, lc2, lc3, ..., lcn, ... \rangle$ логических формул следующим образом.

$$lc1 \equiv (a11 \wedge a21 \wedge a31) \tag{3.2.10}$$

$$lc2 \equiv (a12 \wedge a22 \wedge a32) \tag{3.2.11}$$

$$lc3 \equiv (a13 \wedge a23 \wedge a33) \tag{3.2.12}$$

....

$$lcn \equiv (a1n \wedge a2n \wedge a3n) \tag{3.2.13}$$

....

Из способа определения множеств $b1, b2, b3$ непротиворечивых логических формул множества унарных логических операций глобально непротиворечивой классической формальной логики нулевого порядка и формул (3.2.10)-(3.2.13) следует:

$$lc1 \equiv (\langle 1,0 \rangle \wedge \langle 0,1 \rangle \wedge \langle 1,1 \rangle) \equiv \langle 0,0 \rangle \tag{3.2.14}$$

$$lc2 \equiv (\langle 1,0 \rangle \wedge \langle 0,1 \rangle \wedge \langle 1,1 \rangle) \equiv \langle 0,0 \rangle \tag{3.2.15}$$

$$lc3 \equiv (\langle 1,0 \rangle \wedge \langle 0,1 \rangle \wedge \langle 1,1 \rangle) \equiv \langle 0,0 \rangle \tag{3.2.16}$$

....

$$lcn \equiv (\langle 1,0 \rangle \wedge \langle 0,1 \rangle \wedge \langle 1,1 \rangle) \equiv \langle 0,0 \rangle \tag{3.2.17}$$

....

Из определения кортежа $LCU = \langle lc1, lc2, lc3, ..., lcn, ... \rangle$ и формул (3.2.14) – (3.2.17) следует:

$$LCU = \langle \langle 0,0 \rangle, \langle 0,0 \rangle, \langle 0,0 \rangle, ..., \langle 0,0 \rangle, ... \rangle \tag{3.2.18}$$

Формула (3.2.18) и означает конструктивную выводимость множественного логического коллапса, полученного на основе конъюнкции непротиворечивых логических формул множества унарных логических операций, законов глобально непротиворечивой классической формальной логики нулевого порядка и «Аксиомы выбора». Теорема доказана.

Рассмотрим следующее определение.

Определение счетного кортежа логического коллапса на множестве унарных логических операций

Кортеж, определяемый формулой (3.2.18):

$$LCU = \langle \langle 0,0 \rangle, \langle 0,0 \rangle, \langle 0,0 \rangle, ..., \langle 0,0 \rangle, ... \rangle$$

называется счетным кортежем логического коллапса на множестве унарных логических операций.

Рассмотрим следующее определение.

Определение счетного кортежа истинности на множестве унарных логических операций

Кортеж $U1$, определяемый формулой:

$$U1 = \langle \langle 1,1 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 1,1 \rangle, ..., \langle 1,1 \rangle, ... \rangle \tag{3.2.19}$$

называется счетным кортежем истинности на множестве унарных логических операций.

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема о генезисе логической трансценденции в основаниях классической теоретико-множественной математики (Ахвледиани А.Н. – 2011)

Конструктивное существование счетного кортежа LCU логического коллапса на множестве унарных логических операций является достаточным условием для генезиса и счетного кортежа истинности $U1$, свидетельствующего о

конструктивной осуществимости генезиса логической трансценденции на множестве унарных логических операций в каждой логико-математической формальной или полуформальной теории, содержащей классическую формальную логику нулевого порядка, «Метод математической индукции» и «Аксиому выбора».

Доказательство

Рассмотрим множество логических формул, определенных следующим образом:

$$S1 \equiv [(a11 \wedge a21 \wedge a31) \Rightarrow (\neg g1(x) \wedge \neg\neg g1(x))] \equiv \langle 0,0 \rangle \Rightarrow \langle 0,0 \rangle \equiv \langle 1,1 \rangle \qquad (3.2.20)$$

$$S2 \equiv [(a12 \wedge a22 \wedge a32) \Rightarrow (\neg g1(x) \wedge \neg\neg g1(x))] \equiv \langle 0,0 \rangle \Rightarrow \langle 0,0 \rangle \equiv \langle 1,1 \rangle \qquad (3.2.21)$$

$$S3 \equiv [(a13 \wedge a23 \wedge a33) \Rightarrow (\neg g1(x) \wedge \neg\neg g1(x))] \equiv \langle 0,0 \rangle \Rightarrow \langle 0,0 \rangle \equiv \langle 1,1 \rangle \qquad (3.2.22)$$

....

$$Sn \equiv [(a1n \wedge a2n \wedge a3n) \Rightarrow (\neg g1(x) \wedge \neg\neg g1(x))] \equiv \langle 0,0 \rangle \Rightarrow \langle 0,0 \rangle \equiv \langle 1,1 \rangle \qquad (3.2.23)$$

....

Кортеж, составленный из логических векторов, полученных в результате формул (3.2.20)-(3.2.21) равен счетному кортежу истинности $U1$:

$$\langle \langle 1,1 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 1,1 \rangle, ..., \langle 1,1 \rangle, ... \rangle = U1 \qquad (3.2.24)$$

Полученное соотношение (3.2.24) означает доказательство сформулированной нами теоремы.

Заключение.

В настоящей работе нами было показано, что современная классическая формальная логика нулевого порядка, а значит и содержащая ее классическая формальная логика первого порядка имеют логически трансцендентные свойства по отношению к аристотелевской традиционной логике, в частности:

1. Классическая формальная логика нулевого порядка содержит множество логических формул, исключенных из рассмотрения в аристотелевской традиционной логике.

2. В классической фомальной логике нулевого порядка конъюнкция двух непротиворечивых логических формул может приводить к логическому коллапсу – тождественному ослаблению формальной истинности. Эта логическая ситуация в корне отличается от положения дел в аристотелевской традиционной логике, где непротиворечивость формулы означает ее истинность, и вследствие этого обстоятельства, - конъюнкция двух или более непротиворечивых логических формул является тождественно истинной.

3. В настоящей работе, в рамках классической формальной логики нулевого порядка был сформулирован и доказан «Первый принцип логико-математической трансценденции» согласно которому в некоторых случаях формально-логически непротиворечиво выводимыми является, как само утверждение A, так и его отрицание $\neg A$, что с позиций аристотелевской традиционной логики может быть охарактеризовано, как выведение антиномии. Из отмеченного нами обстоятельства непосредственно следует, что в рамках классической формальной логики нулевого порядка, во многих случаях мы уже не можем претендовать на постижение «аристотелевской истинности». В большинстве случаев идет речь только о «логически непротиворечивой выводимости», причем во многих случаях непротиворечиво выводимыми являются, как сама логическая формула, так и ее отрицание. Понятие «аристотелевской истинности» в классической формальной логике нулевого и первого порядков заменяется понятием «логической доказуемости», где под логически доказуемой подразумевается формула, значение логической истинности которой при любой комбинации входящих в нее переменных равно логической единице.

4. Критерий непротиворечивости классической формальной логики нулевого порядка отличается от критерия непротиворечивости аристотелевской традиционной логики. В соответствии с аристотелевской традиционной логикой, непротиворечивыми считаются логические формулы, полностью соответствующие основным логическим законам – закону тождества, закону о непротиворечии и закону об исключенном

третьем. В классической формальной логике нулевого порядка непротиворечивой считается любая выполнимая логическая формула, причем если взаимно контрадикторные логические формулы по отдельности являются выполнимыми, то они по отдельности являются и непротиворечивыми. Отмеченное выше обстоятельство выявляет существенное различие между двумя рассматриваемыми логическими системами в смысле обязательной выполнимости закона об исключенном третьем. Иными словами, логические формулы, исключенные в аристотелевской традиционной логике, не исключены в классической формальной логике нулевого порядка.

5. Аристотелевская традиционная логика и классическая формальная логика нулевого порядка имеют различные критерии противоречивости. Согласно аристотелевской традиционной логике, та или иная формальная или полуформальная теория признается противоречивой, если в ее рамках выводима формула, не соответствующая одному из основных логических законов аристотелевской логики, или же являющаяся логически контрадикторной, или контрарной по отношению к упомянутым логическим законам. В классической формальной логике нулевого порядка наоборот, выполнимая логическая формула, не соответствующая закону об исключенном третьем считается непротиворечивой. Выводимость логически тождественно противоречивой формулы, являющейся свидетельством логического коллапса, также не признается признаком противоречивости теории, поскольку несмотря на то, что в рамках самой классической формальной логики нулевого порядка логический коллапс является выводимым, тем не менее это обстоятельство не является достаточным для признания классической формальной логики нулевого порядка противоречивой теорией. Наоборот, известно, что классическая формальная логика нулевого порядка является формальной глобально непротиворечивой теорией. С точки зрения классической формальной логики нулевого порядка формально-логическая противоречивость теории заключается в выведении в ее рамках таких двух тождественно доказуемых формул, каждая из которых является отрицанием другой.

6. В силу существеных различий между двумя рассматриваемыми логическими системами, сочетание аристотелевской традиционной логики с классической формальной логикой нулевого порядка в ряде случаев может приводить к образованию аристотелевских противоречий. При получении аристотелевского противоречия на основе сочетания методов классической формальной логики нулевого порядка с аристотелевской традиционной логикой в рамках некоторой формальной или полуформальной теории, такая теория уже не может считаться аристотелевски непротиворечивой.

7. В силу того обстоятельства, что классическая формальная логика нулевого порядка является составной частью классической формальной логики первого порядка, то отмеченные выше логические проблемы автоматически распространяются и на классическую логику первого порядка.

Обобщая рассмотренные выше материалы можно выделить следующие основные причины генезиса явления логической трансценденции в основаниях классической теоретико-множественной математики, выражающиеся в регулярном образовании аристотелевских антиномий.

1. Логическая неоднородность аристотелевской традиционной логики и классической формальной логики нулевого порядка, приводящая зачастую к логическому коллапсу (тотальному ослаблению формальной истинности) вследствие смешения логических формул этих двух систем.

2. Наличие логически трансцендентных свойств у классической формальной логики нулевого порядка.

3. Принятие в основаниях теории множеств «Аксиомы пустого множества», идущей вразрез с онтологической установкой аристотелевской традиционной логики в отношении категории «небытия».

4. Недостаточно четкое определение понятия множества, приводящее к возникновению антиномий.

5. Генезис множественного логического коллапса, возникающий в результате сочетания «Аксиомы выбора» с классической формальной логикой нулевого порядка.

Необходимо отметить, что исторически, логико-философские основы субъективно-релятивистского направления в логике и философии были заложены в античные времена, - представителями древнегреческой школы софистов. Из истории античной логики известно, что еще в доаристотелевский период, одним из наиболее сильных философских и логических направлений в Древней Греции являлось учение школы софистов. Софи́сты (от др.-греч. — умелец, изобретатель, мудрец, знаток) — древнегреческие платные преподаватели красноречия, представители одноименного философского направления, распространенного в Греции во 2-ой половине V — 1-й половине IV веков до н. э. В широком смысле термин «софист» означал *искусного или мудрого человека*. К наиболее известным старшим софистам относятся Протагор Абдерский, Горгий из Леонтин, Гиппий из Элиды, Продик Кеосский, Антифонт, Критий Афинский.

Старшие софисты — Протагор, Горгий, Продик и Гиппий — были выдающимися учеными своего времени. До софистов философы в основном занимались исследованием природы, софисты же сделали главным предметом своего философского исследования человека и его деятельность. На первое место выступают вопросы политики, этики, теории государства и права, начинают разрабатываться риторика, филология, грамматика и т. д. Протагор и Продик одними из первых стали заниматься вопросами научного языкознания; Протагор, Горгий и Трасимах одними из первых в Греции стали создавать теорию риторики.

Знаменитое положение софиста Протагора - «человек есть мера всех вещей», - исходило из учения Гераклита о всеобщей текучести и изменчивости всего существующего. Поскольку в каждый момент изменяется, как воспринимающий субъект, так и воспринимаемый им объект, то восприятие субъекта каждым человеком относительно и субъективно. *По мнению софистов, для каждого истинно то, что ему кажется таковым в данное время.*

Учение Протагора *о человеке, как мере всего существующего*, о том, что *у каждого человека в каждый момент особая истина*, что *одной и той же вещи могут быть одновременно приписаны противоположные свойства*, положило начало релятивистской и субъективистской теории познания софистов. Релятивизм софистов получил особенно яркое выражение в анонимном сочинении «Двоякие речи», в котором развивается учение об относительности человеческих понятий о добре и зле, о прекрасном и безобразном, о справедливости и несправедливости, об истине и лжи. Автор говорит, *что и судьи одну и ту же речь могут расценивать и как ложь, и как истину*. Одна и та же вещь бывает одновременно и легкой и тяжелой, в зависимости от того, с какой другой вещью она сравнивается.

Разрабатывая теорию красноречия, софисты не могли не затронуть вопросов логики, рассматривая их под углом зрения техники спора. Протагор написал специальное сочинение «Искусство спорить». Исходя из положения, что *о всякой вещи есть два противоположных мнения*, он первый *стал применять диалог, в котором два собеседника в споре защищали два противоположных взгляда.*

Софисты были весьма искусными изобретателями парадоксов. В широком смысле парадокс – это положение, резко расходящееся с общепринятыми, устоявшимися, ортодоксальными мнениями. Обычно парадокс представляет собой начало такого исследования, некое нарушение конвенции. Парадокс в более узком значении – это два противоположных утверждения, для каждого из которых имеются кажущиеся убедительными аргументы. Наиболее острая форма парадокса – антиномия, рассуждение, доказывающее приемлемость двух утверждений, одно из которых является отрицанием другого.

Проведенное в настоящей работе исследование показывает, что «логическая парадоксальность» тех или иных утверждений носит относительный характер в том смысле, что выходит за рамки аристотелевской традиционной логики, оставаясь тем не менее в рамках современной классической формальной логики нулевого порядка. Становится очевидным, что аристотелевская традиционная логика не является единственно возможной логической системой, даже с точки зрения современной классической формальной логики нулевого и первого порядков. Более того, как это показано в настоящей работе, в рамках классической формальной логики может быть построена «Трансцендентная логика, базирующаяся на «Законе тождества» аристотелевской традиционной логики и «Парадоксе Рассела», являющемся контрадикторным ко второму основному закону аристотелевской традиционной логики. При этом сама логическая структура унарных, бинарных и в общем случае n- арных логических операций не претерпевает изменений. Отмеченные обстоятельства свидетельствуют об обоснованности логико-философской релятивистской концепции античной школы софистов, особенно в тех случаях, когда речь идет о рассуждениях в условиях существенной неопределенности, в связи с изучением бесконечных классов, множеств и процессов.

Также заслуживает внимание то обстоятельство, что на рубеже 19-20 веков, в процессе создания новой логической системы в виде классической формальной логики нулевого порядка, и классической формальной логики первого порядка, а также с созданием теории множеств, как самостоятельной математической дисциплины, выяснилось, что аристотелевская традиционная логика является лишь частным случаем логики нулевого и первого порядков, а кроме нее упомянутые логические системы включают в себя логические формулы, выходящие далеко за пределы аристотелевской традиционной логики. Таким образом в процессе развития математики и логики, как наук, в упомянутый период времени произошла смена научной парадигмы, как в области логики, так и в области математики, что представляет несомненный интерес с аналитико-философской точки зрения.

Отмеченные выше обстоятельства естественным образом стимулируют дальнейшие исследования феномена логической тансценденции в основаниях современной классической логики и теоретико-множественной инфинитарной математики, в целях развития логико-аналитических методов, позволяющих осуществлять логический контроль в аналитических исследованиях, а также способствующих учету и по возможности преодолению выявленных в настоящем исследовании формально-логических проблем, связанных с феноменом логической трансценденции в основаниях классической формальной логики и теоретико-множественной математики.

Литература:

1. **П.Вопенка. Альтернативная теория множеств. Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН. Новосибирск. 2004.**
2. **Ахвледиани А.Н. Первый принцип логико-математической трансценденции системы INCOL&TAMLA. Энциклопедический Фонд Russika. Санкт-Петербург. 2011.**
3. **Ахвледиани А.Н. Второй принцип логико-математической трансценденции системы INCOL&TAMLA. Энциклопедический Фонд Russika. Санкт-Петербург. 2011.**
4. **Ахвледиани А.Н. О трансцендентной формально-логической и теоретико-множественной системе INCOL&TAMLA. Энциклопедический Фонд Russika. Санкт-Петербург. 2011.**
5. **Ф.Хаусдорф. Теория множеств. URSS.Москва. 2007.**
6. **Р.Куррант, Г.Робинс. Что такое математика. МЦНМО. 2000.**